УДК 517.9

М. Дудкін

ОБЕРНЕНА СПЕКТРАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ БЛОЧНИХ МАТРИЦЬ ТИПУ ЯКОБІ В КОМПЛЕКСНІЙ ПРОБЛЕМІ МОМЕНТІВ У ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНІЙ ФОРМІ

The article proposes the analog of Jacobi matrices related to the complex moments problem in the case of exponential form as well as to the system of orthonormal polynomials relative to some measure with the compact support on the complex plane. We obtain two matrices having block tridiagonal structure and acting in the space of two-index sequences as a self-adjoint and unitary commuting operators. The previous research is incomplete as far as this research is concerned. Current are the research issues on the direct spectral problem, namely solving the system of difference equations generated by the obtained matrices. Of particular research interest is the investigation of the inner structure of such matrices, finding conditions for coefficients under which appropriate matrices are commutative self-adjoint and unitary operator.

Вступ

Класична проблема моментів є відомою ще з часів Г. Гамбургера, Т. Стільтьєса, А.А. Маркова, П.Л. Чебишева [1]. Пізніше був встановлений зв'язок класичної проблеми моментів із тридіагональними матрицями Якобі. Побудова матриці Якобі за мірою, яка є розв'язком деякої проблеми моментів, і відновлення міри (у певному розумінні) за заданою матрицею Якобі є оберненою і прямою спектральними задачами в термінології Ю.М. Березанського [2]. Така проблема є розв'язаною для багатьох випадків, наприклад для комплексної проблеми моментів у степеневій формі [3], тригонометричної проблеми моментів [4] тощо.

Постановка задачі

В [5] наведено розв'язок комплексної проблеми моментів у експоненціальній формі. Проте ні пряма, ні обернена задачі у наведеному вище сенсі не розглядалися. Отже, мета цієї роботи полягає у знаходженні вигляду матриць, які відповідають деякій скінченній мірі з компактним носієм на комплексній площині, тобто у розв'язанні оберненої спектральної задачі для комплексної проблеми моментів у експоненціальній формі.

Попередні відомості

Комплексна проблема моментів у експоненціальній формі полягає у знаходженні умов на задану послідовність комплексних чисел $c_{t,j}$, $t \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$, яка породжує позитивну міру Бореля $d\rho(z)$ на комплексній площині $\mathbb{C}$, ($z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$) так, що

$$c_{t,j} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^t e^{ij\theta} d\rho(r,\theta), \quad t \in \mathbb{N}, \ j \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Проблема розв'язується за умови, що множина функцій $\{r^t e^{ij\theta}\}$, $t \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$ є щільною в $L_2(\mathbb{C}, d\rho(z))$. Послідовність $c_{t,j}$ має зображення (1) тоді і тільки тоді, коли має місце додатна визначеність

$$\sum_{\substack{t,q \in \mathbb{N} \\ j,k \in \mathbb{Z}}} f_{t,j} \bar{f}_{q,k} c_{t+q,j-k} \geq 0,$$
$$\sum_{\substack{t,q \in \mathbb{N} \\ j,k \in \mathbb{Z}}} f_{t,j} \bar{f}_{q,k} c_{t+q+1,j-k} \geq 0, \qquad (2)$$

для довільної фінітної послідовності $(f_{t,j})$, $t \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$, $f_{t,j} \in \mathbb{C}$ [3]. Якщо до умови (2) додати умову

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2p]{|c_{2p,0}|}},$$

то зображення (1) для заданої послідовності $c_{t,j}$ є єдиним [3].

Розв'язання задачі (побудова матриць)

Нехай $d\rho(z)$ – борелева міра з компактним носієм на комплексній площині $\mathbb{C}$. Припустимо, що не тільки множина функцій $\{r^t e^{ij\theta}\}$, $t \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$ є щільною в $L_2(\mathbb{C}, d\rho(z))$, а й самі функції є лінійно незалежними в $L_2(\mathbb{C}, d\rho(z))$. Виберемо такий порядок в множині $\{r^t e^{ij\theta}\}$ для ортогоналізації за Шмідтом цієї множини:

$$
\begin{aligned}
&1 = r^0 e^{i0\theta};\\
&r^0 e^{i1\theta}, r^1 e^{i0\theta}, r^0 e^{-i1\theta};\\
&r^0 e^{i2\theta},\ r^1 e^{i1\theta},\ r^2 e^{i0\theta},\ r^1 e^{-i1\theta},\ r^0 e^{-i2\theta};\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
&r^0 e^{in\theta}, r^1 e^{i(n-1)\theta}, r^2 e^{i(n-2)\theta}, \ldots, r^n e^{i0\theta}, \ldots,\\
&\quad r^r e^{-i(n-1)\theta}, r^0 e^{-in\theta};\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots
\end{aligned}
\tag{3}
$$

В результаті ортогоналізації набору (3) отримаємо множину ортонормованих поліномів:

$$
\begin{aligned}
&1 = P_{0;0};\\
&P_{1;0}(z),\ P_{1;1}(z),\ P_{1;2}(z);\\
&P_{2;0}(z),\ P_{2;1}(z),\ P_{2;2}(z),\ P_{2;3}(z),\ P_{2;4}(z);\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
&P_{n;0}(z),\ P_{n;1}(z),\ P_{n;2}(z), \ldots,\ P_{n;2n-1}(z),\ P_{n;2n}(z);\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Кожний поліном має вигляд

$$P_{n;\alpha}(z) = k_{n;\alpha} r^{n-|\alpha-n|} e^{i(n-\alpha)\theta} + R_{n;\alpha}\,,\ \alpha = 0, 1, \ldots, 2n\,,$$

$$k_{n;\alpha} > 0\,,\ n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}\,,$$

де $R_{n;\alpha}$ – попередня частина відповідного полінома.

Теорема

Обмежений самоспряжений оператор A множення на незалежну змінну r і унітарний оператор U множення на незалежну змінну $e^{i\theta}$ в просторі $L_2(\mathbb{C}, d\rho(z))$, з яким комутує A, мають в ортонормованому базисі (4) блочну тридіагональну структуру типу Якобі в просторі

$$\mathrm{l}_2 = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots\,,\ H_n = \mathbb{C}^{n+1},\ n \in \mathbb{N}_0\,.$$

1. Матриця самоспряженого оператора має такий вигляд:

$$J_A = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & \ldots\\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & \ldots\\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
a_n &: & H_n &\to H_{n+1},\\
b_n &: & H_n &\to H_n,\\
c_n &: & H_{n+1} &\to H_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,
\end{aligned}
$$

де

$$a_n = \left.\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} * & * & * & \ldots & *\\ a_{n;1,0} & * & * & \ldots & *\\ 0 & a_{n;1,2} & * & \ldots & *\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n;2n+1,2n}\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}}_{2n+1} \end{bmatrix}\right\}{\scriptstyle 2n+3}\,,$$

$$c_n = \left.\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} * & c_{n;0,1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ * & * & c_{n;1,2} & \ldots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ * & * & * & \ldots & c_{n;2n-1,2n} & 0 & 0\\ * & * & * & \ldots & * & c_{n;2n,2n+1} & 0 \end{matrix}}_{2n+3} \end{bmatrix}\right\}{\scriptstyle 2n+1}\,.$$

(Символом “*” позначено можливо ненульові елементи.)

В J_A елемент b_n є $((2n+1)\times(2n+1))$-матрицею:

$$b_n = (b_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2n,2n}\ \ (b_0 = (b_{0;0,0})\ \text{– скаляр});$$

a_n є $((2n+3)\times(2n+1))$-матрицею:

$$a_n = (a_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2n+2,2n}\,;$$

c_n є $((2n+1)\times(2n+3))$-матрицею:

$$c_n = (c_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2n,2n+2}\,,\ n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Деякі елементи в матрицях a_n, b_n і c_n рівні нулю:

$$c_{n;\,\alpha,\beta} = 0\,, \alpha = 0, 1, \ldots, 2n\,,\ \beta = \alpha+2, \alpha+3, \ldots, 2n+2\,;$$

$$a_{n;\alpha,\beta} = 0\,,\ \beta = 0, 1, \ldots, 2n,\ \alpha = \beta+2, \beta+3, \ldots, 2n+2;$$

$$n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Деякі елементи матриць завжди додатні:

$$c_{n;\alpha,\alpha+1} > 0\,,\ a_{n;\alpha+1,\alpha} > 0\,,\ \alpha = 0, 1, \ldots, 2n\,,\ n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Так, можна казати, що кожний верхній правий кут в c_n, починаючи з головної діагоналі, що стартує з нижнього правого кута c_n, містить нульові елементи та кожний нижній лівий кут в a_n, починаючи з головної діагоналі, що стартує з правого нижнього кута a_n, також містить нульові елементи.

Матриця в скалярній формі є багатодіагональною в зазначеній структурі. Спряжена матриця має такий самий вигляд, оскільки визначає самоспряжений оператор.

2. Матриця унітарного оператора має такий вигляд:

$$J_U = \begin{bmatrix} w_0 & v_0 & 0 & 0 & \dots \\ u_0 & w_1 & v_1 & 0 & \dots \\ 0 & u_1 & w_2 & v_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$\begin{array}{lccll} u_n: & H_n & \to & H_{n+1}, & \\ w_n: & H_n & \to & H_n, & \\ v_n: & H_{n+1} & \to & H_n, & n \in \mathbb{N}_0, \end{array}$$

де

$$u_n = \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ccccccccc} u_{n;0,0} & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * \\ 0 & u_{n;1,1} & * & \dots & * & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & u_{n;2,2} & \dots & * & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{n;n-1,n-1} & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u_{n;n,n} & * & \dots & * \end{array}\right\} n+1 \\ \left.\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right\} n+2 \\ \quad\underbrace{\hphantom{0\quad 0\quad 0\quad \dots\quad 0\qquad 0}}_{n+1}\quad \underbrace{\hphantom{0\ \dots\ 0}}_{n} \end{array}\right],$$

$$v_n = \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ccccccccc} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\} n \\ \left.\begin{array}{ccccccccc} * & \dots & * & * & v_{n;n,n+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & * & * & \dots & * & 0 & 0 \\ * & \dots & * & * & * & \dots & * & v_{n;2n-1,2n+1} & 0 \\ * & \dots & * & * & * & \dots & * & * & v_{n;2n,2n+2} \end{array}\right\} n+1 \\ \underbrace{\hphantom{*\ \dots\ *\ *}}_{n+2}\quad \underbrace{\hphantom{v_{n;n,n+1}\ \dots\ *\quad v_{n;2n-1,2n+1}\quad v_{n;2n,2n+2}}}_{n+1} \end{array}\right].$$

(Аналогічно символом “*” позначено можливо ненульові елементи.)

В J_U елемент w_n є $((2n+1)\times(2n+1))$-матрицею:

$$w_n = (w_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2n,2n} \ (w_0 = (w_{0;0,0}) \text{ — скаляр});$$

u_n є $((2n+3)\times(2n+1))$-матрицею:

$$u_n = (u_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2n+2,2n};$$

v_n є $((2n+1)\times(2n+3))$-матрицею:

$$v_n = (v_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2n,2n+2}, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Деякі елементи в матрицях u_n, w_n і v_n рівні нулю:

$$v_{n;\alpha,\beta} = 0, \ \alpha = 0,1,\dots,(n-1), \ \beta = 0,1,\dots,2n+2;$$

$$v_{n;\alpha,\beta} = 0, \ \alpha = n, n+1,\dots,(2n-1),$$
$$\beta = \alpha+3, \alpha+4,\dots,2n+2;$$

$$u_{n;\alpha,\beta} = 0, \ \beta = 0,1,\dots,n, \ \alpha = \beta+1, \beta+2,\dots,2n+2;$$

$$u_{n;\alpha,\beta} = 0, \ \beta = n+1, n+2,\dots,2n,$$

$$\alpha = n+1, n+2,\dots,2n+2; \ n \in \mathbb{N}_0,$$

і

$$u_{0;1,0} = u_{0;2,0} = 0.$$

Деякі елементи матриць завжди додатні:

$$u_{0;0,0} > 0, \ v_{0;0,2} > 0;$$

$$v_{n;\alpha,\alpha+2} > 0, \ \alpha = n+1, n+2,\dots,2n;$$

$$u_{n;\alpha,\alpha} > 0, \ \alpha = 0,1,\dots,n; \ n \in \mathbb{N}.$$

Так, можна казати, що кожний верхній правий кут в v_n, починаючи з другої діагоналі, що стартує з нижнього правого кута v_n, і n верхніх рядків містять нульові елементи та кожний нижній лівий кут в u_n, починаючи з другої діагоналі, що стартує з лівого верхнього кута u_n, і $n+2$ останні рядки також містять нульові елементи.

Так, матриця в скалярній формі є багатодіагональною в зазначеній структурі. Матриця спряженого оператора U^* (множення на незалежну змінну $e^{-i\theta}$) має вигляд матриці J_{U^*}, спряженої до зазначеної.

3. Матриці J_A, J_U і J_{U^*} діють на векторах $f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathrm{l}_2$ таким чином:

$$(J_A f)_n = a_{n-1} f_{n-1} + b_n f_n + c_n f_{n+1},$$

$$(J_U f)_n = u_{n-1} f_{n-1} + w_n f_n + v_n f_{n+1},$$

$$(J_{U^*} f)_n = v^*_{n-1} f_{n-1} + w^*_n f_n + u^*_n f_{n+1},$$

$$n \in \mathbb{N}_0\,,\; f_{-1} := 0\,.$$

Доведення теореми базується на ортогональності поліномів (4) і зображенні (1), але через великий обсяг опускається в цій статті і буде наведено в наступних публікаціях.

Висновки

Побудовані в роботі матриці мають блочний тридіагональний вигляд і складну внутрішню структуру. На відміну від всіх попередніх випадків, отримано пару алгебрично комутуючих матриць. Всі попередні (відомі) випадки є частинними відносно описаного в роботі.

Актуальними залишаються питання прямої спектральної задачі, а саме розв’язання системи різницевих рівнянь, утворених знайденими в роботі матрицями, та власне дослідження внутрішньої структури самих матриць, пошук умов на коефіцієнти, за яких відповідні матриці є комутуючими самоспряженим і унітарним операторами.

1. *Ахиезер Н.И.* Классическая проблема моментов. – М.: Гос. физ.-мат. лит, 1961. – 312 с.
2. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наук. думка, 1965. – 450 с.
3. *Berezansky Yu.M., Dudkin M.E.* The complex moment problem and direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded normal matrices // Methods Funct. Anal. Topology. – 2006. – **12**, N 1. – P. 1–31.
4. *Berezansky Yu.M., Dudkin M.E.* The direct and inverce spectral problems for the block Jacobi type unitary matrices // Ibid. – 2005. – **11**, N 4. – P. 327–345.
5. *Berezansky Yu.M., Dudkin M.E.* The complex moment problem in the exponential form Berezansky // Ibid. – 2004. – **10**, N 4. – P. 1–10.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
1 вересня 2011 року