УДК 62-50

Ю.В. Кудрявцев, Р.О. Шмалько,
П.І. Бідюк

МОДЕЛЮВАННЯ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕХІДНОЇ ЕКОНОМІКИ З ВИКОРИСТАННЯМ АЛЬТЕРНАТИВНИХ МЕТОДІВ ОЦІНЮВАННЯ МОДЕЛЕЙ

Вступ

Часові ряди, які описуються стохастичними різницевими рівняннями, давно перебувають у центрі уваги фахівців із статистичних методів аналізу даних. Тривалий час дослідження концентрувались навколо процесів, породжених лінійними моделями із скінченною кількістю параметрів: авторегресією (АР), авторегресією з ковзним середнім (АРКС) та іншими подібними моделями. Досить вичерпно ця тематика висвітлена, наприклад, у працях [1, 2]. Сучасні дослідження стосуються, частіше всього, нестаціонарних і нелінійних процесів, наприклад інтегрованих, коінтегрованих та гетероскедастичних, для яких характерна зміна в часі їх статистичних характеристик [3, 4].

Дисперсію і стандартне відхилення часто використовують як основні характеристики (ознаки) в діагностичних системах, а також як міру ризику при дослідженні фінансово-економічних процесів. Тому проблемі їх моделювання і прогнозування приділяється значна увага в спеціальній літературі. При дослідженні фінансових процесів дисперсію і стандартне відхилення використовують як міру волатильності процесу та відповідного ризику можливих втрат. У технічних процесах дисперсія характеризує поточний стан механізмів, технологічних процесів, інтенсивність випадкових збурень, що впливають на технічні системи, інтенсивність похибок (шумів) вимірювань і т. ін. У соціальних дослідженнях дисперсію і стандартне відхилення використовують для порівняння між собою різних соціальних груп або різних множин індивідуумів, що належать до однієї й тієї ж соціальної групи. Тому це надзвичайно важливий статистичний параметр з точки зору дослідження поточного стану системи та прогнозування майбутнього.

Для оцінювання параметрів (коефіцієнтів) моделей гетероскедастичних процесів (ГСП) використовують різні методи, в тому числі і звичайний метод найменших квадратів (МНК), оскільки він придатний для оцінювання псевдолінійних моделей. Однак застосування звичайного МНК не в усіх випадках коректне, оскільки припущення стосовно нормальності залишків та їх гомоскедастичності не завжди виконується.

Постановка задачі

Метою даної статті є застосування кількох альтернативних методів до оцінювання параметрів моделей ГСП та порівняння отриманих результатів.

Природа гетероскедастичних процесів перехідної економіки

Ставиться задача виконання аналізу випадкових процесів з детермінованою складовою, які формально можна подати так: $\{y(k)\}$, $\sigma_y^2 = f(y, \beta, k)$, де $y(k)$ – досліджуваний процес; σ_y^2 – змінна в часі дисперсія процесу; β – вектор параметрів моделі дисперсії (в загальному випадку параметри – це функції часу); k – дискретний час, який зв'язаний з реальним безперервним часом t через період дискретизації вимірювань $T_s : t = k\,T_s$. Необхідно побудувати моделі вибраних гетероскедастичних процесів перехідної економіки (ППЕ) за допомогою авторегресійної умовно гетероскедастичної (АРУГ) моделі

$$E_k[\hat{\varepsilon}^2(k+1)] = \alpha_0 + \alpha_1\hat{\varepsilon}^2(k-1) + $$
$$+ \alpha_2\hat{\varepsilon}^2(k-2) + \ldots + \alpha_q\hat{\varepsilon}^2(k-q),$$

а також деяких інших моделей умовної дисперсії. Для перевірки процесу на гетероскедастичність застосовуються такі методи: 1) тест Голдфелда–Квандта; 2) тест рангової кореляції Спірмена; 3) тест Парка.

Оцінювання коефіцієнтів виконується за допомогою лінійних та нелінійних методів, а саме:

- лінійні: метод найменших квадратів (МНК), рекурсивний метод найменших квадратів (РМНК), метод Монте-Карло (МК);
- нелінійні: нелінійний метод Монте-Карло.

Для будь-якої перехідної економіки існують характерні риси, які вказують на її тісний зв'язок з минулим, а також із зовнішнім світом, який має, як правило, негативний характер. Внаслідок наявності вказаних ефектів країни з перехідною економікою розвиваються повільно і з великими труднощами переходять до наступного етапу [5]. Особливостями протікання процесів перехідної економіки є: висока динаміка процесів економіки перехідного періоду (ЕПП) порівняно з усталеною економікою; висока ступінь невизначеності структури, яка спричинена швидкими змінами структури макроекономіки; висока статистична невизначеність, яка зумовлена неточними даними стосовно розвитку на макро- та мікрорівнях; висока параметрична невизначеність, яка зв'язана з труднощами отримання високоякісних оцінок параметрів моделей на основі неповних та неточних даних; наявність великої кількості випадкових збурень, які важко описати статистично; відсутність готових рішень для прийняття, що пов'язано з новизною ситуації. Саме ці фактори впливають на наявність великої кількості гетероскедастичних процесів в ЕПП: інфляції, ціни на продукцію, продажі акцій на біржі. Як приклад лінійної регресії, на рис. 1 наведено залежність споживання C від доходу I:

$$C = \alpha_0 + \alpha_1 I + \varepsilon.$$

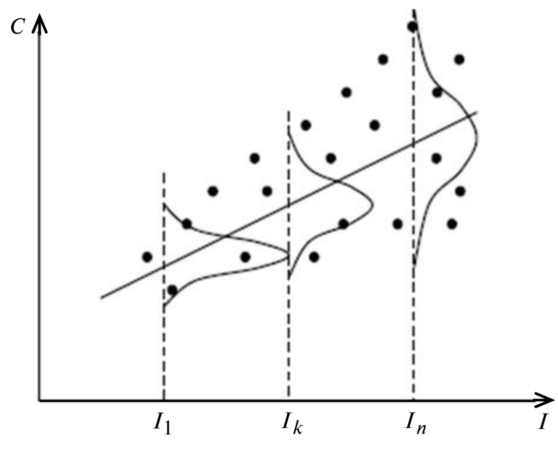

Рис. 1. Залежність споживання C від доходу I

На рисунку при залежності середнього споживання від доходу дисперсія споживання не залишається постійною, а збільшується з ростом доходу. Фактично це означає, що суб'єкти з більшим доходом у середньому споживають більше, ніж суб'єкти з меншим доходом, і, крім того, розкид у споживанні більш вагомий для більшого рівня доходу. Фактично люди з більшими доходами мають більший простір для розподілу свого доходу. Реалістичність даної ситуації підтверджується статистичними даними для більшості країн світу. Розкид значень споживання викликає розкид точок спостереження щодо лінії регресії, що й визначає дисперсію випадкових відхилень. Динаміку зміни дисперсії відхилень для даного прикладу проілюстровано на рис. 2.

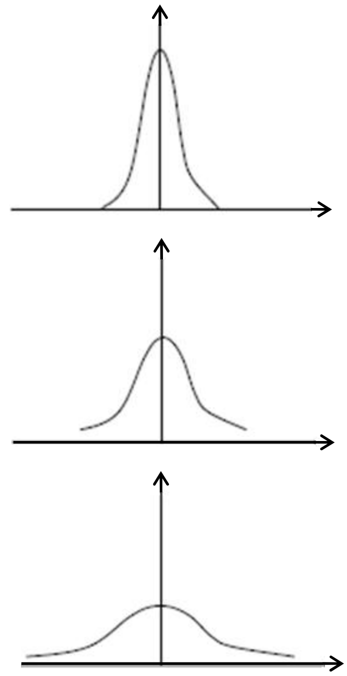

Рис. 2. Динаміка зміни дисперсії

Проблема гетероскедастичності характерна для перехресних даних. Це можна легко пояснити таким чином: при перехрещенні даних враховуються економічні суб'єкти (споживачі, фірми, галузі, країни і т.д.), які мають різні розміри доходів, пов'язані з ефектом масштабу.

Наслідки гетероскедастичності для МНК

При оцінюванні класичної лінійної регресії метод найменших квадратів дає прийнятні незміщені лінійні оцінки. Але однією з умов цього результату є виконання ряду обмежень, одним з яких є постійна дисперсія залишків моделі (гомоскедастичність) — $\sigma^2(\varepsilon_i) = \sigma^2$ — для будь-яких значень i, $i = 1, 2, \ldots, n$, в інтервалі визначення основної змінної. За наявності гетероскедастичності наслідки застосування МНК будуть такими:

- оцінки коефіцієнтів залишаються незміщеними та лінійними;
- оцінки не будуть ефективними (тобто не матимуть найменшу дисперсію порівняно з іншими оцінками даного параметра) і навіть асимптотично ефективними (при збільшенні дисперсії оцінок зменшується ймовірність отримання максимально точних оцінок);
- дисперсії оцінок будуть розраховуватися із зсувом;
- внаслідок сказаного вище всі висновки, які одержані на основі відповідних t- та F-статистик, а також інтервальні оцінки будуть ненадійними.

Отже, статистичні висновки, які одержують при стандартних перевірках якості оцінок, можуть бути помилковими й призводити до невірних висновків стосовно побудованої моделі. Цілком імовірно, що стандартні похибки оцінок коефіцієнтів будуть занижені, а похибки t-статистики – завищені. Це може призвести до визнання статистично значущими тих оцінок коефіцієнтів, які в дійсності незначущі.

Модель АРУГ

Припустимо, що умовна дисперсія – величина змінна. Одним із простих підходів до описання такої змінної величини є застосування моделі типу АР(q) до квадратів оцінок залишків:

$$\hat{\varepsilon}^2(k) = \alpha_0 + \alpha_1\hat{\varepsilon}^2(k-1) + \alpha_2\hat{\varepsilon}^2(k-2) + \\ + \ldots + \alpha_q\hat{\varepsilon}^2(k-q) + v(k), \quad (1)$$

де $v(k)$ – процес білого шуму з нульовим середнім, якщо оцінена модель має високу ступінь адекватності.

Якщо всі коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ дорівнюють нулю, то оцінка дисперсії буде просто константою. Інакше, умовна дисперсія змінної $y(k)$ описується рівнянням (1). Це рівняння можна використати для прогнозування умовної дисперсії на один крок таким чином:

$$E_k[\hat{\varepsilon}^2(k+1)] = \alpha_0 + \alpha_1\hat{\varepsilon}^2(k-1) + \\ + \alpha_2\hat{\varepsilon}^2(k-2) + \ldots + \alpha_q\hat{\varepsilon}^2(k+1-q).$$

Оскільки рівняння (1) можна побудувати за умови, що $\mathrm{Var}[y(k)] \neq \mathrm{const}$, то його називають авторегресійним умовно гетероскедастичним (АРУГ) рівнянням [1, 2]. Оскільки залишки $\varepsilon(k)$ у рівнянні (1) можуть бути отримані на основі рівнянь регресії, авторегресії або авторегресії з ковзним середнім, то для АРУГ-моделі можна знайти багато потенційних можливостей практичного і теоретичного застосування. Очевидно, що, крім рівняння (1), можна вибрати і складніші форми опису динаміки дисперсії.

Лінійний метод Монте-Карло

Розглянемо лінійну систему $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, яку можна подати в спеціальному вигляді:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j + \beta_i, \; i = 1, \ldots, n. \quad (2)$$

За допомогою матриці $\alpha = [\alpha_{ij}]$ та векторів $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \ldots \\ \beta_n \end{bmatrix}$ систему (2) можна записати в матрично-векторному вигляді: $x = \alpha x + \beta$ [6]. Припустимо, що всі власні значення матриці α за модулем менші за одиницю. Достатньо вважати, що будь-яка канонічна матриця α задовольняє нерівність $\|\alpha\| < 1$.

Оскільки метод ґрунтується на деякому блуканні частинок, які мають скінченну кількість можливих і несумісних станів $S_1, S_2, \ldots, S_n, S_{n+1}$, розглянемо практичну можливість організації такого випадкового блукання частинки із заданим ймовірнісним вектором p_{ij}, де p_{ij} – ймовірність переходу із стану S_i в стан S_j незалежно від минулого стану та з невизначеністю майбутнього блукання. Для простоти будемо вважати, що p_{ij} – десятковий дріб із загальним знаменником 10^s (s – натуральне число): $p_{i1} = \frac{t_{i1}}{10^s}, p_{i2} = \frac{t_{i2}}{10^s}, \ldots, p_{i\,n+1} = \frac{t_{i\,n+1}}{10^s}$, де $t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{i\,n+1}$ – цілі невід'ємні числа за умови, що $t_{i1} + t_{i2} + \ldots + t_{i\,n+1} = 10^s$, $i = 1, \ldots, n$. Розглянемо частинку, яка має початковий стан S_i. Нехай множина $\{x\}$ – це s-розрядні числа, менші за одиницю, які рівномірно розподілені на відрізку [0, 1]. Проведемо вибірку випадкового числа x. Якщо виявиться, що виконується нерівність $0 \le x \le \frac{t_{i1}}{10^s}$, то вважатимемо, що частинка переходить із стану S_i в стан S_1. Далі, якщо $\frac{t_{i1}}{10^s} \le x \le \frac{t_{i1}+t_{i2}}{10^s}$, то вважаємо, що частинка перейшла із стану S_i в стан S_2. Аналогічно визначаємо і всі інші переходи. Кількість сприятливих випадків переходів $S_i \to S_j$, $j = 1, 2, \ldots, n, n+1$, пропорційна відповідно числам t_{i1}, $t_{i2}, \ldots, t_{in+1}$, при цьому ці випадки рівноймовірні. Виходячи з цього, маємо, що ймовірність переходу становить $P(S_i \to S_j) = \frac{t_{ij}}{10^s} = p_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n+1$.

Формуючи вибірку випадкових чисел та керуючись даним правилом, отримаємо випадкове блукання частинки з фіксованим початковим станом та даними ймовірностями переходу.

Нелінійний метод Монте-Карло та лінеаризація моделі

Нехай є система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = \sum_{j=1}^{n} \psi_{1j}(x_j) + \beta_1, \\ \ldots \\ x_i = \sum_{j=1}^{n} \psi_{ij}(x_j) + \beta_i, \\ \ldots \\ x_n = \sum_{j=1}^{n} \psi_{nj}(x_j) + \beta_n, \end{cases} \tag{3}$$

де ψ – нелінійна функція від шуканої невідомої x. Перейдемо до матрично-векторного зображення системи (3):

$$\mathbf{X} = \Psi(\mathbf{X}) + \mathbf{B},$$

де $\mathbf{B}$ – вектор вільних членів рівнянь. Продиференціюємо дану систему і позначимо матрицю перших похідних так:

$$\Psi' = \begin{bmatrix} \psi'_{11} & \psi'_{12} & \cdots & \psi'_{1n} \\ \psi'_{21} & & & \\ \cdots & & & \\ \psi'_{n1} & & & \psi'_{nn} \end{bmatrix}.$$

Необхідною умовою є нерівність $\|\Psi'\| < 1$. Якщо матриця не відповідає цій умові, можна провести нормування. Якщо умова виконується, то можемо застосовувати лінійний метод Монте-Карло. Виходячи з рівності $\psi_{ij}(x_i + \Delta x_j) \approx \approx \psi_{ij}(x_j) + \psi'_{ij}\, x_j$, отримуємо

$$\Delta\mathbf{X} = \Psi'(\mathbf{X}) \times \Delta\mathbf{X} + \Psi(\mathbf{X}) - \mathbf{X} + \mathbf{B}.$$

Позначимо

$$\tilde{\mathbf{B}} = \Psi(\mathbf{X}) - \mathbf{X} + \mathbf{B},$$

де $\tilde{\mathbf{B}}$ – модифікований вектор вільних членів рівнянь. Отримаємо систему лінійних рівнянь, яка застосовується в лінійному методі Монте-Карло.

Метод Монте-Карло для марковських ланцюгів (МКМЛ)

Порогова модель стохастичної волатильності набуває такого вигляду:

$$x(k) = \psi_{0s(k)} + \psi_{1s(k)} x(k-1) + y(k),$$

$$y(k) = \sqrt{h(k)\; u(k)},\; u(k) \sim N(0,1),$$

$$\log h(k+1) = \alpha_{s_k+1} + \varphi_{s_k+1} \log h(k) + \eta(k),$$

$$\eta(k) \sim N(0, \sigma^2),$$

де $x(k)$ – часовий ряд статистичних даних, на основі яких будується модель; $u(k)$ і $\eta(k)$ – стохастичні незалежні процеси білого шуму; ψ_0, ψ_1, α, φ – параметри моделі. Сформуємо три групи для θ: перша група – параметри середніх для рівнянь: $\psi_0, \delta, \psi_1, c$; друга група – параметри α, γ, φ, d для рівняння дисперсії і остання група – дисперсія σ^2.

Сформулюємо алгоритм формування вибірки за методом МКМЛ та обчислення параметрів розподілу.

1-й крок: обчислити $\rho(k)$, $k = 1, \ldots, n$, де ρ – сталий коефіцієнт кореляції ρ між $u(k)$ і $\eta(k)$.

2-й крок: обчислити σ^2 за моделлю випадкового кроку Метрополіса.

3-й крок: обчислити $h(k)$, $k = 1, \ldots, n$, використовуючи багатокрокову дискретизацію.

4-й крок: обчислити $(\psi_0, \delta, \psi_1, c)^T$ з його багатовимірного нормального повного умовного розподілу.

5-й крок: обчислити x_0 з його нормального повного умовного розподілу.

6-й крок: обчислити $(\alpha, \gamma, \varphi, d)^T$ з його багатовимірного нормального повного умовного розподілу. Закінчення ітерації алгоритму за методом МКМЛ.

Переваги методу Монте-Карло: використовується для строго нелінійних та псевдолінійних моделей; у будь-якому випадку знаходяться оцінки, які дають адекватну модель.

Недоліки методу: необхідність задавати апріорний розподіл оцінок параметрів, який не завжди відомий; час обчислень може бути неприйнятним.

Результати

***Приклад* 1.** Для перевірки на гетероскедастичність взято три біржових ряди акцій. Графіки цих рядів зображено на рис. 3—5. Результати перевірки рядів на гетероскедастичність за допомогою тестів Голдфелда—Квандта, рангової кореляції Спірмена та Парка наведено в табл. 1. Як бачимо з таблиці, всі три тести показали, що ряди № 1 та № 3 є гетероскедастичними, а біржовий ряд № 2 — не гетероскедастичний.

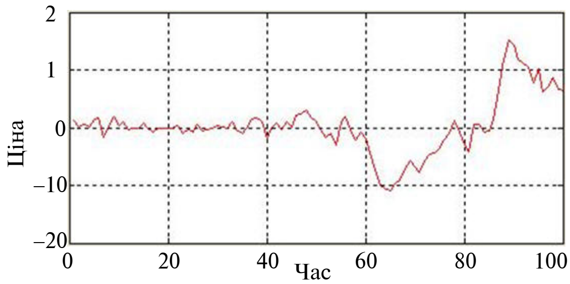

Рис. 3. Графік біржового ряду № 1

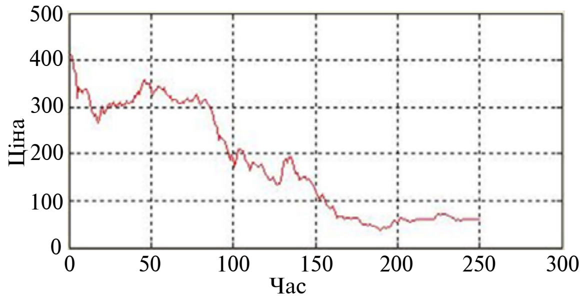

Рис. 4. Графік біржового ряду № 2

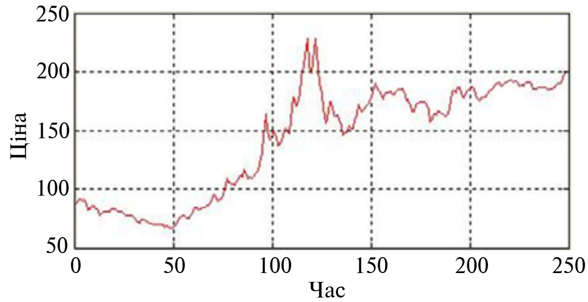

Рис. 5. Графік біржового ряду № 3

Далі для всіх рядів побудували модель АРУГ. Для знаходження оцінок коефіцієнтів при побудові моделі АРУГ використано різні методи: лінійні — метод найменших квадратів, рекурсивний метод найменших квадратів, метод Монте-Карло; нелінійні — метод Монте-Карло. Для побудови моделі АРУГ розглянуто два варіанти розрахунку умовної дисперсії: за даним рядом і за рядом залишків. Отримані результати наведено в табл. 2. За міру адекватно-

***Таблиця* 1.** Результати перевірки рядів на гетероскедастичність

Ряд	Тест		
	Голдфелда—Квандта	Спірмена	Парка
№ 1	+	+	+
№ 2	–	–	–
№ 3	+	+	+

***Таблиця* 2.** Модель АРУГ для біржових рядів

Кількість значень	Модель АРУГ							
	Лінійні методи			Нелінійний метод	Лінійні методи			Нелінійний метод
	МНК	РМНК	МК	МК	МНК	РМНК	МК	МК
	Умовна дисперсія за даним рядом				Умовна дисперсія за рядом залишків			
100	268,795	269,854	263,264	263,400	257,459	261,637	254,643	255,124
249	275,653	279,904	280,430	280,593	274,875	276,054	276,382	275,935
251	287,395	293,639	281,386	282,281	282,947	287,466	276,943	277,289

сті моделі вибрано середньоквадратичну похибку (СКП). Як видно з таблиці, для гомоскедастичного ряду найкращий результат отримали при обчисленні коефіцієнтів моделі за допомогою МНК, а для гетероскедастичних рядів найкращий результат маємо при знаходженні коефіцієнтів моделі за допомогою методу Монте-Карло.

***Приклад* 2.** Розглянуто моделювання індексу інфляції як гетероскедастичного процесу в Росії за період з 1 січня 2003 р. по 30 квітня 2008 р. за щомісячними даними. Результати моделювання і однокрокового прогнозування (на навчальній вибірці) наведено в табл. 3 і 4.

***Таблиця* 3.** Оцінювання моделі дисперсії за методом максимальної правдоподібності

Тип моделі	СКП	САПП %	Коефіцієнт Тейла
АРУГ	2,22	135,05	0,3
УАРУГ [5, 7]	0,438	3,906	0,026

В табл. 4 наведено результати моделювання і однокрокового прогнозування (на навчальній вибірці) при використанні для оцінювання параметрів моделей методу Монте-Карло для марковських ланцюгів. Цей метод використовують для оцінювання нелінійних моделей різної структури, в тому числі моделей динаміки дисперсії гетероскедастичних процесів. При цьому, як правило, отримують результати, прийнятні за точністю [7].

***Таблиця* 4.** Оцінювання моделі дисперсії за методом МКМЛ

Тип моделі	СКП	САПП %	Коефіцієнт Тейла
АРУГ	2,13	127,8	0,31
УАРУГ [5, 7]	0,385	2,890	0,018

Таким чином, кращі результати отримано в даному випадку за допомогою методу МКМЛ; результат однокрокового прогнозування покращився за критерієм середньої абсолютної похибки в процентах (САПП) на 1,1 %. Про покращення прогнозуючих властивостей моделі свідчить також зменшення коефіцієнта Тейла.

Висновки

Наявність гетероскедастичності не дає можливості одержати ефективні оцінки параметрів моделі за допомогою МНК, що часто призводить до необґрунтованих висновків стосовно їх якості. Виявлення і математичний опис гетероскедастичності – досить складна проблема, а тому на практиці рекомендується одночасно застосовувати кілька методів тестування і множину структур моделей динаміки дисперсії. Після виявлення гетероскедастичності подальший процес побудови моделей таких процесів також потребує коректного підходу. Один з можливих розв’язків цієї задачі – побудова моделей АРУГ, УАРУГ та ускладнених моделей такого типу із застосуванням методу Монте-Карло для оцінювання коефіцієнтів моделі. Зміна дисперсії процесу в часі не дає можливості застосовувати звичайний метод найменших квадратів до оцінювання коефіцієнтів моделі – вони будуть некоректними. Кращі результати досягаються за допомогою методу максимальної правдоподібності та методу Монте-Карло для марковських ланцюгів.

У подальших дослідженнях доцільно створити спеціальну комп’ютерну систему (наприклад, систему підтримки прийняття рішень), яка містила б належну множину методів оцінювання параметрів моделей різних класів. Організація процесу оцінювання структури і параметрів моделі в ітераційній формі надасть можливість прискорити процес знаходження кращих структур моделей з точки зору їх прогнозних характеристик.

Ю.В. Кудрявцев, Р.А. Шмалько, П.И. Бидюк

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕХОДНОЙ ЭКОНОМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ МЕТОДОВ ОЦЕНИВАНИЯ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрены задачи моделирования гетероскедастических процессов переходной экономики. Оценивание коэффициентов выполнено с помощью ли-

I.V. Kudriavtsev, R.O. Shmalko, P.I. Bidyuk

MODELLING OF HETEROSCEDASTIC PROCESSES OF TRANSITION ECONOMY USING ALTERNATIVE METHODS OF MODELS ESTIMATION

This paper deals with modelling of heteroscedastic processes of the transition economy. By employing linear and nonlinear methods, notably the least squares method, Marquardt method, and Monte-Carнейных и нелинейных методов, а именно метода наименьших квадратов (МНК), методов Марквардта и Монте-Карло. Решение этой задачи актуально и перспективно для успешного оценивания инфляции, моделирования цен на продукцию, прогнозирования цен акций на бирже и для других гетероскедастических процессов.

lo method, we estimate the coefficients. Perspective taking, this problem solving seems to be quite urgent and promising for successful estimation of inflation, production costs modelling, as well as forecasting prices on the stock exchange and other heteroscedastic processes.

1. *Грін В.Г.* Економетричний аналіз. – К.: Основи, 2005. – 1198 с.
2. *Бідюк П.І.* Системний підхід до прогнозування на основі моделей часових рядів // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2003. – № 3. – С. 88–110.
3. *Бідюк П.І.* Моделювання і прогнозування гетероскедастичних процесів // Там же. – 2004. – № 1. – С. 115–134.
4. *Бідюк П.І., Литвиненко В.І., Слободенюк О.В.* Моделювання і прогнозування гетероскедастичних процесів // Комп'ютерні технології, системний аналіз, моделювання: Наук. пр. МДГУ ім. П. Могили. – 2004. – **35 (22)**. – С. 24–39.
5. *Подмогильный Н.В., Бидюк П.И., Коваленко И.И., Слободенюк А.В.* Информационные технологии в моделировании экономических процессов переходного периода. – К.: Такі справи, 2000. – 232 с.
6. *Демидович Б.П., Марон І.А.* Основи обчислювальної математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
7. *Tsay R.S.* Analysis of Financial Time Series. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002. – 455 p.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
8 червня 2010 року