Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2016. — Т.13

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2016. — V.13

НАПІВТОПОЛОГІЧНІ ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ

Т.О. Банах[1], В.К. Маслюченко[2], О.В. Равський[3]

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка*

[2] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

[3] *Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України*

Т.О. Банах, В.К. Маслюченко, О.В. Равський. *Semitopological vector space* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Шевченка. — 2016. — Т.13. — С. 84–89.

Напівтопологічним векторним простором називається векторний простір, наділений топологією, у якій додавання – неперервне, а множення на скаляр – нарізно неперервне.

Відповідаючи на три запитання другого автора, поставлених у 2011 році, ми доводимо, що (i) кожен метризовний напівтопологічний векторний простір є топологічним векторним простором, (ii) існує напівтопологічний векторний простір, який не є топологічним векторним простором, (iii) кожна компактна підмножина у напівтопологічному векторному просторі обмежена.

T.O. Banakh, V.K. Maslyuchenko, O.V. Ravsky, *Semitopological vector spaces*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **13** (2016), 84–89.

A *semitopological vector space* is a vector space X endowed with a topology making the addition $X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x + y$, continuous and the multiplication $\mathbb{R} \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$, separately continuous.

Answering three problems posed by the second author in 2011, we prove that (i) each metrizable semitopological vector space X is a topological vector space, (ii) there exists a semitopological vector space which is not a topological vector space, (iii) each compact subset of a semitopological vector space X is bounded in X.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46A16, 46A19, 46A50 *УДК:* 517.982

Ключові слова та фрази: Semitopological vector space

E-mail: t.o.banakh@gmail.com, v.maslyuchenko@gmail.com, oravsky@mail.ru

1. Вступ

Напівтопологічним векторним простором називається векторний простір X над топологічним полем $\mathbb{K}$, наділений топологією, у якій відображення додавання $X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x + y$, неперервне, а відображення множення на скаляр $\mathbb{K} \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$, – нарізно неперервне. Якщо відображення множення на скаляр сукупно неперервне, тоді напівтопологічний векторний простір називається *топологічним векторним простором*. У цій статті ми розглядаємо лише векторні простори над топологічним полем $\mathbb{K}$ дійсних чи комплексних чисел.

Напівтопологічним векторним просторам присвячена стаття В.К. Маслюченка [2], у якій такі простори називаються N-*просторами*. Напівтопологічні векторні простори розглядалися ще Стефаном Банахом, який означував F-простори як напівнопологічні векторні простори, топологія яких породжується повною інваріантною метрикою [1, с.30]. У 1933 році Мазур та Орліч [5] довели, що означені таким чином F-простори є топологічними векторними просторами. Цей класичний результат Мазура та Орліча спонукав В.К.Маслюченка [2] поставити наступні дві проблеми:

Проблема 1.1. *Чи кожен метризовний напівтопологічний векторний простір є топологічним векторним простором?*

Проблема 1.2. *Чи існує напівтопологічний векторний простір, що не є топологічним векторним простором?*

Підмножину B напівтопологічного векторного простору X назвемо *обмеженою* в X, якщо для довільного околу нуля $U \subseteq X$ існує такий окіл нуля $V \subseteq \mathbb{K}$, що $V \cdot B \subseteq U$.

Із доведеної в [2] теореми 3 випливає, що метризовний напівтопологічний векторний простір X є топологічним векторним простором тоді і лише тоді, коли кожна збіжна послідовність в X обмежена. У зв'язку з цим В.К. Маслюченко в [2] поставив ще одне запитання.

Проблема 1.3. *Чи кожна збіжна послідовність в напівтопологічному векторному просторі обмежена?*

У цій статті ми дамо позитивні відповіді на усі три запитання В.К. Маслюченка: у розділі 2 ми доведемо, що довільна компактна підмножина напівтопологічного векторного простору обмежена, у розділі 3 ми застосуємо цей результат для доведення неперервності множення у кожному напівтопологічному векторному k-просторі. Нарешті, у розділі 4 ми запропонуємо загальний метод побудови напівтопологічних векторних просторів, що не є топологічними векторними просторами.

2. Обмеженість компактних підмножин у напівтопологічних векторних просторах

Основним результатом цього розділу є наступна теорема, що дає позитивну відповідь на проблему 1.3.

Теорема 2.1. *Довільна компактна підмножина K напівтопологічного векторного простору X обмежена в X.*

Доведення. Для заданого околу нуля $U \subseteq X$ потрібно знайти такий окіл нуля $V \subseteq \mathbb{K}$, що $V \cdot K \subseteq U$. Використовуючи теорему Маркова [3, 3.3.9], можемо знайти таку інваріантну неперервну псевдометрику $d : X \times X \to [0,1]$ на абелевій топологічній групі X, що $\{x \in X : d(x,0) < 1\} \subseteq U$.

Розглянемо нарізно неперервне відображення

$$\mu \colon \mathbb{K} \times K \to X, \quad \mu \colon (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x,$$

у псевдометричний простір (X, d). Оскільки топологічне поле $\mathbb{K}$ (дійсних або комплексних чисел) – локально компактне, то можна застосувати класичну теорему Наміоки [7] і знайти всюди щільну G_δ-підмножину G в $\mathbb{K}$, для якої добуток $G \times K$ міститься у множині точок неперервності відображення $\mu : \mathbb{K} \times K \to (X, d)$. Зафіксуємо довільне число $g \in G$ і, використовуючи компактність множини K і неперервність функції μ у точках множини $\{g\} \times K$, знайдемо такий окіл $O_g \subseteq \mathbb{K}$ точки g в $\mathbb{K}$, що $d(\mu(\lambda, x), \mu(g, x)) < 1$ для довільних $x \in K$ і $\lambda \in O_g$. За інваріантністю псевдометрики,

$$d((\lambda - g) \cdot x, 0) = d(\lambda \cdot x, g \cdot x) = d(\mu(\lambda, x), \mu(g, x)) < 1.$$

Вибір псевдометрики d гарантує, що $(\lambda - g) \cdot x \in U$ і, отже, $(O_g - g) \cdot K \subseteq U$. Тоді $V = O_g - g$ є шуканим околом нуля в $\mathbb{K}$ з властивістю $V \cdot K \subseteq U$. □

3. Неперервність множення у напівтопологічних векторних просторах

У цьому розділі ми дамо позитивну відповідь на проблему 1.1. Спершу доведемо допоміжне

Твердження 3.1. *Для кожної обмеженої підмножини $B \subseteq X$ напівтопологічного векторного простору X відображення множення $\mathbb{K} \times B \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$, є неперервним.*

Доведення. Зафіксуємо довільну пару $(\lambda, b) \in \mathbb{K} \times B$ і довільний окіл $O_{\lambda b} \subseteq X$ добутку $\lambda \cdot b$. За неперервністю додавання, існує такий окіл нуля $U \subseteq X$, що $\lambda b + U + U \subseteq O_{\lambda b}$. Використовуючи обмеженість множини B в X, знайдемо такий окіл нуля $V \subseteq \mathbb{K}$, що $V \cdot B \subseteq U$. Використовуючи неперервність відображення $\mu_\lambda : B \to X$, $\mu_\lambda : x \mapsto \lambda \cdot x$, знайдемо такий окіл $O_b \subseteq B$ точки b, що $\lambda \cdot O_b \subseteq U + \lambda b$. Розглянемо окіл $O_\lambda = V + \lambda \subseteq \mathbb{K}$ числа λ і зауважимо, що для довільної пари $(\lambda', x) \in O_\lambda \times O_b$

$$\lambda' \cdot x = (\lambda' - \lambda) \cdot x + \lambda \cdot x \in V \cdot B + \lambda \cdot O_b \subseteq U + U + \lambda b \subseteq O_{\lambda b},$$

звідки випливає потрібне нам включення $O_\lambda \cdot O_b \subseteq O_{\lambda b}$, яке завершує доведення неперервності множення $\mathbb{K} \times B \to X$. □

Із теореми 2.1 і твердження 3.1 випливає

Наслідок 3.2. *Для кожної компактної підмножини $B \subseteq X$ напівтопологічного векторного простору X відображення множення $\mathbb{K} \times B \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$, є неперервним.*

Нагадаємо [6, §3.3], що топологічний простір X називається *k-простором*, якщо підмножина $F \subseteq X$ є замкненою в X тоді і лише тоді, коли для кожної компактної підмножини $K \subseteq X$ перетин $K \cap F$ замкнений в K. Зрозуміло, що кожен метризовний простір є k-простором.

Тому наступна теорема дає позитивну відповідь на проблему 1.1.

Теорема 3.3. *Кожен напівтопологічний векторний k-простір X є топологічним векторним простором.*

Доведення. Теорема 3.3.27 [6] гарантує, що добуток $\mathbb{K} \times X$ локально компактного простору $\mathbb{K}$ і k-простору X є k-простором. Тому неперервність множення на скаляр $\mathbb{K} \times X \to X$ випливає з неперервності звужень цього відображення на компактні підмножини добутку $\mathbb{K} \times X$. У свою чергу, неперервність звужень випливає з наслідку 3.2. □

4. Борівські модифікації напівтопологічних векторних просторів

У цьому розділі ми опишемо загальний метод побудови напівтопологічних векторних просторів, які не є топологічними векторними просторами. Цей метод ґрунтується на понятті борівської модифікації топологічної групи.

Борівською модифікацією $G^\flat$ топологічної групи G називаємо групу G, наділену найменшою топологією, при якій усі неперервні гомоморфізми з G у компактні топологічні групи залишаються неперервними. Ця топологія породжується передбазою, що складається з прообразів $h^{-1}(U)$ відкритих підмножин U компактних гаусдорфових топологічних груп K при неперервних групових гомоморфізмах $h : G \to K$.

Топологічна група G називається *віддільною за Бором*, якщо її борівська модифікація $G^\flat$ гаусдорфова.

Зауважимо, що борівська модифікація $G^\flat$ довільної топологічної групи *цілком обмежена* у тому сенсі, що для довільної непорожної відкритої множини $U \subseteq G^\flat$ існує така скінченна множина $F \subseteq G$, що $F + U = G^\flat$.

Зауваження 4.1. З теореми Гана-Банаха випливає, що довільний локально опуклий топологічний векторний простір є віддільним за Бором. Простори ℓ_p – віддільні за Бором для усіх $p > 0$. З іншого боку, простори L_p не є віддільними за Бором при $0 < p < 1$.

Теорема 4.2. *Якщо X – нетривіальний віддільний за Бором напівтопологічний векторний простір, то його борівська модифікація $X^\flat$ є напівтопологічним векторним простором, який не є топологічним векторним простором.*

Доведення. Неперервність додавання $+ : X^\flat \times X^\flat \to X^\flat$ випливає з того факту, що $X^\flat$ вкладається в тихоновський добуток компактних топологічних груп і тому є топологічною групою. Залишилось перевірити нарізну неперервність множення $\mathbb{K} \times X^\flat \to X^\flat$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$. Для фіксованої точки $x \in X^\flat$ неперервність відображення $\mathbb{K} \to X^\flat$, $\lambda \mapsto \lambda \cdot x$, випливає з неперервності цього ж відображення у простір X та неперервності тотожного відображення $X \to X^\flat$. Для фіксованого числа $\lambda \in \mathbb{K}$ неперервність відображення $X^\flat \to X^\flat$, $x \mapsto \lambda \cdot x$, випливає з неперервності гомоморфізму $\bar{\lambda} : X \to X$, $\bar{\lambda} : x \mapsto \lambda \cdot x$, та означення топології $X^\flat$. Дійсно, для довільного неперервного гомоморфізму $h : X \to K$ в компактну гаусдорфову топологічну групу і довільної відкритої множини $U \subseteq K$, композиція $h \circ \bar{\lambda} : X \to K$ є неперервним гомоморфізмом і тому прообраз $(h \circ \bar{\lambda})^{-1}(U) = \bar{\lambda}^{-1}(h^{-1}(U))$ залишається відкритою множиною в $X^\flat$.

Тому $X^\flat$ є напівтопологічним векторним простором. Щоб побачити, що $X^\flat$ не є топологічним векторним простором, використаємо добре відомий факт [4, §I.2.2], який стверджує, що для довільної ненульової точки y топологічного векторного простору Y гомоморфізм $h_y : \mathbb{K} \to Y$, $h_y : \lambda \mapsto \lambda \cdot y$, є топологічним ізоморфізмом нормованого поля $\mathbb{K}$ на одновимірний тополоігчний векторний підпростір $\mathbb{K} \cdot y$. Зафіксуємо довільну ненульову точку $x \in X^\flat$ і розглянемо гомоморфізм $h_x : \mathbb{K} \to X^\flat$, $h_x : \lambda \mapsto \lambda \cdot x$. Оскільки $X^\flat$ є цілком обмеженою топологічною групою, підгрупа $h_x(\mathbb{K}) \subseteq X^\flat$ теж цілком обмежена і тому $h_x : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \cdot x$, не є топологічним ізоморфізмом. Як наслідок, $X^\flat$ не є топологічним векторним простором. □

Наслідок 4.3. *Борівська модифікація $\mathbb{R}^\flat$ прямої є напівтопологічним лінійним простором, який не є топологічним лінійним простором.*

ЛІТЕРАТУРА

1. С. Банах, *Курс функціонального аналізу*, Радянська школа, Київ, 1948.
2. В.К.Маслюченко, *Векторні простори з адитивною топологією і нарізно неперервним множенням на скаляр*, Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. **1**:4 (2011) 95–99.
3. A. Arhangel'skii, M. Tkachenko, *Topological groups and related structures*, Atlantis Press, Paris; World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008.
4. N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Hermann & Cie, Paris, 1955.
5. S. Mazur, W. Orlicz, *Über Folgen linearer operationen*, Studia Math. **4** (1933) 152–157.
6. R. Engelking, *General Topology*, PWN, Warsaw, 1977.
7. I. Namioka, *Separate continuity and joint continuity*, Pacific J. Math. **51** (1974) 515–531.

Надійшло 01.12.2016