Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2017. — Т.14

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2017. — V.14

ПРИКЛАДИ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ З СУЦІЛЬНИМИ РОЗРИВАМИ НА ГОРИЗОНТАЛЯХ

Т.О. Банах[1], В.К. Маслюченко[2], О.І. Філіпчук[2]

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка*
[2] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

Т.О. Банах, В.К. Маслюченко, О.І. Філіпчук. *Приклади нарізно неперервних відображень з суцільними розривами на горизонталях* // Мат. вісник НТШ, **14** (2017) 52–63.

Побудовані приклади нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$, які скрізь розривні чи розривні у кожній точці деякої горизонталі $X \times \{b\}$ і набувають значень у σ-метризовному просторі Z.

T.O. Banakh, V.K. Maslyuchenko, O.I. Filipchuk, *Examples of separately continuous mappings with horizontals consisting of discontinuity points*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **14** (2017) 52–63.

We construct examples of separately continuous mappings $f : X \times Y \to Z$ with values in a σ-metrizable space Z, such that for some $b \in Y$ the whole horizontal line $X \times \{b\}$ consists of discontinuity points of f.

1. Вступ

У праці [1] було встановлено, що для топологічних просторів X, Y і Z, таких, що Y має зліченну псевдобазу, а Z – σ-метризовний, у кожного горизонтально квазінеперервного відображення $f : X \times Y \to Z$, яке неперервне

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C08 *УДК:* 515.12
Ключові слова та фрази: нарізно неперервне відображення
E-mail: t.o.banakh@gmail.com, v.maslyuchenko@gmail.com

відносно другої змінної, множина $C(f)$ його точок неперервності є залишковою в добутку $X \times Y$, тобто множина $D(f)$ його точок розриву є першої категорії в $X \times Y$. У [2] було з'ясовано, що неперервність відносно другої змінної у цій теоремі можна замінити на квазінеперервність. Коли ж простір значень Z є сильно σ-метризовним чи $\aleph_0$-простором, а простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, то у таких відображень для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ буде залишковою в X (див. [1], [3]). Звичайно, всі ці властивості за таких умов мають і нарізно неперервні відображення.

У праці [4] було доведено, що нарізно неперервні відображення $f : [0,1]^2 \to C_p[0,1]$ зі значеннями у просторі $C_p[0,1]$ всіх неперервних функцій $z : [0,1] \to \mathbb{R}$ з топологією поточкової збіжності мають залишкову множину точок неперервності, і разом з тим у [5] був вказаний приклад нарізно неперервного відображення $f_0 : [0,1]^2 \to C_p[0,1]$, у якого $D(f_0) = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$. Тому постало таке

Питання 1. Чи існують такі непорожні топологічні простори X, Y і Z і нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to Z$, що Y задовольняє першу аксіому зліченності, Z – σ-метризовний і на деякій горизонталі $X \times \{b\}$ відображення f не має точок неперервності?

Відповідь на це питання нескладно отримати. По-перше, її можна вивести з одного результату Дж. Бреккенріджа та Т. Нішіури [6], з якого випливає, що існує нарізно неперервна функція $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$, у якої $D(f) = \mathbb{Q}^2$. Тут простір значень Z навіть метризовний.

Тому питання 1 варто уточнити. Справа в тому, що залишкова множина в квадраті $[0;1]^2$, як і в кожному берівському просторі, буде всюди щільною, отже, у прикладі з праці [5] функція f_0 буде мати всюди щільну в $[0;1]^2$ множину $C(f_0)$ точок неперервності. Тому точнішим варіантом питання 1 буде

Питання 2. Чи існують такі непорожні топологічні простори X, Y і Z і нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to Z$, що добуток $X \times Y$ – берівський, Y задовольняє першу аксіому зліченності, Z – σ-метризовний і на деякій горизонталі $X \times \{b\}$ відображення f не має точок неперервності?

Приклад з [5] тут не проходить, бо простір $C_p[0,1]$ не є σ-метризовним [4].

Ясно, що простір Z у такому прикладі має бути σ-метризовним, але не сильно σ-метризовним. Прикладом такого простору є площина Бінга $\mathbb{B}$ (див. [8]). Отже, питання 2 можна конкретизувати, взявши в ньому $Z = \mathbb{B}$. Оскільки у [8] було з'ясовано, що для c-зв'язних просторів X і Y кожне нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to \mathbb{B}$ є сталим, то для побудови прикладу простори X і Y слід взяти дуже незв'язними. Так виникла кандидатура прямої Зорґенфрея $\mathbb{L}$ [9, с. 47] і

Питання 3. Чи існує нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$, у якого $C_b(f) = \varnothing$ для деякого $b \in \mathbb{L}$?

Зауважимо, що як сама пряма Зорґенфрея $\mathbb{L}$, так і її квадрат – це берівські простори з першою аксіомою зліченності.

Тут ми дамо відповідь на питання 2, навівши приклад двох метризовних компактів X, Y, регулярного простору Z, який є об'єднанням зростаючої послідовності своїх підпросторів Z_n, що є метризовними компактами, і нарізно неперервного відображення $f : X \times Y \to Z$, яке скрізь розривне на деякій горизонталі $X \times \{b\}$.

Далі ми даємо позитивну відповідь на питання 3, показавши, що для кожного $b \in \mathbb{L}$ існує нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$, у якого $C_b(f) = \varnothing$. При цьому ми використовуємо те, що площина Бінґа $\mathbb{B}$ – це нерегулярний простір з першою аксіомою зліченності. Цю побудову ми узагальнюємо на випадок, коли X і Y – нуль-вимірні T_1-простори без ізольованих точок, причому X має зліченний псевдохарактер, Y задовольняє першу аксіому зліченності і Z – нерегулярний простір з першою аксіомою зліченності.

2. Приклад нарізно неперервного відображення без точок неперервності на деякій горизонталі

Нехай $\omega = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ – перший нескінченний ординал, який ми ототожнюємо з множиною $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ всіх натуральних чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, об'єднаною з нульовим елементом. Розглянемо канторовий куб $X = \{0, 1\}^\omega$, наділений топологією тихоновського добутку дискретних двоточок [9, с. 137]. Добре відомо [12, с.124], що канторів куб гомеоморфний канторовій множині $C \subset [0, 1]$. Гомеоморфізм $\varphi : X \to C$ будується за правилом $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2x(k)}{3^{k+1}}$. Для елемента $x \in X$ і номера $n \in \omega$ звуження $x|_{\{0,1,\dots,n-1\}}$ ми називаємо *зрізкою* і позначаємо через $x|n$. Для точки $a \in X$ і номера n покладемо

$$U_n(a) = \{x \in X : x|n = a|n\}.$$

Множини $U_n(a)$ є відкрито-замкненими в X і система $\mathcal{U}(a) = \{U_n(a)\}_{n \in \omega}$ –

це база околів точки a у просторі X. Простір X ми будемо коротко позначати символом 2^ω. Цей простір є метризовним компактом.

Ототожнимо кожний номер $n \in \omega$ з множиною $\{0, \dots, n-1\}$, а множину $\{0,1\}^n$ всіх скінченних послідовностей $(x(0), ..., x(n-1))$ з нулів та одиниць коротко позначимо через 2^n. Нехай $2^{<\omega} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} 2^n$ – це сукупність усіх скінченних послідовностей з нулів і одиниць. Введемо на множині $Z = 2^\omega \cup 2^{<\omega} = 2^{\le\omega}$ топологію $\mathcal{T}$, вважаючи, що підмножина U простору $(Z, \mathcal{T})$ є відкритою, якщо перетин $U \cap 2^\omega$ відкритий у 2^ω і для кожного $x \in U \cap 2^\omega$ існує такий номер n, залежний, взагалі кажучи, від x, що $x|k \in U$ як тільки $k \ge n$. Ясно, що у введеному топологічному просторі Z для кожного $x \in 2^\omega$ послідовність зрізок $x|n$ збігається до x. Зауважимо, що для довільного $z \in 2^{<\omega}$ одноточкова множина $U = \{z\}$ є відкритою в Z, адже $U \cap 2^\omega = \varnothing$. Таким чином, точки з $2^{<\omega}$ є ізольованими у просторі Z. Крім того, ясно, що простір $X = 2^\omega$ зі своєю топологією є підпростором простору Z.

Покладемо $Z_n = 2^\omega \cup 2^{\le n}$, де $2^{\le n} = \bigcup\limits_{k \le n} 2^k$. Підпростір 2^ω простору Z – це метризовний компакт, а підпростір $2^{\le n}$ складається зі скінченного числа ізольованих точок, отже, теж є метризовним компактом. Підпростір Z_n є топологічною сумою просторів 2^ω та $2^{\le n}$, тому також є метризовним компактом. При цьому $Z_n \subseteq Z_{n+1}$ для кожного n і $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$. Простори Z_n замкнені в Z. Таким чином, Z – це σ-метризовний і σ-компактний простір, який має вичерпування $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$, що складається з метризовних компактів.

Покажемо, що простір Z регулярний, тобто T_1- і T_3-простір. Замкненість одноточкових підмножин простору Z очевидна для точок $z \in 2^\omega$, адже множина 2^ω замкнена в Z.

Нехай $z \in 2^{<\omega}$. Покажемо, що множина $W = Z \setminus \{z\}$ є відкритою в Z. Візьмемо такий номер m, що $z \in 2^m$. Оскільки $W \cap 2^\omega = 2^\omega$, адже $z \notin 2^\omega$, то множина $W \cap 2^\omega$ відкрита в 2^ω. Нехай $w \in W \cap 2^\omega = 2^\omega$ і n – довільний номер, для якого $n > m$. Тоді при $k \ge n$ рівність $w|k = z$ неможлива, адже $w|k \in 2^k$, а $z \in 2^m$ і $k > m$, отже, $2^k \cap 2^m = \varnothing$. Тому $w|k \in W$ при $k \ge n$. З означення топології в Z випливає, що $W \in \mathcal{T}$, а значить $\{z\}$ – замкнена множина.

Далі з'ясуємо, що у будь-якої точки $z \in Z$ і довільного її околу W_z існує замкнений окіл V, такий, що $V \subseteq W_z$. У випадку, коли $z \in 2^{<\omega}$, це зрозуміло, оскільки множина $V = \{z\}$ – відкрито-замкнена, як ми з'ясували вище.

Нехай $z \in 2^\omega$. Візьмемо відкритий окіл U точки z в Z, такий, що $U \subseteq W_z$. Перетин $U \cap 2^\omega$ – це відкритий у 2^ω окіл точки z. Тому існує такий номер n, що $U_n(z) \subseteq U \cap 2^\omega$. Далі для кожного $x \in U \cap 2^\omega$ існує такий номер $m(x) > n$, що $V_x = \{x|k : k \geq m(x)\} \subseteq U$. Покладемо

$$V = U_n(z) \cup B, \quad \text{де} \quad B = \bigcup_{x \in U_n(z)} V_x.$$

Ясно, що $V \subseteq U$. З означення топології $\mathcal{T}$ безпосередньо випливає, що V – це окіл точки z у просторі Z. Залишилось довести, що множина V замкнена в Z. Це негайно випливає з рівності $\overline{B} = V$. Щоб її довести, зауважимо, що $U_n(z) \subseteq \overline{B}$, бо для довільної точки $x \in U_n(z)$ послідовність зрізок $\{x|k\}_{k \geq n(x)} \subset B$ збігається до x. Тому $V = U_n(z) \cup B \subseteq \overline{B} \cup B \subseteq \overline{B}$.

Далі, нехай $w \in Z \setminus V$. Якщо $w \in 2^{<\omega}$, то $\{w\}$ є околом точки w, який не перетинається з V, тому $w \notin \overline{V}$, а $\overline{V} \supseteq \overline{B}$, бо $B \subseteq V$, отже, $w \notin \overline{B}$. Припустимо, що $w \in 2^\omega$. Оскільки $w \notin V$, то $w \notin U_n(z)$. Множина $U_n(z)$ замкнена у 2^ω. Тому множина $\widetilde{U} = 2^\omega \setminus U_n(z)$ буде відкритою в 2^ω і $w \in \widetilde{U}$. Множина

$$O = \widetilde{U} \cup \bigcup_{u \in \widetilde{U}} \{u|k : k \in \mathbb{N}\}$$

буде, очевидно, відкритою в Z, $w \in O$ і $O \cap V = \varnothing$. Справді, $\widetilde{U} \cap V = \varnothing$, бо $\widetilde{U} \cap U_n(z) = \varnothing$ і $\widetilde{U} \cap B = \varnothing$. Якби для деякого $u \in \widetilde{U}$ існували такі елемент $x \in U_n(x)$ і номер $k \geq m(x)$, що $u|k = x|k$, то і $u|n = x|n$, оскільки $n < m(x)$, але $x|n = z|n$, тому і $u|n = z|n$, а значить $u \in U_n(z)$, що приводить до суперечності. Таким чином, виходить, що і в цьому випадку $w \notin \overline{V}$, а значить $w \notin \overline{B}$. Отже, і $\overline{B} \subseteq V$, що разом з попереднім дає нам рівність $\overline{B} = V$ і замкненість V.

Тому топологічний простір Z є нуль-вимірним і, отже, регулярним. Оскільки Z є зліченним об'єднанням метризовних компактів, то Z має зліченну сітку топології і, отже, є космічним простором. Нагадаємо, що *космічним* називається регулярний топологічний простір зі зліченною сіткою топології.

Теорема 1. *Нехай $X = 2^\omega$ – канторовий куб, $Y = [0, \omega]$ – простір ординалів від 0 до ω, наділений своєю природною порядковою топологією, $Z = 2^{\leq \omega}$ і $f : X \times Y \to Z$ – відображення, що задається правилом:*

$$f(x, y) = x|y.$$

Тоді f – нарізно неперервне відображення, причому $D(f) = X \times \{\omega\}$.

Доведення. При $y = \omega$ звуження $f(x, \omega) = x|\omega = x$, тобто $f_\omega : X \to Z$ є тотожнім вкладенням, яке є неперервним згідно з означенням топології на Z.

Якщо ж $y \in Y$ і $y \neq \omega$, то $y = n$ для деякого $n \in \omega$ і $f_y(x) = x|n$. Для фіксованого $a \in X$ точка $a|n$ буде ізольованою в Z, а її прообраз

$$f_y^{-1}(a|n) = \{x \in X : x|n = a|n\} = U_n(a)$$

– окіл точки a в X. Це показує, що f_y неперервне в точці a. Таким чином, y-розрізи $f_y : X \to Z$ – неперервні відображення.

Для фіксованого $x \in X$ послідовність $f^x(n) = x|n$ збігається до $x = f^x(\omega)$ в Z, що дає нам неперервність $f^x : Y \to Z$ у точці ω. Неперервність f^x в інших точках з Y випливає з того, що вони ізольовані в Y.

Таким чином, f – нарізно неперервне відображення.

Доведемо тепер, що $D(f) = X \times \{\omega\}$. Нехай $p_0 = (a, b) \in X \times Y$ і $y_0 \neq \omega$. Оскільки $\{b\}$ – відкрита множина у просторі Y, а звуження $f|_{X\times\{b\}}$ на відкриту підмножину $X \times \{b\}$ добутку $X \times Y$ задається формулою $g = f(x, b) = f_b(x)$ для кожного $x \in X$, де функція $f_b : X \to Z$ неперервна, то неперервним буде і звуження g, а з ним і функція f у точці p_0.

Нехай $p_0 = (a, \omega) \in X \times \{\omega\}$. Доведемо, що $p_0 \in D(f)$. За означенням $f(p_0) = f(a, \omega) = a|\omega = a$. Для кожного номера $n \in \omega$ існує єдина точка $x_n \in 2^{n+1}$, для якої $x_n|n = a|n$ і $x_n(n) \neq a(n)$. Розглянемо множину $W_0 = Z \setminus \{x_n : n \in \omega\}$. Ясно, що $x_n \neq a$ для кожного n, тому $p_0 \in W_0$. Покажемо, що W_0 – відкрита множина у просторі Z. Справді, $W_0 \cap X = X$, отже, перетин $W_0 \cap X$ відкритий в X. Нехай $x \in W_0 \cap X = X$. Якщо $x = a$, то $x|n = a|n$ для кожного n. Візьмемо $m = 1$ і доведемо, що $a|n \in W_0$ для кожного $n \geq m$, тобто $a|n \neq x_k$ для кожного $n \geq m$ і довільного $k \in \omega$. Оскільки $a|n \in 2^n$ і $x_k \in 2^{k+1}$, то $a|n \neq x_k$ при $n \neq k + 1$, адже тоді $2^n \cap 2^{k+1} = \varnothing$. Нехай $n = k + 1$. Тоді за побудовою $(a|n)(k) = a(k) \neq x_k(k)$, отже, $a|n \neq x_k$. Якщо ж $x \neq a$, то існує такий номер m, що $x(m) \neq a(m)$. Візьмемо $n > m + 1$ і доведемо, що $x_k \neq x|n$ для довільного k. Знову це достатньо перевірити для $n = k + 1$. Тоді $k > m$ і $x_k(m) = a(m) \neq x(m)$, звідки $x_k \neq x|n$. Таким чином, W_0 – відкритий окіл точки p_0 в Z.

Нехай U – окіл точки a в X і V – окіл точки ω в Y. Покажемо, що $f(U \times V) \nsubseteq W_0$. Існує такий номер m, що $U_m(a) \subseteq U$ і $(m, \omega] \subseteq V$. Нехай $n > m$. Тоді $x_n|n = a|n$, зокрема $x_n|m = a|m$. Розглянемо довільну точку $u_n \in X$, таку, що $u_n|(n + 1) = x_n$. Тоді і $u_n|m = x_n|m = a|m$, тому $u_n \in U_m(a)$. Точка $v_n = n + 1 \in V$, отже, $(u_n, v_n) \in U \times V$. Але $f(u_n, v_n) = f(u_n, n + 1) = u_n|(n + 1) = x_n \notin W_0$. Отже, $f(U \times V) \nsubseteq W_0$, що і доводить розривність f у точці p_0. □

Зауваження 1. Згідно з недавнім результатом першого автора [3], для довільного нарізно неперервного відображення $f : X \times Y \to Z$ на добутку двох просторів X, Y з першою аксіомою зліченності зі значеннями у регулярному просторі Z, що має зліченну k-сітку, множина $\{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ є залишковою в X для довільної точки $y \in Y$. Зліченність k-сітки простору Z у цьому результаті не можна послабити до зліченності сітки, що показує приклад відображення, побудований у теоремі 1.

3. Функції на квадраті прямої Зорґенфрея зі значеннями у площині Бінґа

Нехай $\mathbb{L}$ – пряма Зорґенфрея [9, с. 47], а $\mathbb{B}$ – площина Бінґа [8], [9, с. 518], [13]. Проміжки $[a, b)$ є відкрито-замкненими множинами в $\mathbb{L}$, а $\mathbb{B}$ – зліченний гаусдорфовий і не регулярний простір. Обидва простори задовольняють першу аксіому зліченності і є сепарабельними, зокрема, в $\mathbb{L}$ множина $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел буде зліченною і всюди щільною.

Теорема 2. *Для кожного $b \in \mathbb{L}$ існує нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$, у якого $D(f) = \mathbb{L} \times \{b\}$.*

Доведення. З нерегулярності простору $\mathbb{B}$ випливає, що існує така точка z_0 в $\mathbb{B}$ і такий її окіл W_0, в якому не міститься жодного замкненого околу точки z_0 в $\mathbb{B}$. Оскільки простір $\mathbb{B}$ задовольняє першу аксіому зліченності, то існує така спадна послідовність околів W_n точки z_0 у просторі $\mathbb{B}$, що система $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ є базою околів точки z_0 в $\mathbb{B}$. Ясно, що $\overline{W_n} \not\subseteq W_0$ для кожного n, тому для кожного n існує точка $z_n \in \overline{W_n} \setminus W_0$. Оскільки $z \in \overline{W_n}$ і площина Бінґа $\mathbb{B}$ задовольняє першу аксіому зліченності, то існує послідовність $z_{n,k} \in W_n$, яка збігається до z_n.

Нехай $n \mapsto a_n$ – деяка перенумерація множини $\mathbb{Q}$, для якої $a_n \neq a_m$ при $n \neq m$. Тоді $\mathbb{Q} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, причому $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{L}$. Введемо для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $k \in \mathbb{N}$ числа $a_{n,k} = a_n + \frac{1}{k}$ і $b_n = b + \frac{1}{n}$. Розглянемо проміжки $I_{n,k} = [a_{n,k+1}, a_{n,k})$ та $J_n = [b_{n+1}, b_n)$ і прямокутники $P_{n,k} = I_{n,k} \times J_n$. Ясно, що прямокутники $P_{n,k}$ – це відкрито-замкнені множини в квадраті $\mathbb{L}^2$ прямої Зорґенфрея, які попарно не перетинаються. Визначимо тепер функцію $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$, покладаючи $f(p) = z_{n,k}$, якщо $p \in P_{n,k}$, $f(a_n, y) = z_n$ при $y \in J_n$ і $f(p) = z_0$ в іншому випадку. Покажемо, що $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$ – шукана функція.

Множини $P_{n,k}$ відкриті в $\mathbb{L}^2$ і звуження $f|_{P_{n,k}}$ стале і дорівнює $z_{n,k}$, тому

f неперервне у всіх точках з $P_{n,k}$. Множини $\mathbb{L}\times[b_1,+\infty)$, $(-\infty,a_n)\times J_n$, $[a_n+1,+\infty)\times J_n$ і $\mathbb{L}\times(-\infty,b)$ теж відкриті в $\mathbb{L}^2$ і $f(p)=z_0$ на цих множинах. Тому і на них функція f неперервна.

Нехай $p_0=(a_n,y_0)$, де $b_{n+1}\le y_0<b_n$. Тоді $f(p_0)=z_n$. Покажемо, що f неперервна в точці p_0. Нехай W – окіл точки z_n. Оскільки $z_{n,k}\to z_n$ в $\mathbb{B}$, то існує такий номер K, що $z_{n,k}\in W$ при $k\ge K$. Прямокутник $Q=[a_n,a_n+\frac{1}{k})\times J_n$ є околом точки p_0 в $\mathbb{L}^2$. Якщо $p=(x,y)\in Q$, то $x\in[a_{n,k+1},a_{n,k})$ для деякого $k\ge K$ і $y\in J_n$. В такому разі $f(p)=z_{n,k}\in W$, отже, $f(Q)\subseteq W$, що і дає нам неперервність f у точці p_0.

Таким чином, ми бачимо, що f неперервна у кожній точці з множини $\mathbb{L}^2\setminus(\mathbb{L}\times\{b\})$. Оскільки $f_b(x)=f(x,b)=z_0$ для кожного $x\in\mathbb{L}$, то $f_y:\mathbb{L}\to\mathbb{B}$ буде неперервною функцією для кожного $y\in\mathbb{L}$. Нехай $x\in\mathbb{L}$. Доведемо, що функція $f^x:\mathbb{L}\to\mathbb{B}$ також неперервна. Для цього досить довести її неперервність у точці b. Нехай W – окіл точки $f^x(b)=z_0$ у просторі $\mathbb{B}$. Тоді існує такий номер N, що $W_N\subseteq W$, а значить $W_n\subseteq W$ при $n\ge N$, бо $W_n\subseteq W_N$. В такому разі $z_{n,k}\in W$ при $n\ge N$ і довільному k. Крім того, очевидно, що і $z_0\in W$.

Припустимо, що $x\ne a_n$ для кожного n. Множина $V=[b,b_N)$ – це окіл точки b в $\mathbb{L}$. Якщо $y\in V$, то точка $p=(x,y)$ належить одному з прямокутників $P_{n,k}$ або одній з півсмуг $(-\infty,a_n)\times J_n$ чи $[a_n+1,+\infty)\times J_n$ для деякого $n\ge N$. Тому $f^x(y)=f(p)=z_{n,k}$ або z_0, а значить $f^x(y)\in W$, тобто $f^x(V)\subseteq W$, що показує неперервність f^x у точці b.

Нехай $x=a_m$ для деякого m. Візьмемо $c=\min\{b_N,b_{m+1}\}$ і розглянемо тепер окіл $V=[b,c)$ точки b в $\mathbb{L}$. Зрозуміло, що при $y\in V$ у точці $p=(x,y)$ функція f може набувати лише значень $z_{n,k}$ з $n\ge N$ або z_0. І в цьому випадку $f^x(y)=f(p)\in W$, отже, і тут розріз f^x неперервний у точці b.

Таким чином, ми встановили, що $f:\mathbb{L}^2\to\mathbb{B}$ – нарізно неперервна функція, у якої $\mathbb{L}^2\setminus(\mathbb{L}\times\{b\})\subseteq C(f)$. Залишилося перевірити, що $\mathbb{L}\times\{b\}\subseteq D(f)$. Нехай $p_0=(x,b)\in\mathbb{L}\times\{b\}$. Тоді $f(p_0)=z_0$. За побудовою W_0 – окіл точки $z_0=f(p_0)$. Розглянемо довільний окіл O точки p_0 в $\mathbb{L}^2$ і доведемо, що $f(O)\not\subseteq W_0$. Існують такі околи $U=[x_0,x_0+\delta)$ і $V=[b,b+\delta)$ в $\mathbb{L}$ точок x_0 і b відповідно, що $U\times V\subseteq O$. Оскільки $\lim_{n\to\infty}b_n=b$, то існує такий номер N, що $b_n<b+\delta$ при $n\ge N$. Множина $\mathbb{Q}\setminus\{a_1,\dots,a_{N-1}\}$ буде всюди щільною в $\mathbb{L}$ разом з множиною $\mathbb{Q}$. Тому існує такий номер m, що $m\ge N$ і $a_m\in U$. Відрізок $\{a_m\}\times J_m$ міститься у прямокутнику $U\times V$, а значить і в околі O. Оскільки $f(a_m,y)=z_m\notin W_0$ для кожного $y\in J_m$, то $f(O)\not\subseteq W_0$, звідки випливає, що $p_0\in D(f)$. $\square$

4. Функції на добутках нульвимірних просторів зі значеннями у нерегулярних просторах

Нагадаємо [9, с. 529], що топологічний T_1 простір X називається *нульвимірним*, якщо він має базу з відкрито-замкнених множин. Зрозуміло, що тоді і кожна точка $x \in X$ має базу з відкрито-замкнених околів. Якщо нульвимірний T_1-простір X задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожної точки $x \in X$ існує така спадна послідовність її відкрито-замкнених околів U_n, яка утворює базу околів точки x і для неї $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \{x\}$. Наприклад, пряма Зоргенфрея $\mathbb{L}$ – це нульвимірний простір з першою аксіомою зліченності, і для неї $U_n = [x, x + \frac{1}{n})$.

Ми будемо розглядати компактифікацію Александрова $\alpha X = X \cup \{\infty\}$ гаусдорфового локально компактного простору X [9, с. 261]. Для дискретного простору $\omega = \mathbb{N}_0$ його компактифікація Александрова $\alpha\omega$ гомеоморфна простору $[0, \omega]$, що розглядається в теоремі 2.

Побудову, що запропонована в доведенні теореми 2, можна узагальнити на випадок добутку нульвимірних просторів.

Теорема 3. *Нехай на топологічному просторі X існує така послідовність неперервних функцій $h_n : X \to \alpha\omega$, що послідовність прообразів $\big(h_n^{-1}(\infty)\big)_{n=1}^{\infty}$ є точково скінченною і для кожної непорожньої відкритої в X множини U множина $\{n \in \mathbb{N} : h_n^{-1}(\infty) \cap U \neq \varnothing\}$ нескінченна, Y – нульвимірний T_1-простір з першою аксіомою зліченності у деякій неізольованій точці $b \in Y$ і Z – простір з першою аксіомою зліченності, який не задовольняє аксіому T_3. Тоді існує таке нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to Z$, що $X \times \{b\} \subseteq D(f)$.*

Доведення. З умов, накладених на простір Y, випливає, що існує така спадна послідовність $(V_n)_{n=0}^{\infty}$ відкрито-замкнених околів точки b, що $V_0 = Y$, $V_n \setminus V_{n+1} \neq \varnothing$ і $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ – база околів точки b в Y.

Оскільки простір Z не задовольняє аксіому T_3, то існують точка $z_0 \in Z$ і її окіл W_0, такі, що $\overline{W} \nsubseteq W_0$ для кожного околу W точки z_0. Виберемо у просторі Z спадну базу околів W_n точки z_0, де $n \in \mathbb{N}$. Ясно, що для кожного номера n існує точка $z_n \in \overline{W}_n \setminus W_0$. Оскільки $z_n \in \overline{W}_n$ і простір Z задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного n існує така послідовність точок $z_{n,k} \in W_n$, $k \in \omega$, що $z_{n,k} \to z_n$ при $k \to \infty$. Покладаючи $g_n(k) = z_{n,k}$ при $k \in \omega$ і $g_n(\infty) = z_n$, ми отримуємо неперервне відображення $g_n : \alpha\omega \to Z$, для якого $g_n(\omega) \subseteq W_n$ і $g_n(\infty) = z_n$ для кожного n.

Визначимо відображення $f : X \times Y \to Z$ формулою

$$f(x,y) = \begin{cases} z_0, & \text{якщо } x \in X \text{ і } y = b; \\ g_n(h_n(x)), & \text{якщо } x \in X \text{ і } y \in V_{n-1} \setminus V_n \text{ для деякого } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

і покажемо, що воно шукане.

Перевіримо, що відображення f нарізно неперервне. Зафіксуємо $y \in Y$. Якщо $y = b$, то $f_y(x) = z_0$ на X, отже, f_y неперервне як стале відображення. Нехай $y \neq b$. Оскільки $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (V_{n-1} \setminus V_n) = Y \setminus \{b\}$, то існує такий номер n, що $y \in V_{n-1} \setminus V_n$. Тоді $f_y = g_n \circ h_n$, тому і y-розрізи f_y будуть неперервними як композиції неперервних відображень. Зафіксуємо тепер $x \in X$. За побудовою відображення $f^x : Y \to Z$ буде сталим на кожній відкрито-замкненій множині $V_{n-1} \setminus V_n$, отже, і неперервним у кожній з її точок, а тому і у кожній точці множини $Y \setminus \{b\}$. Доведемо, що воно буде неперервним і в точці b. Нехай W – довільний окіл точки $f^x(b) = z_0$ у просторі Z. Знайдемо такий номер N_0, що $W_N \subseteq W$, тоді і $W_n \subseteq W$ при $n \geq N_0$. За умовою $I = \{n \in \mathbb{N} : h_n(x) = \infty\}$ скінченна. Розглянемо номер $N = \max\{N_0, \max I\} + 1$ і окіл $V = V_N$ точки b. Оскільки $N \notin I$, то $h_N(x) \neq \infty$. Якщо $y \in V$ і $y \neq b$, то $y \in V_{n-1} \setminus V_n$ для деякого $n > N$ і

$$f^x(y) = g_n(h_n(x)) \in g_n(\omega) \subseteq W_n \subseteq W.$$

Якщо ж $y = b$, то $f^x(b) = z_0 \in W$, таким чином, $f^x(V) \subseteq W$, що і доводить неперервність відображення $f^x : Y \to Z$ у точці b.

Залишилося довести, що $X \times \{b\} \subset D(f)$. Нехай $a \in X$. Доведемо, що відображення f розривне у точці $c = (a,b)$. Розглянемо довільний окіл O точки c в добутку $X \times Y$. Знайдемо такі відкриті околи U і V точок a і b у просторах X і Y відповідно, що $U \times V \subseteq O$. Існує такий номер m, що $V_m \subseteq V$. За умовою множина $\{n \in \mathbb{N} : h_n^{-1}(\infty) \cap U \neq \varnothing\}$ – нескінченна. Тому існує такий номер n, що $n > m$ і $h_n^{-1}(\infty) \cap U \neq \varnothing$. Візьмемо які-небудь точки $u \in h_n^{-1}(\infty) \cap U$ і $v \in V_{n-1} \setminus V_n$. Ясно, що $u \in U$ і $v \in V_{n-1} \subseteq V_m \subseteq V$, тому $q = (u,v) \in O$. Але $f(q) = f(u,v) = g_n(h_n(u)) = g_n(\infty) = z_n \notin W_0$. Таким чином, $f(O) \nsubseteq W_0$, що і завершує доведення теореми. □

Приклад 1. Покажемо, що на сепарабельному нульвимірному T_1-просторі X без ізольованих точок, що задовольняє першу аксіому зліченності, існує послідовність функцій $h_n : X \to \alpha\omega$, така, як у формулюванні теореми 3.

Нехай $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність точок з X, така, що $a_n \neq a_m$ при $n \neq m$, і множина $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ всюди щільна в X. Існування такої послідовності випливає з сепарабельності простору X і того, що X є T_1-простором без ізольованих точок. Для кожного n існує така спадна база відкрито-замкнених околів $(U_{n,k})_{k\in\omega}$ точки a_n, що $U_{n,0} = X$ і $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} U_{n,k} = \{a_n\}$. Введемо для кожного номера n функцію

$$h_n(x) = \begin{cases} \infty, & \text{якщо } x = a_n; \\ k, & \text{якщо } x \in U_{n,k} \setminus U_{n,k+1} \text{ для деякого } k \in \omega. \end{cases}$$

Оскільки множини $U_{n,k} \setminus U_{n,k+1}$ відкриті і звуження $h_n|_{U_{n,k}\setminus U_{n,k+1}}$ сталe, то функція h_n неперервна в кожній точці різниці $U_{n,k} \setminus U_{n,k+1}$, а значить, і в кожній точці об'єднання $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (U_{n,k} \setminus U_{n,k+1})$, яке збігається з множиною $X \setminus \{a_n\}$. Неперервність h_n у точці a_n випливає з того, що $h_n(U_{n,m}) \subseteq [m, \infty]$ для кожного m і система всіх проміжків $[m, \infty]$ є базою околів точки ∞ у просторі $\alpha\omega$.

Перевіримо, що послідовність функцій h_n задовольняє умови з теореми 6. Оскільки прообраз $a_n \neq a_m$ при $n \neq m$, то послідовність множин $h_n^{-1}(\infty) = \{a_n\}$ точково скінченна. Нехай U – непорожня відкрита множина в X. Візьмемо якусь точку $a \in U$. Оскільки точка a не є ізольованою в X, а простір X нульвимірний, то існує така спадна база з відкрито-замкнених околів U_j точки a, що $U_j \setminus U_{j+1} \neq \varnothing$ для кожного j і $U_1 \subseteq U$. Множини $U_j \setminus U_{j+1}$ відкриті, а $\overline{A} = X$, тому для кожного j існує такий номер n_j, що $a_{n_j} \in U_j \setminus U_{j+1}$. Зрозуміло, що $a_{n_j} \neq a_{n_i}$, а значить $n_j \neq n_i$ при $j \neq i$. Оскільки $a_{n_j} \in U$ і $h_{n_j}(a_{n_j}) = \infty$, то $a_{n_j} \in h_n^{-1}(\infty) \cap U$ для кожного $j \in \mathbb{N}$, отже множина $E = \{n : h_n^{-1}(\infty) \cap U \neq \varnothing\} \supseteq \{n_j : j \in \mathbb{N}\}$ нескінченна.

Тому з теореми 3 випливає такий

Наслідок 1. *Нехай X – сепарабельний нульвимірний T_1-простір без ізольованих точок, який задовольняє першу аксіому зліченності, Y – нульвимірний T_1-простір з першою аксіомою зліченності у деякій неізольованій точці $b \in Y$ і Z – простір з першою аксіомою зліченності, який не задовольняє аксіому T_3. Тоді існує таке нарізно неперервне відображення $f : X\times Y \to Z$, що $X\times\{b\} \subseteq D(f)$.*

Зрозуміло, що теорему 2 можна вивести з цього наслідку.

ЛІТЕРАТУРА

1. В.К. Маслюченко, В.В. Михайлюк, О.І. Шишина, *Сукупна неперервність горизонтально квазінеперервних відображень зі значеннями в σ-метризовних просторах*, Мат. методи і фіз-мех. поля, **45**:1 (2002) 42–46.

2. В.К. Маслюченко, О.І. Філіпчук, *Точкова розривність K_hK-функцій зі значеннями в σ-метризовних просторах*, Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика, **191-192** (2004) 103–106.

3. T. Banakh, *Continuity points of separately continuous functions with values in $\aleph_0$-spaces*, Мат. вісник НТШ, **14** (2017), 29–35.

4. В.К. Маслюченко, О.Д. Мироник, *Нарізно неперервні відображення і вичерпні простори*, Мат. вісн. НТШ, **7** (2010) 98–110.

5. В.К. Маслюченко, О.Д. Мироник, *Сукупна неперервність відображень зі значеннями у різних узагальненнях метризовних просторів*, Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу 20-26 лютого 2012 р., Ворохта : тези доповідей. – Івано-Франківськ, (2012) 5–6.

6. J.C. Breckenridge, T. Nishiura, *Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces*, Bull. Inst. Acad. Sinsca, **4**:2 (1976) 191–203.

7. В.В. Михайлюк, *Топологія нарізної неперервності та одне узагальнення теореми Серпінського*, Мат. студії, **14**:2 (2000) 193–196.

8. О.О. Карлова, В.К. Маслюченко, О.Д. Мироник, *Площина Бінґа і нарізно неперервні відображення*, Мат. студії, **38**:2 (2012) 188–193.

9. Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Москва, Мир, (1986) 752 с.

10. В.К. Маслюченко, О.І. Філіпчук, *Про нарізно неперервні відображення з не більш, ніж зліченною множиною значень*, Укр. мат. журн. (у друці)

11. К. Куратовский, *Топология. Т.1*, Москва: Мир, (1966) 594 с.

12. В.К. Маслюченко, *Лекції з теорії міри та інтеграла. Ч.1. Міра*, Чернівці: ЧНУ, (2011) 156 с.

13. R.H. Bing, *A connected countable Hausdorff space*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953) 474–474.

Надійшло 29.08.2017

Після переробки 29.12.2017