



ФРАКТАЛИ НА ПЛОЩИНІ ЛОБАЧЕВСЬКОГО

МАКСИМ ПИЛИПОВИЧ, МАРКІЯН СІМКІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

М. Пилипович, М. Сіmkів. *Фрактали на площині Лобачевського* // Мат. вісник НТШ, **14** (2017) 36–51.

Розглянуто детерміністичні фрактали на дисковій моделі площини Лобачевського і показано, що форма та властивості таких фракталів суттєво залежать від їхніх розмірів.

М. Pylypovych, M. Simkiv, *Fractals on Lobachevski plane*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **14** (2017), 36–51.

We consider deterministic fractals on the Poincaré disk model of Lobachevski plane and show that the form and properties of such fractals depend on their size.

1. Вступ

Термін *фрактал* був введений у 70-х роках ХХ-го століття Бенуа Мандельбротом [4], проте приклади об'єктів, які тепер називають фракталами, були відомі задовго до того.

Чим особливі ці об'єкти? Для всіх них, як і для інших фракталів, характерні наступні ознаки:

- ці множини визначаються рекурентними залежностями;
- мають риси самоподібності;
- мають дробовий фрактальний вимір.

Це не є строгим означенням фрактала, а лише описом характерних властивостей фракталів. Строге означення дав Хатчінсон [3], який впровадив поняття

2010 *Mathematics Subject Classification*: 28A80, 51M10, 53A35

УДК: 515.12

Ключові слова та фрази: детерміністичний фрактал, площина Лобачевського, дискова модель Пуанкаре

E-mail: pylypovych@gmail.com, simkiv.markiyan@gmail.com

детерміністичного фрактала. Для опису фракталів будемо використовувати *систему ітерованих відображень* (IFS), під чим розуміємо будь-яку скінченну сім'ю $\{w_1, \dots, w_k\}$ стискуючих відображень на повному метричному просторі X . Коефіцієнтом стиску такої системи назовемо число $\lambda = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} < 1$, де $\lambda_i = \text{Lip}(w_i)$ – коефіцієнт стиску відображення w_i .

Через $\mathcal{K}(X)$ позначимо сім'ю усіх непорожніх компактних підмножин простору X . Хатчінсон зауважив, що система стискуючих відображень $\{w_1, \dots, w_k\}$ на метричному просторі (X, d) породжує стискуюче відображення $W : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$, $W : K \rightarrow \bigcup_{i=1}^k w_i(K)$, на гіперпросторі $\mathcal{K}(X)$ його компактних підмножин. За теоремою Банаха, стискуюче відображення W має єдину нерухому точку $K \in \mathcal{K}(X)$, яка називається *детерміністичним фракталом* системи $\{w_1, \dots, w_k\}$.

Типовими прикладами детерміністичних фракталів є множина Кантора, трикутник і килим Серпінського, Менгерівський куб. Усі вони породжені системами гомотетій на \mathbb{R}^n , де гомотетією називаємо бієктивне відображення $h_{c,\lambda} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ виду $h_{c,\lambda}(x) = c + \lambda(x - c)$, де $\lambda \in (0, 1)$ – коефіцієнт гомотетії.

На площині Лобачевського означення гомотетії дещо інше. *Гомотетією* з центром $c \in \mathbb{H}$ та коефіцієнтом стиску λ називається бієктивне відображення $h_{c,\lambda} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, яке точці $x \in \mathbb{H}$ ставить у відповідність єдину точку y на промені cx таку, що $d_{\mathbb{H}}(c, y) = \lambda \cdot d_{\mathbb{H}}(c, x)$, де $d_{\mathbb{H}}$ позначає метрику на гіперболічній площині.

Як ми покажемо у теоремі 3.5, кожна гомотетія $h_{c,\lambda}$ гіперболічної площини \mathbb{H} з коефіцієнтом стиску $\lambda < 1$ є стискуючим відображенням зі сталою Ліпшиця $\text{Lip}(h_{c,\lambda}) = \lambda$. Тому довільна система $\{w_1, \dots, w_k\}$ стискуючих гомотетій гіперболічної площини породжує детерміністичний фрактал. Приклади таких фракталів представлено в розділі 4.

Дещо неочікувано виявилось, що форма фрактала на площині Лобачевського суттєво залежить від його розміру, чого не спостерігається на евклідовій площині.

2. Детерміністичні фрактали

У цьому розділі ми нагадаємо основні положення теорії детерміністичних фракталів [1], [2].

Означення 2.1. Відображення $f : X \rightarrow X$ метричного простору (X, d) називається *стискуючим*, якщо існує така константа $0 < \lambda < 1$, що

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda \cdot d(x_1, x_2)$$

для будь-яких $x_1, x_2 \in X$. При цьому, константа $\lambda = \text{Lip}(f) < 1$ називається

коефіцієнтом стиску відображення f , де

$$\text{Lip}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)}$$

є сталою Ліпшиця відображення f .

Нагадаємо формулювання теореми Банаха про нерухому точку. Точка $x \in X$ називається *нерухомою точкою* відображення $f : X \rightarrow X$, якщо $f(x) = x$.

Теорема 2.2 (Банаха про нерухому точку). *У повному метричному просторі (X, d) будь-яке стискує відображення $f : X \rightarrow X$ має нерухому точку $x_\infty \in X$, яка є границею послідовності $\{x_0, x_1, \dots\}$, де x_0 – будь-яка точка з X і $x_{n+1} = f(x_n)$ для $n \geq 0$. При цьому для будь якого $n \in \mathbb{N}$ справджується оцінка*

$$d(x_n, x_\infty) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_0, x_1),$$

де $\lambda < 1$ – коефіцієнт стиску відображення f .

Означимо тепер метричний простір, точками якого є детерміністичні фрактали.

Нехай (X, d) – повний метричний простір. Позначимо через $\mathcal{K}(X)$ множину всіх непорожніх компактних підмножин простору X . Зауважимо, що $A \cup B \in \mathcal{K}(X)$ для будь-яких $A, B \in \mathcal{K}(X)$. Означимо тепер метрику на просторі $\mathcal{K}(X)$.

Означення 2.3. Нехай $A, B \in \mathcal{K}(X)$ – дві компактні підмножини X . *Відстанню Хаусдорфа між множинами A та B називається величина*

$$d_H(A, B) = \max\{\max_{a \in A} \min_{b \in B} d(a, b), \max_{b \in B} \min_{a \in A} d(a, b)\}.$$

Відстань Гаусдорфа задовільняє всі аксіоми метрики, а саме:

- a) $d_H(A, B) = 0$ тоді і лише тоді, коли $A = B$;
- b) $d_H(A, B) = d_H(B, A)$;
- c) $d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C)$.

Простір $\mathcal{K}(X)$ з метрикою Гаусдорфа називається *гіперпростором*, або простором фракталів. Відомо [1, §II.6], що цей простір повний, тобто кожна фундаментальна послідовність в $\mathcal{K}(X)$ збіжна.

Означення 2.4. *Системою ітерованих відображень (IFS) на метричному просторі (X, d) називаємо будь-яку скінченну сім'ю $\{w_1, \dots, w_k\}$ стискуючих відображень на X . Коефіцієнтом стиску такої системи назвемо число*

$$\lambda = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\},$$

де λ_i – коефіцієнт стиску відображення w_i .

Маючи IFS $\{w_1, \dots, w_k\}$ на повному метричному просторі (X, d) , означимо операцію $W : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$, що діє у гіперпросторі $\mathcal{K}(X)$:

$$W(A) = w_1(A) \cup \dots \cup w_k(A) \text{ для } A \in \mathcal{K}(X).$$

Визначене таким чином відображення $W : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ є стискующим з коефіцієнтом стиску $\lambda = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Застосовуючи теорему Банаха про нерухому точку, одержимо, що відображення W має єдину нерухому точку $A_\infty \in \mathcal{K}(X)$, яку можна отримати як границю послідовності $(A_n)_{n=0}^\infty$, де $A_0 \in \mathcal{K}(X)$ – довільний компакт і $A_{n+1} = W(A_n)$. При цьому для цієї послідовності справедлива оцінка $d_H(A_n, A_\infty) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d_H(A_0, A_1)$, $n \in \mathbb{N}$, яка дозволяє намалювати фрактал з довільною, наперед заданою, точністю.

Точніше, для того, щоб згенерувати зображення фрактала, достатньо зупинитися на n -ій ітерації і намалювати компакт A_n . Число n вибрати таким, щоб величина $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} h(A_0, A_1)$ була менша за розмір одного пікселя зображення.

Наївний алгоритм, який являє собою безпосередню реалізацію IFS має велику складність і витрати пам'яті, а саме $O(k^n)$. Але оцінку складності і витрат пам'яті можна легко покращити, використавши ймовірнісний алгоритм.

Ймовірнісний алгоритм генерації зображень фракталів

Нехай $\{w_1, \dots, w_k\}$ – система стискуючих відображень на повному метричному просторі (X, d) . Кожному відображенню w_i поставимо у відповідність додатне число (ймовірність) $p_i \in (0, 1]$ так, щоб $p_1 + \dots + p_k = 1$. Одержану систему запишемо у вигляді

$$\{X, w_1, \dots, w_k; p_1, \dots, p_k\}.$$

Нехай z_0 – будь-яка точка X . Випадковим чином вибираємо число $i_1 \in \{1, \dots, k\}$ і розглядаємо точку $z_1 := w_{i_1}(z_0)$. Продовжуючи далі, побудуємо (випадкову) послідовність чисел i_1, i_2, i_3, \dots від 1 до k і послідовність точок z_0, z_1, \dots , де кожна наступна точка z_n є образом z_{n-1} при відображенні w_{i_n} , де i_n – випадково вибране число від 1 до k , причому ймовірність вибору числа j рівна p_j .

Якщо перша точка z_0 належала до атрактора A_∞ ітерованої системи функцій $\{X, w_1, \dots, w_k\}$, тоді точки послідовності $\{z_n\}$ випадковим чином блукають по атрактору (оскільки $w_k(A_\infty) \subset A_\infty = w_1(A) \cup \dots \cup w_k(A)$). Якщо z_0 не належить атрактору A_∞ , то достатньо пропустити деяку кількість членів послідовності $\{z_i\}$, щоб решта належали як завгодно малому наперед заданому околу множини A_∞ .

Послідовність $\{z_0, z_1, \dots\}$ не має границі: точки z_n , випадково блукаючи, заповнюють весь атрактор з імовірністю 1. Це впливає із наступного твердження, доведення якого можна знайти в [1, Ch.IX].

Теорема 2.5. Для будь-яких $p < 1$ та $\varepsilon > 0$ існує такий номер N , що з ймовірністю $> p$ для будь-якої точки $z \in A_\infty$ знайдеться елемент послідовності $(z_n)_{n=0}^N$, ε -близький до z .

3. Дискава модель Пуанкаре геометрії Лобачевського

У цьому розділі ми нагадаємо деякі відомі факти [5] неевклідової геометрії. Вони будуть нам потрібні при обґрунтуванні алгоритмів малювання фракталів на площині Лобачевського.

Добре відомо, що свій класичний виклад геометрії Евклід починає з 5-ти постулатів:

- Довільні дві точки площини можна з'єднати прямолінійним відрізком.
- Прямолінійні відрізки можна необмежено продовжувати в обидва боки.
- Навколо довільної точки можна описати коло довільного радіуса.
- Усі прямі кути рівні між собою.
- Якщо пряма, що перетинає дві прямі, утворює внутрішні односторонні кути, сума яких менша за два прямих кути, то ці дві прямі, продовжені необмежено, зустрінуться з тієї сторони, де кути менші за два прямі.

Як показав шотландський математик Джон Плейфер, остання аксіома еквівалентна твердженню:

У площині через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести одну і лише одну пряму, паралельну даній.

Якщо замінити цю аксіому на її заперечення (одне з двох можливих), отримаємо гіперболічну та еліптичну геометрії. Гіперболічну геометрію також називають геометрією Лобачевського. Ця геометрія базується на перших чотирьох аксіомах Евкліда і аксіомі Лобачевського:

У площині через точку, що не лежить на даній прямій, проходять щонайменше дві прямі, які не перетинають її.

Творці гіперболічної геометрії (Лобачевський, Бояї і Гаус) були переконані в її несуперечності. Формальне доведення несуперечності було дано Еудженіо Бельтрамі (1868) за допомогою моделі, відомої сьогодні як дискава модель Пуанкаре.

У цій моделі неозначувані поняття геометрії (“точки”, “прямі”, “конгруентності”) мають конкретні інтерпретації.

- “Точки” – точки одиничного диска $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;
- “Прямі” – діаметри \mathbb{D} і дуги кіл, перпендикулярних до межі $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ диска \mathbb{D} ;
- “Кут між прямими” визначається як звичайний евклідовий кут між двома колами або діаметрами;
- “Конгруентність” визначається за допомогою перетворень Мебіуса і є композиціями інверсій.

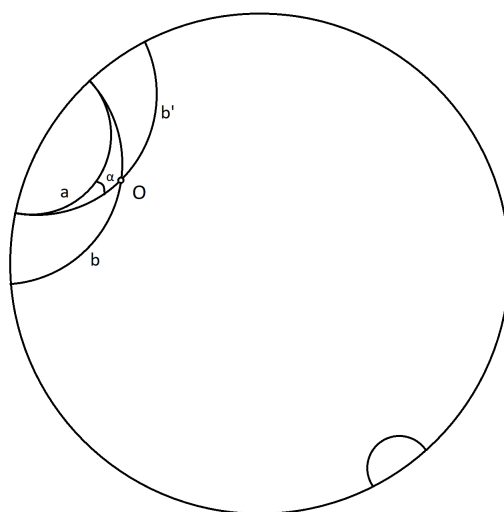


Рис.1. Дисківа модель площини Лобачевського.

Легко бачити, що перші чотири аксіоми Евкліда виконуються в дисківій моделі Пуанкаре. Проте п’ятий постулат Евкліда не виконується. Наприклад, на рисунку 1 обидві прямі b та b' паралельні до прямої a .

Задамо групу рухів диска, що зберігають орієнтацію. Такими рухами будуть автоморфні перетворення Мебіуса диска \mathbb{D} .

Означення 3.1. *Відображенням Мебіуса називають відображення вигляду $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$, де $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ і $ad - bc \neq 0$.*

Відображення Мебіуса, що відображають одиничний диск \mathbb{D} на себе, називають *комформними автоморфізмами одиничного диска*.

Твердження 3.2. *Конформні автоморфізми одиничного диска $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ є перетвореннями Мебіуса вигляду $f(z) = e^{i\varphi} \frac{z+b}{bz+1}$, для деяких параметрів $\varphi \in [0; 2\pi)$ та $b \in \mathbb{C}, |b| < 1$.*

Доведення. Спочатку доведемо, що якщо f – конформний автоморфізм диска і $f(0) = 0$, тоді f є поворотом $z \rightarrow e^{i\varphi}z$ на кут φ .

Розглянемо голоморфну в диску функцію $\frac{f(z)}{z}$. Покажемо, що $|\frac{f(z)}{z}| \leq 1$ для усіх $z \in \mathbb{D}$. За принципом максимуму, $|\frac{f(z)}{z}| \leq \max_{|z|=r} |\frac{f(z)}{z}| < \frac{1}{r}$ (це виконується для всіх r , достатньо близьких до 1). Переходячи до границі при $r \rightarrow 1$, отримуємо $|f(z)| \leq |z|$. Водночас, $|f^{-1}(z)| \leq |z|$, а отже $|f(z)| = |z|$, $|\frac{f(z)}{z}| = 1$. Зауважимо, що голоморфна функція з постійним модулем — це постійна функція з модулем, рівним 1. Тому $f(z) = e^{i\varphi} \cdot z$.

Тепер нехай φ – конформний автоморфізм. Застосуємо до нього дробово-лінійний автоморфізм $\psi(z) = \frac{z+b}{bz+1}$, де $|b| < 1$, щоб $\psi \circ \varphi$ не переміщувало центр диска. Тоді $\psi \circ \varphi(z) = e^{i\varphi}z$, а $\varphi(z) = e^{i\varphi} \cdot \psi^{-1}(z)$. Насамкінець зауважимо, що $\psi^{-1}(z) = \frac{z-b}{-bz+1}$. \square

Твердження 3.3. Гіперболічна відстань $\|z\|$ від точки $z \in \mathbb{D}$ до центра \mathbb{D} обчислюється за формулою

$$\|z\| = \operatorname{arth}(|z|) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right).$$

Доведення. Використаємо те, що інверсії відносно кіл, перпендикулярних до межі одиничного диска, відповідають симетриям відносно прямих гіперболічної площини.

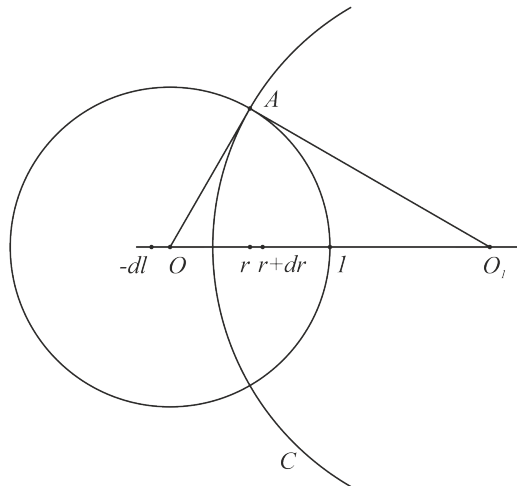


Рис.2. Обчислення віддалі на площині Лобачевського.

Без обмеження загальності можна вважати, що $z = r$, де r – додатне дійсне число. Точка $\frac{1}{r}$ є симетричною до r відносно одиничного кола. Побудуємо коло C радіуса $\sqrt{\frac{1}{r^2} - 1}$ з центром в $\frac{1}{r}$. Це коло перпендикулярне до межі диска за

оберненою теоремою Піфагора ($OA^2 + AO_1^2 = OO_1^2$), а отже його дуга є прямою в моделі Пуанкаре. Точки 0 і r симетричні відносно кола C . Нехай $r + dr$ – дійсна точка в околі r . Відносно кола C ця точка симетрична до деякої точки $-dl$ з околу нуля. Для dr та dl виконується співвідношення

$$\left(\frac{1}{r} - (r + dr)\right)\left(\frac{1}{r} + dl\right) = \frac{1}{r^2} - 1,$$

звідки $dl \approx \frac{dr}{1-r^2}$. Це означає, що гіперболічна довжина відрізка $[r, r + dr]$ дорівнює $dl \approx dr/(1 - r^2)$. Тоді гіперболічна відстань $\|z\|$ від нуля до $z = r$ дорівнює

$$\int_0^r \frac{dr}{1-r^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right) = \text{arth}(r).$$

□

3.1. Довжина кола на площині Лобачевського

У цьому підрозділі ми обчислимо довжину кола радіуса R на площині Лобачевського.

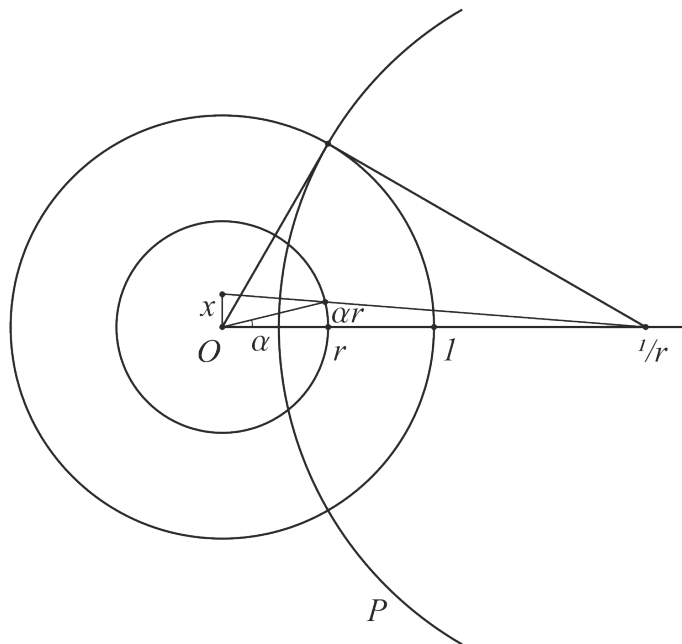


Рис. 3. Довжина кола на площині Лобачевського.

Нехай r – така точка на диску \mathbb{D} , що гіперболічна відстань від нуля до неї дорівнює R . Оцінимо довжину дуги кола радіуса R , яка опирається на малий кут $d\alpha$. Евклідова довжина цієї дуги рівна $r \cdot d\alpha$. Щоб знайти гіперболічну відстань між кінцями цієї дуги, підберемо гіперболічну пряму P , яка відображає

точку r в центр \mathbb{D} . Ця гіперболічна пряма є евклідовим колом радіуса $\frac{1}{r} - r$ з центром, що лежить на відстані $\frac{1}{r}$ від центра диска \mathbb{D} (див. рис.3). Мала дуга $r d\alpha$ при інверсії відносно кола P перейде в дугу, один кінець якої збігається з центром одиничного диска. Довжина dx цієї дуги і буде гіперболічною довжиною дуги $r d\alpha$. Цю довжину можна знайти з подібності:

$$\frac{dx}{\frac{1}{r}} = \frac{r d\alpha}{\frac{1}{r} - r}, \text{ звідки } dx = \frac{r d\alpha}{1 - r^2}.$$

Евклідовий радіус r дорівнює $\text{th}(R)$. Тому довжина кола на гіперболічній площині дорівнює

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{th}(R)}{1 - \text{th}^2(R)} d\alpha = 2\pi \frac{\text{th}(R)}{1 - \text{th}^2(R)} = \pi \text{sh}(2R).$$

3.2. Гомотетії площини Лобачевського

Нехай $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – дискова модель Пуанкаре площини Лобачевського. Для двох точок $a, b \in \mathbb{D}$ позначимо через $\|a, b\|$ гіперболічну відстань між ними. Якщо $a = 0$, писатимемо $\|b\|$ замість $\|0, b\|$. Модуль комплексного числа $z = x + iy \in \mathbb{D}$ позначатимемо через $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Оскільки класичні фрактали на евклідовій площині будуються за допомогою гомотетій, то для побудови їхніх аналогів на площині Лобачевського потрібно мати перетворення гіперболічної площини, які є аналогами гомотетій площини Евкліда.

Означення 3.4. *Гомотетією* гіперболічної площини \mathbb{H} називається бієктивне відображення $h_{c,\lambda} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, яке точці $x \in \mathbb{H}$ ставить у відповідність єдину точку y на промені cx таку, що $\|c, y\| = \lambda \cdot \|c, x\|$.

Добре відомо, що на евклідовій площині гомотетія є відображенням подібності, тобто $d(h_{c,\lambda}(x), h_{c,\lambda}(y)) = \lambda \cdot d(x, y)$ для довільних точок x, y площини. Для площини Лобачевського це вже не так, оскільки всі відображення подібності площини Лобачевського є ізометріями. Тим не менше, гомотетії площини Лобачевського мають наступну корисну властивість.

Теорема 3.5. *Довільна гомотетія $h_{c,\lambda}$ з коефіцієнтом $\lambda < 1$ на площині Лобачевського є стискуючим відображенням з коефіцієнтом стиску λ .*

Доведення. Позначимо через c центр гомотетії $h_{c,\lambda}$ з коефіцієнтом λ . Для доведення теореми достатньо показати, що в околі кожної точки гомотетія є ліпшицевим відображенням зі сталою λ . Легко бачити, що відображення є гладким відносно природної структури гладкого многовиду на гіперболічній площині. Тому стала Ліпшица не перевищує максимуму норми похідної в кожній точці.

Похідна це лінійне відображення між дотичними площинами. Для обчислення норми похідної зауважимо, що нескінченно мале коло навколо точки дотику при цьому лінійному відображенні переходить у еліпс навколо образу точки дотику.

З міркувань симетрії одна з осей цього еліпса проходить вздовж променя, який з'єднує точку з центром гомотетії. Коефіцієнт стиску гомотетії вздовж цього напрямку дорівнює λ . А в напрямку, перпендикулярному до радіального, дорівнює відношенню довжин кіл радіусів $\|c, x\|$ і $\|c, h_{c,\lambda}(x)\|$:

$$\frac{\pi \operatorname{sh}(2\|c, h_{c,\lambda}(x)\|)}{\pi \operatorname{sh}(2\|c, x\|)} = \frac{\operatorname{sh}(2\lambda\|c, x\|)}{\operatorname{sh}(2\|c, x\|)}.$$

Оскільки при $x > 0$ друга похідна $\operatorname{sh}''(x) \geq 0$, то функція $\operatorname{sh}(x)$ опукла і тому

$$\operatorname{sh}(\lambda t) \leq (1 - \lambda) \operatorname{sh}(0) + \lambda \operatorname{sh}(t) = \lambda \operatorname{sh}(t).$$

Звідси при $t = 2\|c, x\|$ отримуємо

$$\frac{\operatorname{sh}(2\lambda\|c, x\|)}{\operatorname{sh}(2\|c, x\|)} \leq \lambda.$$

Отже, норма похідної $h_{c,\lambda}$ не перевищує λ , а це означає, що $h_{c,\lambda}$ є стискуючим відображенням із коефіцієнтом стиску λ . \square

Опишемо практичний спосіб знаходження точки $h_{c,\lambda}(z)$ на диску \mathbb{D} . Для початку нехай $c = 0$. Нагадаємо, що гіперболічна відстань від 0 до z дорівнює

$$\|z\| = \operatorname{arth}(|z|) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right).$$

Тому для будь-якого $\lambda > 0$ можна знайти точку $z_\lambda \in [0, z] \subset \mathbb{D}$ на гіперболічній відстані $\|z_\lambda\| = \lambda \cdot \|z\|$ від нуля, розв'язуючи рівняння

$$\operatorname{arth}(|z_\lambda|) = \lambda \cdot \operatorname{arth}(|z|) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^\lambda,$$

а отже

$$|z_\lambda| = \operatorname{th} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^\lambda \right) = \frac{\left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^\lambda - 1}{\left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^\lambda + 1}.$$

Тоді

$$z_\lambda = |z_\lambda| \frac{z}{|z|} = \frac{z}{|z|} \cdot \frac{\left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^\lambda - 1}{\left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^\lambda + 1}.$$

Отже, у випадку $c = 0$ задачу розв'язано.

Загальну задачу можна звести до цього частково випадку за допомогою перетворень Мебіуса. Перетворення Мебіуса має вигляд

$$\mu(z) = e^{i\varphi} \frac{z + b}{bz + 1},$$

і відображає 0 в точку $e^{i\varphi}b$.

Тоді відображення $\mu_a(z) = \frac{z+a}{az+1}$ є ізометрією комплексної площини, яка відображає 0 в a . Обернене відображення μ_a^{-1} має вигляд $\mu_a^{-1}(w) = \frac{w-a}{-aw+1} = \mu_{-a}$.

Отже, щоб знайти на гіперболічній прямій ab таку точку x , що $\|a, x\| = \lambda \|a, b\|$, потрібно:

1. Застосувати перетворення Мебіуса $\mu_a^{-1} = \mu_{-a}$ до точки b і отримати точку $z = \mu_{-a}(b)$.
2. Знайти точку

$$z_\lambda = |z_\lambda| \frac{z}{|z|} = \frac{z}{|z|} \cdot \frac{\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^\lambda - 1}{\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^\lambda + 1}.$$

3. Застосувати перетворення μ_a до точки z_λ і отримати точку $x = \mu_a(z_\lambda)$, для якої $\|a, x\| = \lambda \cdot \|a, b\|$.

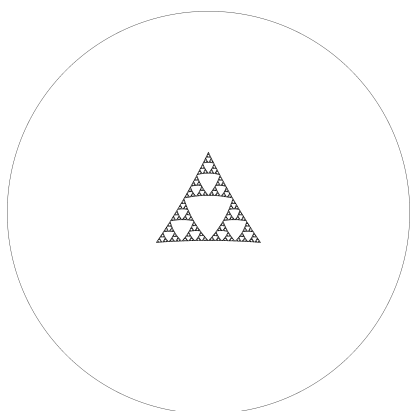
4. Детерміністичні фрактали на площині Лобачевського

Застосуємо описані у попередніх розділах методи для побудови фракталів у моделі Пуанкаре площини Лобачевського. Ми розглянемо аналоги класичних фракталів у дисковій моделі Пуанкаре. Як ми побачимо, трикутник Серпінського на площині Лобачевського незначно відрізняється від класичного трикутника Серпінського на евклідовому площині, натомість килим Серпінського вже проявляє якісні відмінності (зокрема він не гомеоморфний евклідовому килиму Серпінського, оскільки містить локально розділяючі точки).

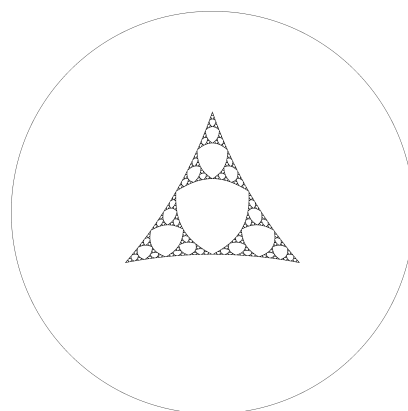
Також існують такі системи функцій, які не породжують фрактал (у сенсі Мандельброта) в евклідовому просторі, але породжують фрактал на площині Лобачевського. Візьмемо, наприклад, чотири точки, рівномірно розміщені на колі, і задамо відображення стиску в 2 рази до цих точок. На евклідовій площині отримаємо рівномірно заповнений квадрат, натомість в моделі Пуанкаре – типовий фрактал, який називається гіперболічний ромб.

Також ми побачимо, що форма детерміністичних фракталів на площині Лобачевського суттєво залежить від їхнього розміру. У підписах до зображень вказано віддаль від центра диска \mathbb{D} (радіуса 1) до найвіддаленішої точки фрактала.

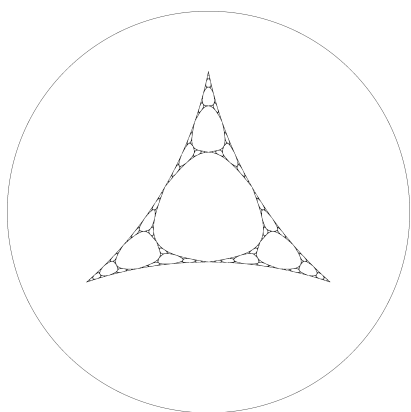
Трикутник Серпінського задається трьома гомотетіями з коефіцієнтом $1/2$ з центрами у вершинах правильного трикутника.



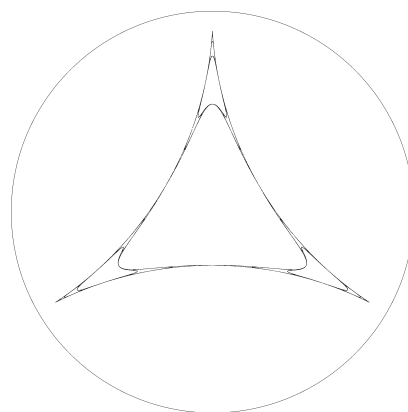
$r = 0.3$



$r = 0.5$

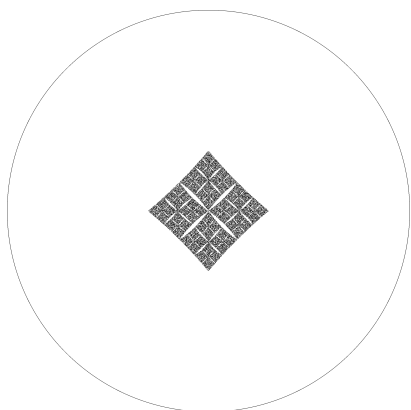


$r = 0.7$

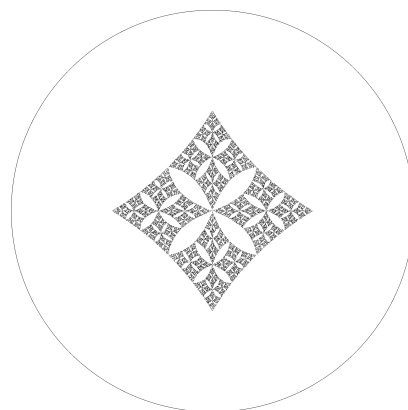


$r = 0.9$

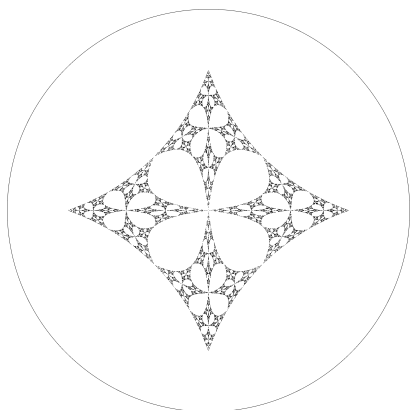
Гіперболічний ромб задається чотирма гомотетіями з коефіцієнтом $1/2$ з центрами у вершинах правильного чотирикутника.



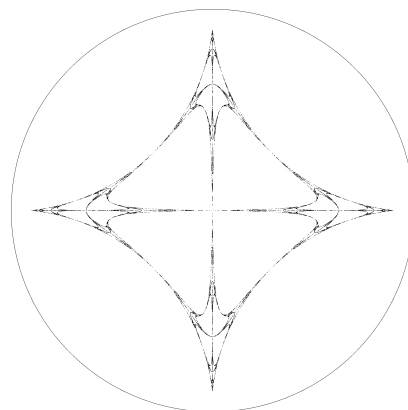
$r = 0.3$



$r = 0.5$

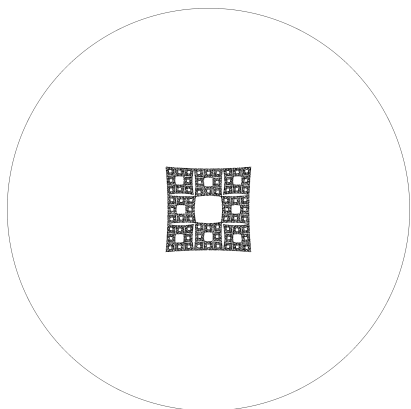


$r = 0.7$



$r = 0.9$

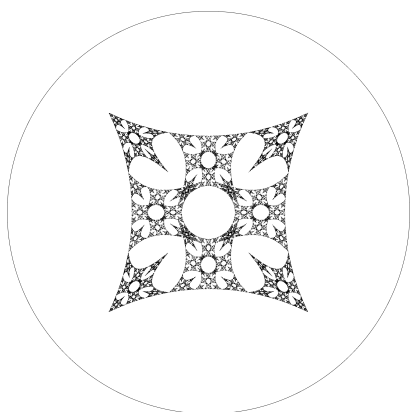
Килим Серпінського задається вісьмома гомотетіями з коефіцієнтом $1/3$. У чотирьох з них центри розміщені у вершинах правильного чотирикутника, а у чотирьох інших – у центрах сторін чотирикутника.



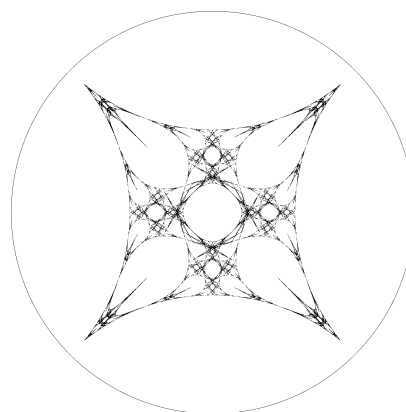
$r = 0.3$



$r = 0.5$

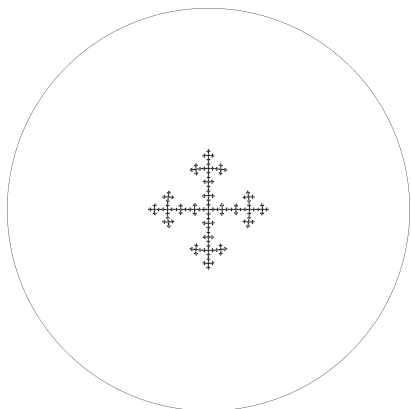
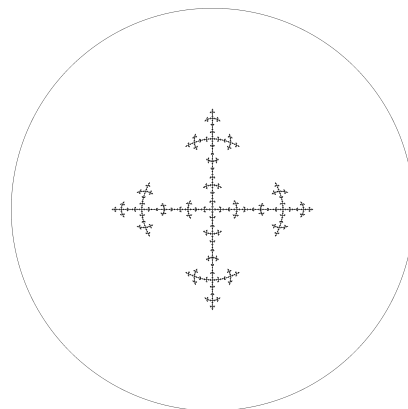
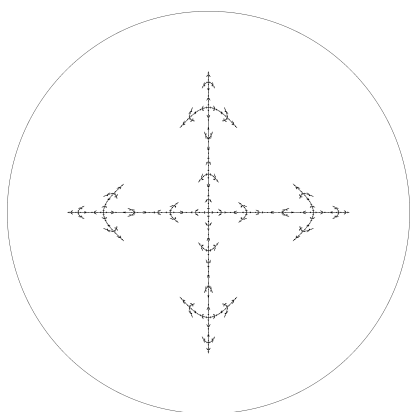
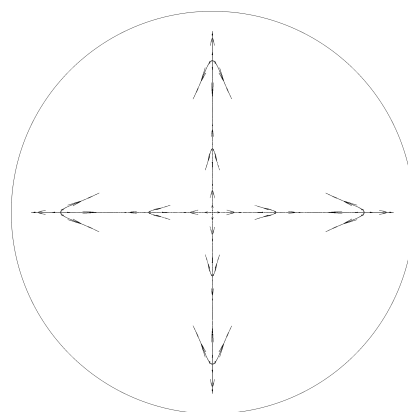


$r = 0.7$



$r = 0.9$

Фрактальний хрест задається п'ятьма гомотетіями з коефіцієнтом $1/3$. Центри чотирьох з них розміщені у вершинах правильного чотирикутника, п'ятої – в нулі.

 $r = 0.3$  $r = 0.5$  $r = 0.7$  $r = 0.9$

5. Деякі відкриті проблеми

Використовуючи той факт, що килим Серпінського на площині Лобачевського містить локально розділяючі точки, можна показати, що килими Серпінського на евклідовій площині та площині Лобачевського не гомеоморфні.

Проблема 5.1. *Чи килими Серпінського різних розмірів на площині Лобачевського попарно гомеоморфні?*

Проблема 5.2. *Чи залежить фрактальний вимір розглянутих вище фракталів на площині Лобачевського від їхніх розмірів?*

ЛІТЕРАТУРА

1. M. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press Professional, Boston, MA, 1993.
2. K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, 1990.
3. J. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 713—747.
4. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Company, 1982.
5. P.J. Ryan, *Euclidean and Non-Euclidean Geometry: An Analytic Approach*, Cambridge Univ. Press, 1986.

Надійшло 04.11.2017

Після переробки 20.12.2017