Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2016. — Т.13

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2016. — V.13

ДО ПИТАННЯ ПРО ПОШАРОВО РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Галина Волошин, Володимир Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна

Г. Волошин, В. Маслюченко. *До питання про пошарово рівномірне наближення нарізно неперервних функцій* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Шевченка. — 2016. — Т.13. — С. 40–47.

Для кожної точки $x_0 \in (0,1)$ побудована така лінійно неперервна функція $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, що для кожного методу лінійної інтерполяції $f_n(x,y) = (L_{A_n} f_y)(x)$, у якого $x_0 \notin A$, послідовність $f_n^{x_0}$ прямує до f^{x_0} нерівномірно на $[0,1]$. Крім того, з'ясовано, що для $f_n(x,y) = (B_n f_y)(x)$, де B_n – оператори Бернштейна, і обмеженої нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ завжди $f_n^{x_0} \rightrightarrows f^{x_0}$ на $[0,1]$, як тільки $\{x_0\} \times [0,1] \subseteq C(f)$.

V. Maslyuchenko, H. Voloshyn, *On the layer-wise uniform approximation of separately continuous functions*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **13** (2016) 40–47.

For each point $x_0 \in (0,1)$ we construct a linearly continuous function $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ such that for each method of linear interpolation $f_n(x,y) = (L_{A_n} f_y)(x)$ in which $x_0 \notin A$, the sequence $f_n^{x_0}$ tends to f^{x_0} not uniformly on $[0,1]$. Also, we prove that for $f_n(x,y) = (B_n f_y)(x)$, where B_n are Bernstein operators, and for any bounded separately continuous function $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ with $\{x_0\} \times [0,1] \subseteq C(f)$ we get $f_n^{x_0} \rightrightarrows f^{x_0}$ on $[0,1]$.

1. Вступ

В серії праць [1]–[5] досліджувалося питання: для яких нарізно неперервних функцій $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ існує така послідовність сукупно неперервних функцій $f_n\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, що пошарово рівномірно збігається до f, тобто $f_n^x = f_n(x,\cdot) \rightrightarrows f^x = f(x,\cdot)$ на Y для кожного $x \in X$ і $f_{n,y} = f_n(\cdot,y) \rightrightarrows f_y = f(\cdot,y)$ на X для кожного $y \in Y$. Там були отримані різні достатні умови для цього, але довший час залишалося нерозв'язаним поставлене в [6] питання: *чи для кожної нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ існує послідовність сукупно неперервних функцій $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, яка пошарово рівномірно збігається до f*?

2010 *Mathematics Subject Classification:* 26B05, 41A10 *УДК:* 517.51

Ключові слова та фрази: separately continuous function, layer-wise uniform convergence, linear interpolation, Bernstein polynomials.

E-mail: galja.vlshin@gmail.com, vmaslyuchenko@gmail.com

Недавно О. Карлова і В. Михайлюк [7] отримали позитивну відповідь на це питання, застосувавши метод Рудіна [8], що використовує відповідні розбиття одиниці. У працях [1], [2], [4] застосовувався метод лінійної інтерполяції, який давав явну побудову апроксимуючих послідовностей. У найпростішому варіанті для даної всюди щільної на інтервалі $(0,1)$ зліченної множини $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, що складається з різних точок a_n, кожній функції $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ співставляється послідовність функцій $g_n = L_{A_n} g : [0,1] \to \mathbb{R}$, графіками яких є ламані з вершинами у точках $(0, g(0))$, $(a_1, g(a_1))$, $\ldots$ $(a_n, g(a_n)$ і $(1, g(1))$. Тоді для неперервної функції $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ми будемо мати, що $g_n = L_{A_n} g \rightrightarrows g$ на $[0,1]$, а для нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ будується послідовність сукупно неперервних функцій $f_n(x,y) = (L_{A_n} f_y)(x)$ для якої $f_{n,y} \rightrightarrows f_y$ на $[0,1]$ для кожного $y \in [0,1]$, і вказувалися умови, для яких і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $[0,1]$ для кожного $x \in [0,1]$.

Виникло природне питання: *чи існує така всюди щільна в* $(0,1)$ *зліченна множина A, що для кожної нарізно неперервної функції* $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ *послідовність сукупно неперервних функцій* $f_n(x,y) = (L_{A_n} f_y)(x)$ *буде пошарово рівномірно збігатися до* f? Тут ми показуємо, що відповідь на поставлене питання негативна (теорема 1), причому контрприкладом служить навіть лінійно неперервна функція. Таким чином, універсального методу лінійної інтерполяції, який би обслуговував усі нарізно неперервні функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ для побудови їх пошарово рівномірно апроксимуючих послідовностей, не існує. Але можна задати і таке питання: чи можна для кожної нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ вказати свою зліченну всюди щільну в $(0,1)$ множину A, для якої послідовність функцій $f_n(x,y) = (L_{A_n} f_y)(x)$ пошарово рівномірно збігається до f? Відповіді на це питання поки що не знайдено.

Далі, існують багато конструктивних методів рівномірного наближення неперервних на відрізку функцій різними агрегатами. Найелегантніший з них належить С.Н. Бернштейну, який ще в 1912 році встановив, що для кожної неперервної функції $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ послідовність многочленів Бернштейна

$$B_n g(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g\big(\tfrac{k}{n}\big) x^k (1-x)^{n-k}$$

рівномірно на $[0,1]$ прямує до g. Ці многочлени з успіхом застосовувалися в [9] і для наближення нарізно неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ сукупно неперервними CP-функціями $f_n(x,y) = (B_n f^x)(y)$, що дало змогу отримати просте доведення теореми Бера про проекцію для нарізно неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$. Там здійснювалася пошарово рівномірна апроксимація лише відносно однієї змінної.

Виявляється, що цей метод дає пошарово рівномірну апроксимацію для обмежених нарізно неперервних функцій і відносно іншої змінної і це є другим результатом (теорема 2) даної публікації. Доведені у цій статті теореми були анонсовані в тезах [10], [11].

2. Недостатність методу лінійної інтерполяції для пошарово рівномірного наближення нарізно неперервних функцій

Для топологічних просторів X, Y, Z через $CC(X \times Y, Z)$ позначається сукупність усіх нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$; при цьому $CC(X \times Y) = CC(X \times Y, \mathbb{R})$.

Символом $C(f)$ позначається множина точок неперервності функції f, а через $D(f)$ – множина її точок розриву.

Далі, символом $\|g\|$ ми позначаємо рівномірну норму $\|g\| = \max\limits_{0 \le y \le 1} |g(y)|$ неперервної функції $g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Нехай $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ – підмножина інтервалу $(0,1)$, причому $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} = 1$. Для функції $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ визначимо функцію $h = L_A g : [0,1] \to \mathbb{R}$, покладаючи

$$h(x) = g(a_k) + \frac{g(a_{k+1}) - g(a_k)}{a_{k+1} - a_k}(x - a_k)$$

на $[a_k, a_{k+1}]$ при $k = 0, 1, \dots, n$. Таким чином коректно визначена функція h, у якої $h(a_k) = g(a_k)$ при $k = 0, 1, \dots, n$.

Функція $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ називається *лінійно неперервною*, якщо вона має неперервне звуження на довільний пряполінійний відрізок в $[0,1]^2$.

Теорема 1. *Нехай x_0 – довільна точка з інтервалу $(0,1)$. Тоді існує така лінійно неперервна функція $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, що для довільної зліченної всюди щільної підмножини $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ інтервалу $(0,1)$, де $a_n \neq a_m$ при $n \neq m$, такої, що $x_0 \notin A$, послідовність вертикальних x_0-розрізів $f_n^{x_0} : [0,1] \to \mathbb{R}$ функцій $f_n(x,y) = (L_{A_n} f_y)(x)$, де $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$, прямує до вертикального x_0-розрізу $f^{x_0} : [0,1] \to \mathbb{R}$ функції f не рівномірно на $[0,1]$.*

Доведення. Позначимо: $Q = [0,1]^2$, $Q^- = [0, x_0] \times [0,1]$ і $Q^+ = [x_0, 1] \times [0,1]$. Розглянемо функції

$$\alpha_1(x) = 1 - \frac{(x - x_0)^2}{2x_0^2}, \quad \alpha_2(x) = 1 - \frac{(x - x_0)^2}{4x_0^2},$$
$$\beta_1(x) = \frac{(x - x_0)^2}{4(1 - x_0)^2} \quad \text{і} \quad \beta_2(x) = 2\beta_1(x).$$

Введемо для чисел $0 < a < b < 1$ дві ламані

$$l_{a,b}(y) = \begin{cases} 0, & 0 \le y \le a \\ \frac{y-a}{b-a}, & a \le y \le b \\ \frac{1-y}{1-b}, & b \le y \le 1 \end{cases} \quad \text{і} \quad m_{a,b}(y) = \begin{cases} \frac{y}{a}, & 0 \le y \le a \\ \frac{b-y}{b-a}, & a \le y \le b \\ 0, & b \le y \le 1 \end{cases}$$

і покладемо

$$f(x,y) = \begin{cases} l_{\alpha_1(x), \alpha_2(x)}(y), & 0 \le x < x_0,\ 0 \le y \le 1, \\ 0, & x = x_0,\ 0 \le y \le 1, \\ m_{\beta_1(x), \beta_2(x)}(y), & x_0 < x \le 1,\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

Зауважимо, що $0 < \alpha_1(x) < \alpha_2(x) < 1$ при $0 \le x < x_0$ і $0 < \beta_1(x) < \beta_2(x) < 1$ при $x_0 < x \le 1$, отже, означення функції f коректне. Покажемо, що ця функція і є шуканою.

Розглянемо звуження $g = f|_{Q^-}$ і $h = f|_{Q^+}$ та точки $p_0 = (x_0, 1)$ і $q_0 = (x_0, 0)$. Доведемо, що $g \in CC(Q^-)$ і $D(g) = \{p_0\}$, а $h \in CC(Q^+)$ і $D(h) = \{q_0\}$, при цьому $g(x_0, y) = 0 = h(x_0, y)$ для кожного y з $[0, 1]$.

Введемо множини $G = Q^- \setminus \{p_0\}$ і $H = Q^+ \setminus \{q_0\}$, які відкриті у прямокутниках Q^- і Q^+ відповідно, та їх частини

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x,y) \in G : 0 \le y \le \alpha_1(x)\}, & E_1 &= \{(x,y) \in H : 0 \le y \le \beta_1(x)\}, \\ F_2 &= \{(x,y) \in G : \alpha_1(x) \le y \le \alpha_2(x)\}, & E_2 &= \{(x,y) \in H : \beta_1(x) \le y \le \beta_2(x)\}, \\ F_3 &= \{(x,y) \in G : \alpha_2(x) \le y \le 1\}, & E_3 &= \{(x,y) \in H : \beta_2(x) \le y \le 1\}. \end{aligned}$$

Множини F_s і E_s замкнені в множинах G і H відповідно, що негайно випливає з неперервності функцій $\alpha_i(x)$ та $\beta_i(x)$, при цьому

$$G = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \quad \text{і} \quad H = E_1 \cup E_2 \cup E_3.$$

З означення функцій g і h випливає, що

$$g(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{на } F_1; \\ \frac{y-\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)-\alpha_1(x)}, & \text{на } F_2; \\ \frac{1-y}{1-\alpha_2(x)}, & \text{на } F_3; \end{cases} \quad \text{і} \quad h(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{\beta_1(x)}, & \text{на } E_1; \\ \frac{\beta_2(x)-y}{\beta_2(x)-\beta_1(x)}, & \text{на } E_2; \\ 0, & \text{на } E_3. \end{cases}$$

Ми бачимо, що звуження $g|_{F_s}$ і $h|_{E_s}$ при $s = 1, 2, 3$ – це неперервні функції, звідки отримується неперервність звужень $g|_G$ і $h|_H$.

Розглянемо тепер відкриту в квадраті Q множину $W = Q \setminus \{p_0, q_0\}$. Множини $G \setminus \{q_0\}$ і $H \setminus \{p_0\}$ замкнені в W і звуження $f|_{G \setminus \{q_0\}} = g|_{G \setminus \{q_0\}}$ та $f|_{H \setminus \{p_0\}} = h|_{H \setminus \{p_0\}}$ неперервні, адже неперервними є звуження $g|_G$ і $h|_H$. Тому і звуження $f|_W$ неперервне. З відкритості множини W в Q отримуємо, що f неперервна, а значить, і нарізно неперервна у кожній точці множини W. Далі за побудовою

$$f(x,0) = f(x,1) = 0 \quad \text{на} \quad [0,1] \quad \text{і} \quad f(x_0, y) = 0 \quad \text{на} \quad [0,1],$$

що показує неперервність функцій f_0, f_1 і f^{x_0} у всіх точках, зокрема, у точках x_0 для функцій f_0 і f_1 та точках 0 і 1 для функції f^{x_0}. Таким чином, нарізна неперервність функції f доведена, крім того, встановлено, що $W \subseteq C(f)$.

Доведемо, що в точках p_0 і q_0 функція f буде навіть лінійно неперервною. Розглянемо довільну пряму $y = 1 + k(x - x_0)$ з додатним кутовим коефіцієнтом k, що проходить через точку $p_0 = (x_0, 1)$. Ця пряма перетинається з параболою $y = \alpha_1(x)$ рівно в двох точках: p_0 і $p_1 = (x_1, y_1)$, де $x_1 < x_0$. Якщо $0 < k \le \frac{1}{2x_0}$, то $0 \le x_1 < x_0$, а коли $k > \frac{1}{2x_0}$, то $x_1 < 0$. Нехай $x_* = \max\{x_1, 0\}$. Зрозуміло, що $0 \le x_* < x_0$ і при $x_* \le x \le x_0$ за побудовою $f(x, 1 + k(x - x_0)) = 0$, адже графік параболи $y = \alpha_1(x)$ як вгнутої функції проходить вище прямої $y = 1 + k(x - x_0)$ над відрізком $[x_*, x_0]$. Тому звуження функції f на дану пряму є неперервним у точці p_0. Випадок $k < 0$ очевидний, бо звуження $f|_{Q^+}$ неперервне в точці p_0. Так само розбирається випадок точки q_0.

Доведемо, що функція f розривна в точках p_0 і q_0. Справді, $f(p_0)=f(q_0)=0$, при цьому

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x,\alpha_2(x)) = \lim_{x\to x_0-0} g(x,\alpha_2(x)) = \lim_{x\to x_0-0} 1 = 1$$

і

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x,\beta_1(x)) = \lim_{x\to x_0+0} h(x,\beta_1(x)) = \lim_{x\to x_0+0} 1 = 1,$$

а $\lim\limits_{x\to x_0-0} \alpha_2(x) = 1$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0} \beta_1(x) = 0$, отже, $(x,\alpha_2(x)) \to p_0$ при $x \to x_0 - 0$, а $(x,\beta_1(x)) \to q_0$ при $x \to x_0 + 0$. Це доводить, що $\{p_0, q_0\} \subseteq D(f)$.

Залишилося пояснити, що $f_n^{x_0} \not\rightrightarrows f^{x_0}$ на $[0,1]$. Це негайно буде випливати з того, що $\|f_n^{x_0} - f^{x_0}\| \geq \frac{1}{2}$ для кожного n. Щоб це з'ясувати, зафіксуємо номер n і виберемо з множини $\widetilde{A}_n = A_n \cup \{0,1\}$ точку a, яка найближча до точки x_0 зліва, і точку b, яка найближча до точки x_0 справа. При цьому $a < x_0 < b$, на відрізку $[a,b]$ функції $(f_n)_y$ лінійні при $0 \leq y \leq 1$ і $f_n^a = f^a$, а $f_n^b = f^b$. Розглянемо точки $c = \alpha_2(a)$ і $d = \beta_1(b)$. За побудовою, $0 < d \leq \frac{1}{2} \leq c < 1$, $f^a(d) = 0$, $f^b(d) = 1$, $f^a(c) = 1$ і $f^b(c) = 0$. Оскільки функції $(f_n)_c$ і $(f_n)_d$ лінійні на $[a,b]$, то $f_n(x,d) = \frac{a-x}{a-b}$ і $f_n(x,c) = \frac{b-x}{b-a}$ на $[a,b]$. Але $a < x_0 < b$, отже, виконується одна з нерівностей $x_0 - a \leq b - x_0$ або $x_0 - a \geq b - x_0$. У першому випадку $b - x_0 \geq \frac{1}{2}(b-a)$, а в другому – $x_0 - a \geq \frac{1}{2}(b-a)$, а значить,

$$f_n(x_0,c) = \frac{b-x_0}{b-a} \geq \frac{1}{2}$$

у першому випадку і

$$f_n(x_0,d) = \frac{a-x_0}{a-b} = \frac{x_0-a}{b-a} \geq \frac{1}{2}$$

у другому випадку. Таким чином, $\|f_n^{x_0} - f^{x_0}\| \geq \max\{f_n^{x_0}(c), f_n^{x_0}(d)\} \geq \frac{1}{2}$, що і треба було довести. □

3. Застосування многочленів Бернштейна для пошарово рівномірної апроксимації нарізно неперервних функцій

Якщо X, Y і Z – топологічні простори і $f : X \times Y \to Z$ – відображення, то

$$C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\},$$

тут $C(f)$ – множина точок сукупної неперервності відображення f. Символом $C_u[0,1]$ ми позначаємо банахів простір всіх неперервних функцій $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ з рівномірною нормою $\|g\| = \max\limits_{0\leq y\leq 1} |g(y)|$.

В наступній теоремі ми використовуємо оператори Бернштейна B_n, що визначені у вступі. Щоб зберегти аналогію з методом лінійної інтерполяції будемо застосовувати їх відносно першої змінної, а не другої як в [9].

Ми будемо використовувати відому тотожність [12, с.100]

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x),$$

з якої випливає, що

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{n}{4}$$

при всіх $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 2. *Нехай $X = Y = [0,1]$, $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція і $f_n(x,y) = (B_n f_y)(x)$ при $(x,y) \in [0,1]^2$. Тоді $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ – це сукупно неперервні функції, для яких $f_{n,y} = (f_n)_y \rightrightarrows f_y$ на $[0,1]$ при $n \to \infty$. Якщо до того ж функція f обмежена, то і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $[0,1]$ для кожного $x \in C_Y(f)$ при $n \to \infty$.*

Доведення. Рівномірна збіжність $f_{n,y} \rightrightarrows f_y$ на $[0,1]$ для кожного $y \in [0,1]$ випливає з теореми Бернштейна.

Нехай $x_0 \in C_Y(f)$. Доведемо, що $f_n^{x_0} \rightrightarrows f^{x_0}$ на $[0,1]$ при $n \to \infty$. Оскільки функція f обмежена, то існує таке число $\gamma > 0$, що $|f(x,y)| \leq \gamma$ для всіх $(x,y) \in [0,1]^2$. Нехай $\varphi : [0,1] \to C_u[0,1]$, $\varphi(x) = f^x$, – асоційоване з f відображення. Як відомо, $C_Y(f) = C(\varphi)$, тому $x_0 \in C(\varphi)$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. На основі неперервності відображення $\varphi : [0,1] \to C_u[0,1]$ в точці x_0 отримуємо, що існує таке $\delta > 0$, що для всіх $x \in [0,1]$ з нерівності $|x - x_0| \leq \delta$ випливає, що $\|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Маємо для довільних $y \in [0,1]$ і $n \in \mathbb{N}$, що

$$f_n^{x_0}(y) - f^{x_0}(y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(\tfrac{k}{n}, y) x_0^k (1-x_0)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(x_0, y) x_0^k (1-x_0)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (f(\tfrac{k}{n}, y) - f(x_0, y)) x_0^k (1-x_0)^{n-k}.$$

Тоді $|f_n^{x_0}(y) - f^{x_0}(y)| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k |f(\frac{k}{n}, y) - f(x_0, y)| x_0^k (1-x_0)^{n-k}$.

Розглянемо дві суми

$$\Sigma_1 = \sum_{|\frac{k}{n} - x_0| < \delta} C_n^k |f(\frac{k}{n}, y) - f(x_0, y)| x_0^k (1-x_0)^{n-k}$$

і

$$\Sigma_2 = \sum_{|\frac{k}{n} - x_0| \geq \delta} C_n^k |f(\frac{k}{n}, y) - f(x_0, y)| x_0^k (1-x_0)^{n-k}.$$

Оскільки $|f(\frac{k}{n}, y) - f(x_0, y)| \leq \|\varphi(\frac{k}{n}) - \varphi(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, якщо $|\frac{k}{n} - x_0| < \delta$, то

$$\Sigma_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{|\frac{k}{n}-x_0|<\delta} C_n^k x_0^k (1-x_0)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x_0^k (1-x_0)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

З другого боку

$$\Sigma_2 \leq \sum_{|\frac{k}{n}-x_0|\geq\delta} C_n^k (|f(\tfrac{k}{n}, y)| + |f(x_0, y)|) x_0^k (1-x_0)^{n-k} \leq$$

$$\leq 2\gamma \sum_{|\frac{k}{n}-x_0|\geq\delta} \frac{(k-nx_0)^2}{n^2\delta^2} C_n^k x_0^k (1-x_0)^{n-k} \leq$$

$$\leq \frac{2\gamma}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^{n} (k-nx_0)^2 C_n^k x_0^k (1-x_0)^{n-k} \leq \frac{2\gamma}{n^2\delta^2} \cdot \frac{n}{4} = \frac{\gamma}{2\delta^2 n}.$$

Оскільки $\frac{\gamma}{2\delta^2 n} \to 0$ при $n \to \infty$, то існує такий номер N, що при $n \geq N$ виконується нерівність $\frac{\gamma}{2\delta^2 n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. В такому разі

$$|f_n^{x_0}(y) - f^{x_0}(y)| \leq \Sigma_1 + \Sigma_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при $n \geq N$ для всіх $y \in [0,1]$ одночасно. Це і означає, що $f_n^{x_0} \rightrightarrows f^{x_0}$ на $[0,1]$ при $n \to \infty$. $\square$

Зауважимо, що доведення цієї теореми легко перенести на загальніший випадок, коли розглядаються нарізно неперервні функції $f : [0,1] \times Y \to \mathbb{R}$, де Y – довільний компактний простір.

4. Прикінцеве зауваження

Рецензент вказав простий приклад нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, яка задовольняє вимоги теореми 1. Вона є простою модифікацією відомої функції Шварца і задається формулою

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x-x_0|y}{(x-x_0)^2+y^2}, & (x, y) \in Q \setminus \{q_0\}, \\ 0, & (x, y) = q_0 = (x_0, 0). \end{cases}$$

Для пояснення спочатку зауважимо, що для довільних невід'ємних функцій $g, h \in C[0,1]$ і невід'ємних чисел α, β маємо

$$\|\alpha g + \beta h\| \geq \max\{\alpha\|g\|, \beta\|h\|\} \geq \max\{\alpha, \beta\} \cdot \min\{\|g\|, \|h\|\} \geq \tfrac{\alpha+\beta}{2} \min\{\|g\|, \|h\|\}.$$

Легко бачити, що $\|f^x\| = \frac{1}{2}$ при $x \neq x_0$ і $\|f^{x_0}\| = 0$. Оскільки

$$f_n^{x_0} = \alpha f^a + (1-\alpha) f^b$$

для деяких $a \in A_n \cap [0, x_0)$, $b \in A_n \cap (x_0, 1]$ і $\alpha \in (0,1)$, то

$$\|f_n^{x_0}\| \geq \frac{1}{2} \min\{\|f^a\|, \|f^b\|\} = \frac{1}{4}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, О.В. Маслюченко, *Про пошарово рівномірне наближення нарізно неперервних функцій многочленами*, Мат. вісн. НТШ, **10** (2013) 135–158.
2. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, *Про лінійну інтерполяцю векторнозначних функцій та її застосування*, Мат. студії, **42**:2 (2014) 129–133.
3. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, *Секвенціальне замикання простору сукупно неперервних функцій у просторі нарізно неперервних функцій*, Укр. мат. журн., **68**:2 (2016) 156–161.
4. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, *Про лінійну інтерполяцію векторнозначних функцій, яка зберігає звуження*, Прикарпат. вісн. НТШ, "Число", **1(29)** (2015) 11–21.
5. Т. Банах, *Про секвенціальне замикання множини неперервних функцій у просторі нарізно неперервних функцій*, Бук. мат. журн., **3**:3-4 (2015) 27–32.
6. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, *Про секвенціальне замикання поліномів у просторі нарізно неперервних функцій*, Всеукраїнська наукова конференція "Алгебра, топологія, аналіз. стохастика" (20–23 вересня 2012), Івано-Франківськ, (2012) 3–5.
7. O. Karlova, V. Mykhaylyuk, *Baire classification of fragmented maps and approximation of separately continuous functions*, European J. Math. (to appear).
8. У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, Москва, (1975) 444с.
9. Г. Власюк, В.К. Маслюченко, *Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції*, Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 336-337. Математика, Рута, Чернівці, (2007) 52–59.
10. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, *Пошарово рівномірні границі послідовностей сукупно неперервних функцій*, Всеукр. наук. конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірності та математичного аналізу" (24–27 лютого 2016), Івано-Франківськ. Прик.нац.ун-т, (2016) 14–16.
11. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, *Многочлени Бернштейна і наближення нарізно неперервних функцій*, Міжнар. наук.-прак. конф. "Математика. Інформаційні технології. Освіта" (5–7 червня 2016), Луцьк - Світязь, (2016) 17–19.
12. Г.М. Фихтенгольц, *Основы математического анализа*, Т.2, Лань, Санкт-Петербург – Москва – Краснодар, (2005) 464с.

Надійшло 30.07.2016

Після переробки 09.10.2016