УДК 519.4

М.В. Ахрамович, М.А. Муратов

ЗАДАЧА КЛАСИФІКАЦІЇ ПАРИ q-КОМУТУЮЧИХ НІЛЬПОТЕНТНИХ ОПЕРАТОРІВ

Вступ

Необхідність побудови розподілених інформаційно-комунікаційних систем (ІКС) та розв'язання теоретичних і прикладних задач розподільних обчислень вимагає застосування різноманітних сучасних математичних методів. Зокрема, як один із таких інструментів можна використати теорію лінійних операторів у скінченновимірних лінійних просторах для моделювання динамічного стану компонентів ІКС. Тому актуальною є задача класифікації наборів лінійних операторів, які задовольняють певні співвідношення.

Класифікація наборів лінійних операторів у скінченновимірному комплексному лінійному просторі V, з точністю до перетворення подібності, – одна з найстаріших задач лінійної алгебри і є в загальному вигляді безнадійною вже для пари операторів. Тому цілком доцільно накладати на набори операторів певні обмеження і досліджувати питання про класифікацію при їх виконанні. У працях І.М. Гельфанда, В.А. Пономарьова [1] і С.А. Кругляка [2] (див. також [3]) було показано, що в задачу про канонічний вигляд пари комутуючих лінійних операторів $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, з точністю до перетворення подібності, входить задача про канонічний вигляд будь-якого скінченного числа довільних некомутуючих лінійних операторів $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m)$. Тому спроба безпосереднього знаходження канонічного вигляду пари комутуючих операторів $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, з точністю до перетворення подібності, не має сенсу, тобто є "дикою" (див. [4, 5]). У статті Ю.А. Дрозда [6] було доведено, що задача класифікації пари комутуючих нільпотентних операторів $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{B}^3 = \mathbf{0}$, пов'язаних співвідношенням $\mathbf{AB}^2 = \mathbf{0}$ є "дика", а в [7] – що "дикою" є і задача класифікації, з точністю до перетворення подібності, пари нільпотентних операторів $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{B}^3 = \mathbf{0}$, пов'язаних співвідношенням q-комутації: $\mathbf{BA} = q\mathbf{AB}$, де $q \in C$, $q \neq 0$.

Постановка задачі

Мета статті полягає в тому, щоб довести "дикість" задачі класифікації, з точністю до перетворення подібності, пари нільпотентних операторів $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^3 = \mathbf{0}$, пов'язаних співвідношеннями: $\mathbf{AB}^2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{AB} = q\mathbf{BA}$, $q \neq 0$. При цьому істотно використовуються побудови й означення, наведені в статтях [6, 7].

Попередні відомості

Нехай V – скінченновимірний векторний простір над полем комплексних чисел C і $\boldsymbol{B}(V)$ – алгебра всіх лінійних операторів, що діють у V.

Скінченне сімейство $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m)$ операторів з $\boldsymbol{B}(V)$ будемо називати *набором операторів* у просторі V.

Набір $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m)$ операторів з $\boldsymbol{B}(V)$ називається *нерозкладним*, якщо векторний простір V не можна дати у вигляді прямої суми нетривіальних підпросторів $V = \boldsymbol{M} \oplus \boldsymbol{N}$, інваріантних відносно кожного оператора $\mathbf{A}_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Має місце такий критерій нерозкладності.

Пропозиція 1. *Набір $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m)$ операторів з $\boldsymbol{B}(V)$ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли з умов $\mathbf{RA}_k = \mathbf{A}_k\mathbf{R}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}$ випливає, що $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ або $\mathbf{R} = \mathbf{I}$.*

Доведення. Необхідність. Нехай набір $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m)$ операторів з $\boldsymbol{B}(V)$ є нерозкладним, $\mathbf{RA}_k = \mathbf{A}_k\mathbf{R}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}$, причому $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ і $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$. Розглянемо два нетривіальні підпростори: $\boldsymbol{M} = \operatorname{Ker}\mathbf{R}$ і $\boldsymbol{N} = \operatorname{Ran}\mathbf{R}$. Якщо $x \in \boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N}$, то $\mathbf{R}x = 0$ і існує такий $y \in V$, що $x = \mathbf{R}y$. Тоді $\mathbf{R}x = \mathbf{R}(\mathbf{R}y) = \mathbf{R}^2 y = \mathbf{R}y = x = 0$, й оскільки $\dim \boldsymbol{M} + \dim \boldsymbol{N} = \dim V$, то $V = \boldsymbol{M} \oplus \boldsymbol{N}$.

Покажемо, що підпростори $\boldsymbol{M}$ і $\boldsymbol{N}$ є інваріантними відносно операторів набору $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m)$. Дійсно, якщо $x \in \boldsymbol{M} = \operatorname{Ker}\mathbf{R}$, то $\mathbf{R}x = 0$ і $\mathbf{R}(\mathbf{A}_k x) = \mathbf{A}_k\mathbf{R}x = 0$, тобто $\mathbf{A}_k x \in \boldsymbol{M}$. Аналогічно, якщо $x \in \boldsymbol{N} = \operatorname{Ran}\mathbf{R}$, то $x = \mathbf{R}y$ для деякого $y \in V$. Тому $\mathbf{A}_k x = \mathbf{A}_k(\mathbf{R}y) = \mathbf{R}(\mathbf{A}_k y) \in \boldsymbol{N}$.

Таким чином, простір V розкладається в пряму суму нетривіальних підпросторів $\boldsymbol{M}$ і $\boldsymbol{N}$, інваріантних відносно всіх операторів набору $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m)$, що заперечує нерозкладність цього набору. Отже, маємо $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ або $\mathbf{R} = \mathbf{I}$.

Достатність. Нехай набір $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m)$ є розкладним, тобто існує розкладання $V = \boldsymbol{M} \oplus \boldsymbol{N}$, де підпростори $\boldsymbol{M}$ і $\boldsymbol{N}$ є нетривіальними й інваріантними відносно всіх операторів $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m)$. Нехай $x \in V$ і $x = y + z$, де $y \in \boldsymbol{M}$, $z \in \boldsymbol{N}$. Розглянемо оператор $\mathbf{R}x = \mathbf{R}(y+z) = z$. Зрозуміло, що $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}$, $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$, $\mathbf{A}_k \mathbf{R}x = \mathbf{A}_k \mathbf{R}(y+z) = \mathbf{A}_k z$ і $\mathbf{R}\mathbf{A}_k x = \mathbf{R}\mathbf{A}_k(y+z) = \mathbf{R}(\mathbf{A}_k y + \mathbf{A}_k z) = \mathbf{A}_k z$. Отже, $\mathbf{A}_k \mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{A}_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Нехай V і W — два векторних простори. Набори операторів $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m)$ в V і $(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m)$ в W називаються подібними, якщо існує обернений оператор $\mathbf{S} : V \to W$, такий, що $\mathbf{S}\mathbf{A}_k\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{B}_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Подібність наборів операторів $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m)$ і $(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m)$ будемо позначати $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m) \sim (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m)$.

“Дикість” пари *q*-комутуючих операторів

Нехай V — скінченновимірний векторний простір. Позначимо

$$V^k := \underbrace{V \oplus V \oplus \cdots \oplus V}_{k}.$$

Нехай $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \boldsymbol{B}(V)$ — довільна пара операторів, $\mathbf{I}$ — тотожний, а $\mathbf{0}$ — нульовий оператори в просторі V. Розглянемо такі оператори:

$$\mathbf{C} : V^5 \to V^2, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D} \in \boldsymbol{B}(V^5), \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & d_2\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & d_3\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & d_4\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & d_5\mathbf{I} \end{pmatrix},$$

де $d_i \in C$, $d_i \neq 0$, $d_i \neq d_j$, якщо $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, 5$;

$$\mathbf{Y}_1 \in \boldsymbol{B}(V^{15}), \ \mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{I}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \end{pmatrix},$$

де $\bar{\mathbf{I}}$ — тотожний, а $\bar{\mathbf{0}}$ — нульовий оператори в V^5;

$$\mathbf{Y}_2 \in \boldsymbol{B}(V^{15}), \ \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{I}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \mathbf{D} & \bar{\mathbf{0}} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{Y}_3 : V^{15} \to V^2, \mathbf{Y}_3 = (\mathbf{0}_{2,5} \ \mathbf{C} \ \mathbf{0}_{2,5}),$$

де $\mathbf{0}_{2,5} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$;

$$\mathbf{Y} \in \boldsymbol{B}(V^{32}), \ \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{0}_{15,2} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0}_{2,15} & \mathbf{0}_{2,2} & \mathbf{Y}_3 \\ \mathbf{0}_{15,15} & \mathbf{0}_{15,2} & q\mathbf{Y}_1 \end{pmatrix},$$

де $q \in C$, $q \neq 0$;

$$\mathbf{X} \in \boldsymbol{B}(V^{32}), \ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{15,15} & \mathbf{0}_{15,2} & \mathbf{I}_{15,15} \\ \mathbf{0}_{2,15} & \mathbf{0}_{2,2} & \mathbf{0}_{2,15} \\ \mathbf{0}_{15,15} & \mathbf{0}_{15,2} & \mathbf{0}_{15,15} \end{pmatrix},$$

де $\mathbf{I}_{15,15} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{I}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{I}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{I}} \end{pmatrix}$.

У подальшому будемо опускати індекси і риски в позначенні нульових блоків, припускаючи, що їх розмірності відповідають розмірностям блоків, на які розбиті оператори $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$.

Пропозиція 2. *Оператори* $\mathbf{X}$ *і* $\mathbf{Y}$ *задовольняють такі співвідношення*:

1) $\mathbf{X}^2 = \mathbf{Y}^3 = \mathbf{X}\mathbf{Y}^2 = \mathbf{0}$; 2) $\mathbf{X}\mathbf{Y} = q\mathbf{Y}\mathbf{X}$.

Доведення. Властивості операторів $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ перевіряються безпосередньо.

Нехай $\tilde{V}$ — інший векторний простір, такий, що $\dim V = \dim \tilde{V}$, і $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ — довільна пара операторів з $\boldsymbol{B}(\tilde{V})$ і оператори $\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\mathbf{0}}$ — відповідно тотожний і нульовий оператори в $\tilde{V}$. Тоді, як і вище, по операторах $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ можна побудувати оператори $\tilde{\mathbf{X}}$ і $\tilde{\mathbf{Y}}$ з аналогічним розбиттям на блоки.

У подальшому нам знадобиться така лема.

Лема 1. *Якщо оператор* $\mathbf{S}: V^{32} \to \tilde{V}^{32}$ *задовольняє умову:* $\mathbf{SX} = \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S}$, *то він має вигляд*

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{11} \end{pmatrix},$$

де розбиття на блоки таке, як в операторів $\mathbf{X}$ *і* $\tilde{\mathbf{X}}$.

Д о в е д е н н я. Нехай оператор $\mathbf{S}$ має вигляд $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} \\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} \end{pmatrix}$, де розбиття на блоки таке саме, як і в операторів $\mathbf{X}$ і $\tilde{\mathbf{X}}$. Оскільки $\mathbf{SX} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{11} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{21} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{31} \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, і $\mathbf{SX} = \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S}$, то має місце така система рівностей: $\mathbf{S}_{31} = \mathbf{S}_{32} = \mathbf{S}_{21} = \mathbf{0}$, $\mathbf{S}_{11} = \mathbf{S}_{33}$. Отже, маємо

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{11} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Пари операторів* $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *і* $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}})$ *подібні тоді і тільки тоді, коли подібні пари операторів* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *і* $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$.

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай пари операторів $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ і $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}})$ подібні і $\mathbf{S}: V^{32} \to \tilde{V}^{32}$ – невироджений оператор, такий, що $\mathbf{SX} = \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S}$, $\mathbf{SY} = \tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{S}$. Згідно з лемою 1, оператор $\mathbf{S}$ має вигляд $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4 & \mathbf{S}_5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_1 \end{pmatrix}$. Далі, оскільки $\mathbf{SY} = \tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{S}$, то матимемо

$$\begin{cases} \mathbf{S}_1\mathbf{Y}_1 = \tilde{\mathbf{Y}}_1\mathbf{S}_1, \\ \tilde{\mathbf{Y}}_1\mathbf{S}_2 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{S}_1\mathbf{Y}_2 + \mathbf{S}_2\mathbf{Y}_3 + \mathbf{q}\mathbf{S}_3\mathbf{Y}_1 = \tilde{\mathbf{Y}}_1\mathbf{S}_3 + \tilde{\mathbf{Y}}_2\mathbf{S}_1, \\ \mathbf{S}_4\mathbf{Y}_3 + q\mathbf{S}_5\mathbf{Y}_1 = \tilde{\mathbf{Y}}_3\mathbf{S}_1. \end{cases} \qquad (1)$$

Оскільки $\mathbf{SY}_1 = \tilde{\mathbf{Y}}_1\mathbf{S}$, то $\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_4 & \mathbf{U}_5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_1 \end{pmatrix}$, де розбиття на блоки відповідає розбиттю $\mathbf{Y}$ і $\tilde{\mathbf{Y}}$. Далі, покладемо $\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1^{(2)} \\ \mathbf{S}_2^{(2)} \\ \mathbf{S}_3^{(2)} \end{pmatrix}$. Тоді з рівності $\tilde{\mathbf{Y}}_2\mathbf{S}_2 = \mathbf{0}$ отримаємо, що $\mathbf{S}_3^{(2)} = \mathbf{0}$. Таким чином, $\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1^{(2)} \\ \mathbf{S}_2^{(2)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, де V_1 і V_2 мають розмір 15×2.

Якщо $\mathbf{S}_4 = (\mathbf{S}_1^{(4)})$, $\mathbf{S}_5 = (\mathbf{S}_1^{(5)} \ \ \mathbf{S}_2^{(5)} \ \ \mathbf{S}_3^{(5)})$, то $\mathbf{S}_4\mathbf{Y}_3 = (\mathbf{0} \ \ \mathbf{S}_1^{(4)}\mathbf{C} \ \ \mathbf{0})$, $q\mathbf{S}_5\mathbf{Y}_1 = (\mathbf{0} \ \ \mathbf{0} \ \ q\mathbf{S}_1^{(5)})$, $\tilde{\mathbf{Y}}_3\mathbf{S}_1 = (\mathbf{0} \ \ \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{U}_4 \ \ \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{U}_5)$, то згідно з рівністю $\mathbf{S}_4\mathbf{Y}_3 + q\mathbf{S}_5\mathbf{Y}_1 = \tilde{\mathbf{Y}}_3\mathbf{S}_1$ отримаємо

$$\begin{cases} \mathbf{S}_1^{(4)}\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{U}_4, \\ q\mathbf{S}_1^{(5)} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{U}_5. \end{cases} \qquad (2)$$

Далі, покладемо $\mathbf{S}_1\mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_3\mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_4 & \mathbf{U}_5\mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_1\mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\mathbf{S}_2\mathbf{Y}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{V}_1\mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_2\mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Якщо $\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11}^{(3)} & \mathbf{S}_{12}^{(3)} & \mathbf{S}_{13}^{(3)} \\ \mathbf{S}_{21}^{(3)} & \mathbf{S}_{22}^{(3)} & \mathbf{S}_{23}^{(3)} \\ \mathbf{S}_{31}^{(3)} & \mathbf{S}_{32}^{(3)} & \mathbf{S}_{33}^{(3)} \end{pmatrix}$, то $q\mathbf{S}_3\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & q\mathbf{S}_{11}^{(3)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & q\mathbf{S}_{21}^{(3)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & q\mathbf{S}_{31}^{(3)} \end{pmatrix}$ і $\mathbf{S}_1\mathbf{Y}_2 + \mathbf{S}_2\mathbf{Y}_3 + q\mathbf{S}_3\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_3\mathbf{D} + \mathbf{V}_1\mathbf{C} & q\mathbf{S}_{11}^{(3)} \\ \mathbf{U}_4 & \mathbf{U}_5\mathbf{D} + \mathbf{V}_2\mathbf{C} & q\mathbf{S}_{21}^{(3)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_1\mathbf{D} & q\mathbf{S}_{31}^{(3)} \end{pmatrix}$. Крім того, матимемо

$$\tilde{\mathbf{Y}}_1\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{31}^{(3)} & \mathbf{S}_{32}^{(3)} & \mathbf{S}_{33}^{(3)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Y}}_2\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{U}_4 & \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{U}_5 \end{pmatrix},$$

і тоді $\tilde{\mathbf{Y}}_1\mathbf{S}_3 + \tilde{\mathbf{Y}}_2\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{31}^{(3)} & \mathbf{S}_{32}^{(3)} & \mathbf{S}_{33}^{(3)} \\ \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{U}_4 & \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{U}_5 \end{pmatrix}.$

Таким чином, оскільки $\mathbf{S}_1\mathbf{Y}_2 + \mathbf{S}_2\mathbf{Y}_3 + q\mathbf{S}_3\mathbf{Y}_1 = \tilde{\mathbf{Y}}_1\mathbf{S}_3 + \tilde{\mathbf{Y}}_2\mathbf{S}_1$, то

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_3\mathbf{D} + \mathbf{V}_1\mathbf{C} & q\mathbf{S}_{11}^{(3)} \\ \mathbf{U}_4 & \mathbf{U}_5\mathbf{D} + \mathbf{V}_2\mathbf{C} & q\mathbf{S}_{21}^{(3)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_1\mathbf{D} & q\mathbf{S}_{31}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{31}^{(3)} & \mathbf{S}_{32}^{(3)} & \mathbf{S}_{33}^{(3)} \\ \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{U}_4 & \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{U}_5 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_4$ і $\mathbf{U}_1\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{U}_4$. Тому $\mathbf{U}_1\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{U}_1$ і згідно з (2) отримаємо $\mathbf{S}_1^{(4)}\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{U}_1$.

Нехай оператор $\mathbf{U}_1$ має вигляд

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} & \mathbf{U}_{13} & \mathbf{U}_{14} & \mathbf{U}_{15} \\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} & \mathbf{U}_{23} & \mathbf{U}_{24} & \mathbf{U}_{25} \\ \mathbf{U}_{31} & \mathbf{U}_{32} & \mathbf{U}_{33} & \mathbf{U}_{34} & \mathbf{U}_{35} \\ \mathbf{U}_{41} & \mathbf{U}_{42} & \mathbf{U}_{43} & \mathbf{U}_{44} & \mathbf{U}_{45} \\ \mathbf{U}_{51} & \mathbf{U}_{52} & \mathbf{U}_{53} & \mathbf{U}_{54} & \mathbf{U}_{55} \end{pmatrix}.$$

Тоді з рівності $\mathbf{U}_1\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{U}_1$, $d_i \in C$, $d_i \neq 0$, $d_i \neq d_j$, якщо $i \neq j, i, j = 1,\ldots,5$, маємо

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_{44} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_{55} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_5 \end{pmatrix}.$$

Нехай тепер $\mathbf{S}_1^{(4)} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{1,11}^{(4)} & \mathbf{S}_{1,12}^{(4)} \\ \mathbf{S}_{1,21}^{(4)} & \mathbf{S}_{1,22}^{(4)} \end{pmatrix}$. Оскільки

$\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{T}_3 & \mathbf{T}_4 & \mathbf{T}_5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_3 & \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}_4 & \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{T}_5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{S}_1^{(4)}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{1,11}^{(4)} \\ \mathbf{S}_{1,21}^{(4)} \end{pmatrix.} \to$

$$\to \begin{matrix} \mathbf{S}_{1,12}^{(4)} & \mathbf{S}_{1,11}^{(4)} + \mathbf{S}_{1,12}^{(4)} & \mathbf{S}_{1,11}^{(4)} + \mathbf{S}_{1,12}^{(4)}\mathbf{A} & \mathbf{S}_{1,11}^{(4)} + \mathbf{S}_{1,12}^{(4)}\mathbf{B} \\ \mathbf{S}_{1,22}^{(4)} & \mathbf{S}_{1,21}^{(4)} + \mathbf{S}_{1,22}^{(4)} & \mathbf{S}_{1,21}^{(4)} + \mathbf{S}_{1,22}^{(4)}\mathbf{A} & \mathbf{S}_{1,21}^{(4)} + \mathbf{S}_{1,22}^{(4)}\mathbf{B} \end{matrix}\Bigg)$$

і $\mathbf{S}_1^{(4)}\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{U}_1$, то отримаємо $\mathbf{S}_{1,21}^{(4)} = \mathbf{S}_{1,12}^{(4)} = \mathbf{0}$, $\mathbf{S}_{1,11}^{(4)} = \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_4 = \mathbf{T}_5$, $\mathbf{S}_{1,22}^{(4)} = \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_3$, $\mathbf{S}_{1,22}^{(4)}\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}_4$, $\mathbf{S}_{1,22}^{(4)}\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{T}_5$. Отже, маємо $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_4 = \mathbf{T}_5 = \mathbf{T}$ і $\mathbf{TA} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}$, $\mathbf{TB} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{T}$.

Оскільки оператор $\mathbf{S}$ – невироджений, то оператор $\mathbf{T}$ – теж невироджений. Таким чином, оператор $\mathbf{T}$ здійснює подібність пар операторів $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ і $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \sim (\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ і $\mathbf{T}$ – такий невироджений оператор, що $\mathbf{TA} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}, \mathbf{TB} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{T}$. Будуємо послідовно невироджені оператори

$$\mathbf{U_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{pmatrix}, \mathbf{S_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{U_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U_1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S_4} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{pmatrix}, \mathbf{S_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{S_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S_1} \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що $\mathbf{SX} = \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S}, \mathbf{SY} = \tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{S}$, тобто $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \sim (\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}})$.

Теорема 2. *Пара операторів* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *нерозкладна в просторі* V *тоді і тільки тоді, коли пара операторів* $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *нерозкладна в просторі* V^{32}.

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай пара операторів $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ нерозкладна в просторі V і $\mathbf{P} \in B(V^{32})$ – такий ідемпотент, що

$$\mathbf{PX}=\mathbf{XP},\ \mathbf{PY}=\mathbf{YP}. \qquad (3)$$

Оскільки оператор $\mathbf{P}$ комутує з оператором $\mathbf{X}$, то згідно з лемою 1 маємо

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3\\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_1\end{pmatrix}.$$

З умови $\mathbf{P}^2=\mathbf{P}$ випливає система рівностей:

$$\begin{cases}\mathbf{P}_1^2=\mathbf{P}_1,\\ \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_2\mathbf{P}_4=\mathbf{P}_2,\\ \mathbf{P}_1\mathbf{P}_3+\mathbf{P}_2\mathbf{P}_5+\mathbf{P}_3\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_3,\\ \mathbf{P}_4^2=\mathbf{P}_4,\\ \mathbf{P}_4\mathbf{P}_5+\mathbf{P}_5\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_5.\end{cases} \qquad (4)$$

Оскільки оператор $\mathbf{P}$ комутує з оператором $\mathbf{Y}$, то, як і в доведенні теореми 1, можна показати, що

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_3\\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_4 & \mathbf{U}_5\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_1\end{pmatrix},$$

де

$$\mathbf{U}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{T}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_4 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_5\end{pmatrix}.$$

Згідно з тим, що $\mathbf{P}_1$ — ідемпотент, отримаємо

$$\begin{cases}\mathbf{U}_1^2=\mathbf{U}_1,\\ \mathbf{U}_1\mathbf{U}_2+\mathbf{U}_2\mathbf{U}_1=\mathbf{U}_2,\\ \mathbf{U}_1\mathbf{U}_3+\mathbf{U}_2\mathbf{U}_5+\mathbf{U}_3\mathbf{U}_1=\mathbf{U}_3,\\ \mathbf{U}_1\mathbf{U}_5+\mathbf{U}_5\mathbf{U}_1=\mathbf{U}_5.\end{cases} \qquad (5)$$

Отже, маємо $\mathbf{T}^2=\mathbf{T}$. Крім того, $\mathbf{TA}=\mathbf{AT}$, $\mathbf{TB}=\mathbf{BT}$. Пара операторів $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ нерозкладна в просторі V. Тому або $\mathbf{T}=\mathbf{0}$, або $\mathbf{T}=\mathbf{I}$.

Допустимо, що $\mathbf{T}=\mathbf{0}$. Тоді $\mathbf{U}_1=\mathbf{0}$ і, на підставі (5), $\mathbf{U}_2=\mathbf{U}_3=\mathbf{U}_5=\mathbf{0}$. Отже, $\mathbf{P}_1=\mathbf{0}$.

Нехай $\mathbf{P}_4=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12}\\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22}\end{pmatrix}$. Оскільки $\mathbf{P}_4\mathbf{C}=$ $=\mathbf{C}\mathbf{U}_1=\mathbf{0}$, то

$$\mathbf{P}_4\mathbf{C}=$$
$$=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{11}+\mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{11}+\mathbf{P}_{12}\mathbf{A} & \mathbf{P}_{11}+\mathbf{P}_{12}\mathbf{B}\\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{21}+\mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{21}+\mathbf{P}_{22}\mathbf{A} & \mathbf{P}_{21}+\mathbf{P}_{22}\mathbf{B}\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

Тому $\mathbf{P}_4=\mathbf{0}$, звідки, на підставі (4), отримуємо $\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_3=\mathbf{P}_5=\mathbf{0}$. Таким чином, маємо $\mathbf{P}=\mathbf{0}$.

Нехай тепер $\mathbf{T}=\mathbf{I}$. Тоді $\mathbf{U}_1=\mathbf{I}$ і, на підставі (5), $\mathbf{U}_2=\mathbf{U}_3=\mathbf{U}_5=\mathbf{0}$. Отже, маємо $\mathbf{P}_1=\mathbf{I}$.

Нехай, як і вище, $\mathbf{P}_4=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12}\\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22}\end{pmatrix}$. Оскільки $\mathbf{P}_4\mathbf{C}=\mathbf{C}\mathbf{U}_1=\mathbf{C}$, то отримуємо

$$\mathbf{P}_4\mathbf{C}=$$
$$=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{11}+\mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{11}+\mathbf{P}_{12}\mathbf{A} & \mathbf{P}_{11}+\mathbf{P}_{12}\mathbf{B}\\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{21}+\mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{21}+\mathbf{P}_{22}\mathbf{A} & \mathbf{P}_{21}+\mathbf{P}_{22}\mathbf{B}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{B}\end{pmatrix}.$$

Тому, $\mathbf{P}_4=\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{pmatrix}$, звідки, на підставі (4), маємо $\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_3=\mathbf{P}_5=\mathbf{0}$. Таким чином, $\mathbf{P}=\mathbf{I}$. Отже, ідемпотент $\mathbf{P}\in V^{32}$, який задовольняє (3), або нульовий, або тотожний. Таким чином, пара операторів $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ нерозкладна в просторі V^{32}.

Достатність. Нехай тепер пара операторів $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ розкладна в просторі V. Тоді існують ненульові ідемпотенти $\mathbf{T}^{(1)}$, $\mathbf{T}^{(2)}$, такі, що

$$\begin{cases}\mathbf{T}^{(1)}+\mathbf{T}^{(2)}=\mathbf{I},\\ \mathbf{T}^{(1)}\mathbf{T}^{(2)}=\mathbf{T}^{(2)}\mathbf{T}^{(1)}=\mathbf{0},\\ \mathbf{T}^{(j)}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{T}^{(j)},\mathbf{T}^{(j)}\mathbf{B}=\mathbf{B}\mathbf{T}^{(j)},\ j=1,2.\end{cases}$$

Розглянемо оператори

$$\mathbf{U}_1^{(j)} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{(j)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^{(j)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}^{(j)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}^{(j)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}^{(j)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1^{(j)} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^{(j)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_1^{(j)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_1^{(j)} \end{pmatrix}, \mathbf{P}_4^{(j)} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{(j)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^{(j)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^{(j)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_4^{(j)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_1^{(j)} \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що $\mathbf{P}_j^{(2)} = \mathbf{P}_j$, $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_j \neq \mathbf{0}$. Крім того, ідемпотенти $\mathbf{P}_1$ і $\mathbf{P}_2$ комутують з операторами $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$. Таким чином, пара операторів $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ розкладна в V^{32}.

Висновки

Основним результатом даної статті є твердження, що задача класифікації пари нільпотентних операторів $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $\mathbf{X}^2 = \mathbf{Y}^3 = \mathbf{0}$, які задовольняють співвідношення $\mathbf{XY}^2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{XY} = q\mathbf{YX}$, $q \neq 0$, містить задачу класифікації довільної пари операторів $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ без додаткових умов, а отже, вона є “дикою” задачею. Цей результат можна використовувати для розв’язання задач моделювання динамічних процесів розподілених паралельних обчислень у складних програмних системах ІКС.

М.В. Ахрамович, М.А. Муратов

ЗАДАЧА КЛАССИФИКАЦИИ ПАРЫ q-КОММУТИРУЮЩИХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Доказано, что задача классификации, с точностью до преобразования подобия, пары нильпотентных операторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^3 = \mathbf{0}$, связанных соотношениями $\mathbf{AB}^2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{AB} = q\mathbf{BA}$, $q \neq 0$, является “дикой”, т.е. содержит подзадачу классификации пары произвольных операторов без связей.

M.V. Ahramovich, M.A. Muratov

PROBLEM OF CLASSIFICATION THE PAIR OF NILPOTENT Q-COMMUTING OPERATORS

We prove that the classification problem with precision up to a similarity transformation of the pair of nilpotent operators $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^3 = \mathbf{0}$, correlated by relations $\mathbf{AB}^2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{AB} = q\mathbf{BA}$, $q \neq 0$, is “wild”, notably contains the classification problem of a pair of arbitrary operators without relations.

1. *Гельфанд І.М., Пономарьов В.А.* Зауваження про класифікацію пари комутуючих лінійних перетворень у скінченновимірному просторі // Функціональний аналіз і його застосування. – 1969. – **3**, вип. 4. – С. 81–82.
2. *Кругляк С.А.* Про зображення групи (p, p) над полем характеристики p // ДАН СРСР. – 1963. – **153**, № 6. – С. 1253–1256.
3. *Гудивок П.М.* Зображення кінцевих груп над комутативними локальними кільцями. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2003. – 118 с.
4. *Donovan P., Freislich M.R.* The Representation Theory of Finite Graphs and Associated Algebras // Carleton Math. Lecture Notes. – 1973. – N 5. – C. 3–86.
5. *Дрозд Ю.А.* Ручні і дикі матричні задачі. Зображення і квадратичні форми // Зб. наук. пр. Ін-ту математики НАН України. – 1979. – С. 39–74.
6. *Дрозд Ю.А.* Зображення комутативних алгебр // Функціональний аналіз і його застосування. – 1972. – **6**, вип. 4. – С. 41–43.
7. *Ахрамович М.В., Муратов М.А.* Про класифікацію пари q-комутуючих операторів у скінченновимірному лінійному просторі // Таврій. вісник інформатики і математики. – 2010. – № 2. – С. 17–26.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
2 лютого 2011 року