УДК 519.21

А.Б. Ільєнко, К.В. Фуйор

ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ ЧИСЛА ЗІТКНЕНЬ ТРЬОХ ВИПАДКОВИХ БЛУКАНЬ

In this paper, we investigate the limit theorem for a number of collisions of three independent simple non-symmetric random walks on the line. We obtain the limit theorem stating that the limit distribution of the log-normal number of collisions is the exponential one. Geometrically speaking, this theorem describes the asymptotic behavior of the cover time of the 3-dimensional simple random walk on the main diagonal $d := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x = y = z\}$. This interpretation correlates our research results with the classical limit theorem for local and cover times of random walks. The research results can be used for statistical estimation of probability characteristics of the walks by the number of collisions observed. Specifically, it can be applied for building confidence intervals and testing statistical hypotheses for the parameter *p*.

Вступ

Випадкові блукання є класичними об'єктами досліджень в теорії ймовірностей і завжди становили теоретичний та прикладний інтерес. З теоретичної точки зору, будучи найпростішими прикладами випадкових процесів у дискретному часі, вони часто проявляють властивості, притаманні й більш загальним і складним класам процесів. У той же час випадкові блукання постійно зустрічаються в застосуваннях теорії ймовірностей до економіки, екології, популяційної генетики, фізики полімерів та інших наук як основа для побудови математичних моделей.

Дана стаття присвячена вивченню асимптотичної поведінки розподілу кількості одночасних зіткнень трьох випадкових блукань на прямій. Результати цієї роботи продовжують класичну тематику граничних теорем для локальних часів і часів перебування випадкових блукань (див., наприклад, [1–6].

Постановка задачі

Нехай $(X_i(n), n \ge 0),\ i = 1,2,3,$ – незалежні прості несиметричні випадкові блукання:

$$X_i(0) = 0,\ X_i(n) = X_i(n-1) + \varepsilon_i(n), \tag{1}$$

де $\varepsilon_i(n),\ i = 1,2,3,\ n \ge 1,$ – незалежні в сукупності випадкові величини з розподілами

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\varepsilon_i(n) = 1\} &= p_i > 0, \\ \mathbf{P}\{\varepsilon_i(n) = -1\} &= q_i > 0,\ p_i + q_i = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Нас цікавить асимптотичний розподіл при $n \to \infty$ (відповідним чином нормованого) числа таких моментів часу k до моменту n включно, для яких виконується рівність $X_1(k) = X_2(k) = X_3(k)$.

Більш строго, розглянемо послідовність випадкових величин $(T(n), n \ge 0)$, де $T(n)$ – кількість одночасних зіткнень блукань X_i, $i = 1,2,3$, до моменту n включно:

$$T(n) = \#\{k = 0,\dots,n : X_1(k) = X_2(k) = X_3(k)\} = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}\{X_1(k) = X_2(k) = X_3(k)\}, \tag{3}$$

де $\# A$ – потужність скінченної множини A, $\mathbf{1}\{B\}$ – індикатор випадкової події B. Основна задача роботи полягає у знаходженні асимптотичного розподілу відповідним чином нормованих величин $T(n)$.

Цьому питанню можна надати й геометричну інтерпретацію. Розглянемо векторне випадкове блукання $\vec{X}(n) = (X_1(n), X_2(n), X_3(n))^T$ в просторі $\mathbb{R}^3$. Одночасне зіткнення блукань X_i означає вихід векторного блукання $\vec{X}$ на діагональ $d := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x = y = z\}$. У такій постановці задача зводиться до дослідження асимптотики часу перебування блукання $\vec{X}$ на діагоналі d.

Огляд відомих результатів

Граничні теореми для часу перебування випадкових блукань широко досліджувалися в літературі. Одним із перших результатів у цьому напрямі можна вважати закон арксинуса, одержаний Леві [1] в 1936 р. для броунівського руху і згодом перенесений на випадок дискретних блукань (див., наприклад, [2, с. 92]) – фактично, в ньому йде мова про час перебування на півпрямій $[0,+\infty)$. В 1949 р. у праці [3] Чжуном і Хантом та в [4] Феллером для простого симетричного випадкового блукання на прямій було встановлено збіжність розподілу нормованого часу перебування в нулі до розподілу модуля стандартної гауссової випадкової величини (див. також [2, с. 98] і більш загальний результат Добрушина в [5]). В 1960 р. Ердеш і Тейлор у [6] показали, що для простого симетричного блукання на площині граничним розподілом нормованого часу перебування в нулі є експоненціальний розподіл. Результати Чжуна–Ханта–Феллера і Ердеша–Тейлора легко переформулювати в термінах тривимірного блукання $\vec{X}$ (за додаткової умови $p_1 = p_2 = p_3 = 1/2$): в першому з них мова фактично йде про асимптотичний розподіл часу перебування на одній координатній площині (наприклад, XOY), а в другому – на одній координатній осі (скажімо, на OZ).

Аналогічні результати для броунівського руху було одержано в працях Калліанпура й Роббінса [7] та Дарлінга й Каца [8]. Внаслідок інваріантності розподілу броунівського руху відносно поворотів такі самі твердження будуть справедливі і для довільних прямих/площин у просторі $\mathbb{R}^3$, що проходять через нуль. Зокрема, це стосується й розглянутої вище діагоналі d. Проблема однак полягає в тому, що, на відміну від багатовимірного броунівського руху, багатовимірні дискретні блукання не є інваріантними відносно поворотів (розподіл вектора $U\vec{X}$, де $U \in SO(3)$, відмінний від розподілу $\vec{X}$), що унеможливлює використання наведених результатів у дискретному випадку. Інші численні результати про асимптотичну поведінку різних локальних часів і часів перебування для простого симетричного випадкового блукання на прямій можна знайти в монографії [9].

Основний результат і його обговорення

Насамперед зауважимо, що поставлена задача становить інтерес лише для однаково розподілених блукань, тобто при $p_1 = p_2 = p_3$. Дійсно, якщо $p_i \neq p_j$ для деяких $i, j \in \{1,2,3\}$, то блукання $X_i - X_j$ не буде рекурентним, тобто з імовірністю 1 протягом нескінченного часу відвідає нуль лише скінченну кількість разів. В цьому випадку $\lim\limits_{n\to\infty} T(n) < \infty$ м.н., що унеможливлює розгляд граничного розподілу. Тому надалі всюди припускатимемо, що $p_1 = p_2 = p_3 =: p$, $q_1 = q_2 = q_3 =: q$.

Результати праці [6] Ердеша і Тейлора дають підставу очікувати, що як граничний розподіл в цій задачі також виступатиме експоненціальний розподіл, хоча й з іншою нормувальною функцією. Це припущення дійсно виявляється правильним. Зокрема, має місце таке твердження (основний результат роботи).

Теорема. Нехай випадкова величина ξ розподілена за експоненціальним законом з параметром 1. Тоді має місце збіжність за розподілом

$$2pq\pi\sqrt{3}\cdot\frac{T(n)}{\ln n} \xrightarrow{\ d\ } \xi,\ n\to\infty. \quad (4)$$

Крім того, має місце збіжність відповідних моментів будь-якого додатного порядку.

Зауважимо, що співвідношення (4) можна переписати у такому вигляді: для будь-якого $x \ge 0$

$$\mathbf{P}\{T(n) > x\ln n\} \to e^{-2pq\pi\sqrt{3}\cdot x},\ n\to\infty.$$

Доведення основного результату

Для будь-яких цілих $m \ge 1$ і $k_1,\ldots,k_m \ge 0$ введемо функцію

$$p(k_1,\ldots,k_m) := \mathbf{P}\{X_1(k_1) = X_2(k_1) = X_3(k_1),\ldots,X_1(k_m) = X_2(k_m) = X_3(k_m)\}, \quad (5)$$

яка визначає ймовірність потрійних зіткнень у моменти $k_1,\ldots,k_m$ (можливо, й у деякі інші). Зауважимо, що числа $k_1,\ldots,k_m$ тут не впорядковані та не обов'язково різні. Але, якщо $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$, то з однорідності та строгої марковості випадкового блукання випливатиме співвідношення

$$p(k_1,\ldots,k_m) = p(k_1)p(k_2-k_1)\ldots p(k_m-k_{m-1}). \quad (6)$$

Лема. При $k\to\infty$ має місце асимптотична формула $p(k) \sim (2pq\pi\sqrt{3}\cdot k)^{-1}$.

Д о в е д е н н я. Функцію p можна переписати в такому вигляді:

$$p(k) = \mathbf{P}\{X_1(k) = X_2(k) = X_3(k)\} = \sum_{l=-k}^{k}\mathbf{P}\{X_1(k) = X_2(k) = X_3(k) = l\} =$$

$$= \sum_{l=-k}^{k} \mathbf{P}^3\{X_1(k) = l\} = \sum_{l=0}^{k} (C_k^l)^3 p^{3l} q^{3k-3l}. \qquad (7)$$

Згідно з локальною граничною теоремою для схеми Бернуллі (див., наприклад, [10, с. 79]), вираз під знаком суми при $k \to \infty$ асимптотично еквівалентний $\frac{1}{(2\pi kpq)^{3/2}} e^{-\frac{3(l-kp)^2}{2kpq}}$, причому для будь-якої функції $\varphi(k) = o(kpq)^{2/3}$ ця еквівалентність є рівномірною за l при $|l - kp| < \varphi(k)$. Як функцію φ виберемо, наприклад, $\varphi(k) = (kpq)^{7/12}$. Тоді, як легко пересвідчитися, внесок інших l в суму (7) є експоненціально малим і тому

$$p(k) \sim \sum_{\substack{kp-\varphi(k)<l \\ l<kp+\varphi(k)}} \frac{1}{(2\pi kpq)^{3/2}} e^{-\frac{3(l-kp)^2}{2kpq}} \sim$$

$$\sim \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi kpq)^{3/2}} e^{-\frac{3(l-kp)^2}{2kpq}} \sim$$

$$\sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi kpq)^{3/2}} e^{-\frac{3(x-kp)^2}{2kpq}} dx = (2pq\pi\sqrt{3}\cdot k)^{-1}.$$

Лему доведено.

Зауважимо, що у випадку $p = 1/2$ можна навести й безпосереднє доведення леми без застосування локальної граничної теореми ([11, с. 392]).

Доведення теореми. Нехай ξ – випадкова величина, розподілена за експоненціальним законом з параметром 1. Тоді $\mathbf{E}\xi^m = \int_0^\infty x^m e^{-x} dx = m!$ для $m \ge 1$ і послідовність цих моментів визначає розподіл ξ однозначно. Тому згідно з методом моментів для доведення обох тверджень теореми досить показати, що для всіх $m \ge 1$

$$\mathbf{E}T^m(n) \sim (2pq\pi\sqrt{3})^{-m} m! \cdot \ln^m n, \; n \to \infty. \qquad (8)$$

З формул (3), (5) випливає таке співвідношення для моменту $\mathbf{E}T^m(n)$:

$$\mathbf{E}T^m(n) = \mathbf{E}\sum_{k_1=0}^{n} \cdots \sum_{k_m=0}^{n} \mathbf{1}\{X_1(k_1) =$$

$$= X_2(k_1) = X_3(k_1)\} \cdot \ldots \cdot \mathbf{1}\{X_1(k_m) = X_2(k_m) =$$

$$= X_3(k_m)\} = \sum_{k_1=0}^{n} \cdots \sum_{k_m=0}^{n} p(k_1, \ldots, k_m).$$

Останню формулу можна переписати у вигляді суми доданків, у кожному з яких аргументи функції p різні та впорядковані за зростанням:

$$\mathbf{E}T^m(n) = C_1 \sum_{k_1=0}^{n} p(k_1) + C_2 \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=k_1+1}^{n} p(k_1, k_2) + \ldots +$$

$$+ C_m \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=k_1+1}^{n} \ldots \sum_{k_m=k_{m-1}+1}^{n} p(k_1, k_2, \ldots, k_m), \qquad (9)$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_m$ – деякі додатні цілі константи, з яких для подальшого доведення важлива лише остання. Очевидно, що $C_m = m!$

Для будь-якого $r = 1, \ldots, m$ з формули (6) маємо

$$P_r := \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=k_1+1}^{n} \ldots \sum_{k_r=k_{r-1}+1}^{n} p(k_1, k_2, \ldots, k_r) =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=k_1+1}^{n} \ldots \sum_{k_r=k_{r-1}+1}^{n} p(k_1) p(k_2 - k_1) \ldots p(k_r - k_{r-1}) =$$

$$= \sum_{\vec{l} \in S_n} p(l_1) p(l_2) \ldots p(l_r),$$

де $S_n = \{\vec{l} \in \mathbb{N}^r : \sum_{j=1}^{r} l_j \le n\}$ – r-вимірний симплекс. Тому має місце двостороння нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^{[n/r]} p(k) \right)^r =$$

$$= \sum_{l_1=1}^{[n/r]} \sum_{l_2=1}^{[n/r]} \ldots \sum_{l_r=1}^{[n/r]} p(l_1) p(l_2) \ldots p(l_r) \le P_r \le$$

$$\le \sum_{l_1=1}^{n} \sum_{l_2=1}^{n} \ldots \sum_{l_r=1}^{n} p(l_1) p(l_2) \ldots p(l_r) = \left(\sum_{k=1}^{n} p(k) \right)^r.$$

З леми слідує, що ліва й права частини попередньої нерівності асимптотично еквівалентні при $n \to \infty$ послідовності $(2pq\pi\sqrt{3})^{-r} \cdot \ln^r n.$ Тому в зображенні (9) визначальним буде лише останній доданок ($r = m$) і вся сума стане еквівалентною $(2pq\pi\sqrt{3})^{-m} m! \cdot \ln^m n$. Це доводить формулу (8) і всю теорему.

Зауважимо, що питання про асимптотичний розподіл числа зіткнень втрачає сенс при розгляді більше трьох випадкових блукань. Дійсно, аналогічно доведенню леми можна показати, що вже для чотирьох блукань функція $p(k) = \mathbf{P}\{X_1(k) = X_2(k) = X_3(k) = X_4(k)\}$ має порядок $k^{-3/2}$ при $k \to \infty$. Тому в цьому випадку (а відтак і у випадку більшої кількості блукань) буде $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}T(n) < \infty$, а отже, й $\lim\limits_{n\to\infty} T(n) < \infty$ майже напевно.

Висновки

В статті досліджувалася асимптотична поведінка розподілу числа зіткнень трьох незалежних простих несиметричних випадкових блукань на прямій. З геометричної точки зору ця задача еквівалентна задачі про асимптотику розподілу часу перебування тривимірного випадкового блукання на діагоналі $d = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$. Основний результат роботи стверджує, що розподіл числа зіткнень (з логарифмічним нормуванням) є асимптотично експоненціальним. Це узгоджується з результатом Ердеша і Тейлора [6] про час перебування тривимірного випадкового блукання на осі OZ.

Подальшим напрямом досліджень може бути вивчення асимптотики часу перебування тривимірного блукання на довільній діофантовій прямій або, більш загально, на довільних підмножинах тривимірної цілочислової ґратки.

1. *Lévy P.* Sur certains processus stochastiques homogines // Compositio Mathematica. – 1939. – **7**. – P. 283–339.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1. – 2-е изд. – М.: Мир, 1964. – 498 с.
3. *Chung K.L., Hunt G.A.* On the zeros of $\sum\limits_1^n \pm 1$ // Annals of mathematics. – 1949. – **50**, N 2. – P. 385–400.
4. *Feller W.* Fluctuation theory of recurrent events // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **67**, N 1. – P. 98–119.
5. *Добрушин Р.Л.* Две предельные теоремы для простейшего случайного блуждания по прямой // Успехи мат. наук. – 1955. – **10:3**, № 65. – С. 139–146.
6. *Erdős P., Taylor S.J.* Some problems concerning the structure of random walk paths // Acta Math. Acad. Sci. Hung. – 1960. – **11**. – P. 137–162.
7. *Kallianpur G., Robbins H.* Ergodic Property of the Brownian Motion Process // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 1953. – **39**, N 6. – P. 525–533.
8. *Darling D.A., Kac M.* On occupation times for Markoff processes // Trans. Amer. Math. Soc. – 1957. – **84**. – P. 444–458.
9. *Révész P.* Random Walks in Random and Non-Random Environments. – 2nd ed. – Singapore: World Scientific, 2005. – 396 p.
10. *Ширяев А.Н.* Вероятность. Т. 1. – 3-е изд. – М.: МЦНМО, 2004. – 520 с.
11. *Избранные* задачи по вещественному анализу / Б.М. Макаров, М.Г. Голузина, А.А. Лодкин, А.Н. Подкорытов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 624 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
10 червня 2011 року