УДК 517.977

В.О. Капустян, І.С. Лазаренко

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

This paper considers the issues of optimal control for singular perturbed by the spatial value linear parabolic equations with nonlocal boundary value conditions and the quadratic performance criterion. We construct the complete asymptotes of optimal solutions for the initial problem under optimal conditions by boundary functions method. Unlike similar problems for parabolic equations with local boundary value conditions, the iterative problems for boundary functions do not “decompose”. We prove that their solutions belong to the class of boundary functions, and complete decompositions are asymptotes of solutions of the corresponding order for the initial problem.

Вступ

Крайові задачі для одновимірних по просторовій координаті параболічних рівнянь з нелокальними крайовими умовами систематично вивчались у працях [1, 2]. Двовимірні еліптичні рівняння з нелокальними крайовими умовами розглядались у [3, 4]. Спектральним методом по деякому базису Ріса знайдено єдині класичні розв’язки вказаних задач і досліджено їхні властивості.

Задачі оптимального керування для параболічних рівнянь з нелокальними крайовими умовами вивчались у працях [5, 6]. Відзначимо характерні особливості цих задач: 1) керування мають забезпечувати класичну розв’язність вихідної крайової задачі; 2) відсутність апріорних оцінок для розв’язків крайових задач. Ці особливості зумовлюють використання в постановках задач оптимального керування спеціальних норм. Використати результати [5, 6] в аналогічних задачах для сингулярно збурених рівнянь виявилось складно через відсутність досліджень асимптотичних властивостей спектральних задач, породжених просторовим диференційним оператором вихідної задачі.

Постановка задачі

Мета статті – методом примежових функцій побудувати та обґрунтувати асимптотики розв’язку задач оптимального керування в традиційній постановці, характерній для аналогічних задач з локальними крайовими умовами [7].

Розподілене керування. Умови оптимальності

Нехай в області $Q = \{(x,t) : x \in [0,1], t \in [0, 2\pi]\}$ керований процес описується функцією $y_\varepsilon(x,t)$, яка задовольняє крайову задачу

$$D_\varepsilon y_\varepsilon(x,t) = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 y_\varepsilon(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial y_\varepsilon(x,t)}{\partial t} = u(x,t) + f(x,t), \quad (1)$$

$$y_\varepsilon(x,0) = y_\varepsilon(x,2\pi), \quad (2)$$

$$y_\varepsilon(0,t) = 0, \ \frac{\partial y_\varepsilon(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial y_\varepsilon(1,t)}{\partial x} + \alpha y_\varepsilon(1,t), \quad (3)$$

де

$$u(x,t) \in C(Q), f(x,t) \in C^\infty_{\text{per}}(Q) = \{\hat{f}(x,t) \in C^\infty(Q) : \partial^j \hat{f}(x,0)/\partial t^j = \partial^j \hat{f}(x,2\pi)/\partial t^j, j = 0,1,\ldots\}, \ 0 < \varepsilon << 1.$$

При фіксованих $\varepsilon, u(x,t)$ крайова задача (1)–(3) має єдиний класичний розв’язок, який можна побудувати аналогічно [5] по деякій біортогональній системі функцій.

Необхідно знайти керування $u_{\text{opt},\varepsilon}(x,t) \in C(Q)$, що доставляє найменше значення функціоналу

$$I_\varepsilon(u) = 0,5\left(\int_Q ((y_\varepsilon(x,t) - z(x,t))^2 + u^2(x,t))dxdt\right), \quad (4)$$

де $z(x,t) \in C^\infty_{\text{per}}(Q)$.

Сформульована задача оптимального керування має єдиний розв’язок. Дійсно, вона має альтернативне вираження через коефіцієнти Фур’є по повній системі функцій $\{\exp(k\iota t)\}_{k=-\infty}^{\infty}$, де $\iota^2 = -1$. В термінах коефіцієнтів Фур’є задача (1)–(4) набуває вигляду

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \mathrm{Re}(\hat{y}_{\varepsilon,k}(x))}{dx^2} + k\,\mathrm{Im}(\hat{y}_{\varepsilon,k}(x)) =$$

$$= \mathrm{Re}(\hat{u}_k(x)) + \mathrm{Re}(\hat{f}_k(x)),$$

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \mathrm{Im}(\hat{y}_{\varepsilon,k}(x))}{dx^2} - k\,\mathrm{Re}(\hat{y}_{\varepsilon,k}(x)) =$$

$$= \mathrm{Im}(\hat{u}_k(x)) + \mathrm{Im}(\hat{f}_k(x)), \qquad (5)$$

$$\hat{y}_{\varepsilon,k}(0) = 0,\ \frac{d\hat{y}_{\varepsilon,k}(0)}{dx} = \frac{d\hat{y}_{\varepsilon,k}(1)}{dx} + \alpha \hat{y}_{\varepsilon,k}(1,t);$$

$$I_\varepsilon(u) = \pi\left(\int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} [|\hat{y}_{\varepsilon,k}(x) - \hat{z}_k(x)|^2 + |\hat{u}_k(x)|^2]dx\right), \quad (6)$$

де $\hat{y}_{\varepsilon,k}(x), \hat{u}_k(x), \hat{f}_k(x), \hat{z}_k(x)$ — коефіцієнти Фур'є відповідних функцій, $|\cdot|$ — модуль комплексного числа.

В силу того, що інтеграл (6) існує, задача (5), (6) еквівалентна послідовності скінченно-вимірних задач оптимального керування для систем (5) з критеріями

$$I_{\varepsilon,k}(u) = \pi\left(\int_0^1 [|\hat{y}_{\varepsilon,k}(x) - \hat{z}_k(x)|^2 + |\hat{u}_k(x)|^2]dx\right). \quad (7)$$

Тоді оптимальне керування $u_{\mathrm{opt},\varepsilon}(x,t)$ задовольняє необхідні та достатні умови оптимальності

$$D_\varepsilon y_{\mathrm{opt},\varepsilon}(x,t) = -p_{\mathrm{opt},\varepsilon}(x,t) + f(x,t), \qquad (8)$$

$$D_\varepsilon^* p_{\mathrm{opt},\varepsilon}(x,t) = y_{\mathrm{opt},\varepsilon}(x,t) - z(x,t), \qquad (9)$$

$$p_{\mathrm{opt},\varepsilon}(x,0) = p_{\mathrm{opt},\varepsilon}(x,2\pi), \qquad (10)$$

$$p_{\mathrm{opt},\varepsilon}(0,t) = p_{\mathrm{opt},\varepsilon}(1,t),$$
$$\frac{\partial p_{\mathrm{opt},\varepsilon}(1,t)}{\partial x} + \alpha p_{\mathrm{opt},\varepsilon}(1,t) = 0, \qquad (11)$$

де $D_\varepsilon^*(\cdot) = \varepsilon^2 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$, причому, функція $y_{\mathrm{opt},\varepsilon}(x,t)$ задовольняє крайові умови (2), (3):

$$u_{\mathrm{opt},\varepsilon}(t) = -p_{\mathrm{opt},\varepsilon}(x,t).$$

Для розв'язків задачі (8)—(11) отримаємо апріорні оцінки. З цією метою рівняння (8) домножимо на $-p_{\mathrm{opt},\varepsilon}(x,t)$, а рівняння (9) — на $y_{\mathrm{opt},\varepsilon}(x,t)$, результати складемо та проінтегруємо по Q із врахуванням крайових умов.

Вказані дії приведуть нас до тотожності

$$\int_Q (y_{\mathrm{opt},\varepsilon}^2(x,t) + p_{\mathrm{opt},\varepsilon}^2(x,t))\,dxdt =$$
$$= \int_Q (p_{\mathrm{opt},\varepsilon}(x,t) f(x,t) + y_{\mathrm{opt},\varepsilon}(x,t) z(x,t))dxdt,$$

звідки матимемо оцінку в $L_2(Q)$

$$\| y_{\mathrm{opt},\varepsilon} \| + \| p_{\mathrm{opt},\varepsilon} \| \le C(\| f \| + \| z \|). \qquad (12)$$

Формальні асимптотики. Обґрунтування

Побудуємо формальні асимптотики в задачі, що розглядається, які будемо шукати стандартно:

$$y_\varepsilon(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j (y_j(x,t) + Y_j^1(\eta,t) + Y_j^2(\bar{\eta},t)),$$
$$p_\varepsilon(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j (p_j(x,t) + P_j^1(\eta,t) + P_j^2(\bar{\eta},t)), \qquad (13)$$

де $\eta = x/\varepsilon$, $\bar{\eta} = (x-1)\varepsilon$.

Коефіцієнти розкладу (13) задовольняють такі задачі:

для зовнішнього розкладу

$$\frac{\partial^2 y_{j-2}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial y_j(x,t)}{\partial t} = -p_j(x,t) + f(x,t)\delta_{j,0},$$

$$\frac{\partial^2 p_{j-2}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial p_j(x,t)}{\partial t} = y_j(x,t) - z(x,t)\delta_{j,0}, \quad (14)$$

$$y_j(x,0) = y_j(x,2\pi),\ p_j(x,0) = p_j(x,2\pi);$$

для внутрішнього розкладу (лівий примежовий шар)

$$\frac{\partial^2 Y_j^1(\eta,t)}{\partial \eta^2} - \frac{\partial Y_j^1(\eta,t)}{\partial t} = -P_j^1(\eta,t),$$

$$\frac{\partial^2 P_j^1(\eta,t)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial P_j^1(\eta,t)}{\partial t} = Y_j^1(\eta,t), \eta > 0,$$

$$Y_j^1(\eta,0) = Y_j^1(\eta,2\pi),\ P_j^1(\eta,0) = P_j^1(\eta,2\pi),$$

$$Y_j^1(0,t) = -y_j(0,t), \qquad (15)$$

$$\frac{\partial y_{j-1}(0,t)}{\partial x} + \frac{\partial Y_j^1(0,t)}{\partial \eta} = \frac{\partial y_{j-1}(1,t)}{\partial x} + \frac{\partial Y_j^2(0,t)}{\partial \overline{\eta}} + $$
$$+ \alpha(y_{j-1}(1,t) + Y_{j-1}^2(0,t));$$

для внутрішнього розкладу (правий примежовий шар)

$$\frac{\partial^2 Y_j^2(\overline{\eta},t)}{\partial \overline{\eta}^2} - \frac{\partial Y_j^2(\overline{\eta},t)}{\partial t} = -P_j^2(\overline{\eta},t),$$

$$\frac{\partial^2 P_j^2(\overline{\eta},t)}{\partial \overline{\eta}^2} + \frac{\partial P_j^2(\overline{\eta},t)}{\partial t} = Y_j^2(\overline{\eta},t), \overline{\eta} < 0,$$

$$Y_j^2(\overline{\eta},0) = Y_j^2(\overline{\eta},2\pi),\ P_j^2(\overline{\eta},0) = P_j^2(\overline{\eta},2\pi),$$

$$p_j(0,t) + P_j^1(0,t) = p_j(1,t) + P_j^2(0,t), \qquad (16)$$

$$\frac{\partial p_{j-1}(1,t)}{\partial x} + \frac{\partial P_j^2(0,t)}{\partial \overline{\eta}} + \alpha(p_{j-1}(1,t) +$$
$$+ P_{j-1}^2(0,t)) = 0.$$

Ітераційні задачі (14) однозначно розв'язні. Далі нам будуть необхідні їх розв'язки в термінах коефіцієнтів Фур'є по повній системі функцій $\{\exp(k\iota t)\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Тоді вказані розв'язки мають вигляд

$$y_j(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(k\iota t) y_{j,k}(x),$$
$$p_j(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(k\iota t) p_{j,k}(x), \qquad (17)$$

де

$$y_{j,k}(x) = $$
$$= \frac{-(f_k(x)\delta_{j,0} - y''_{j-2,k}(x))k\iota + z_k(x)\delta_{j,0} + p''_{j-2,k}(x)}{k^2+1},$$

$$p_{j,k}(x) = \qquad (18)$$
$$= \frac{-(z_k(x)\delta_{j,0} + p''_{j-2,k}(x))k\iota + f_k(x)\delta_{j,0} - y''_{j-2,k}(x)}{k^2+1},$$

причому $f_k(x), z_k(x)$ — коефіцієнти Фур'є відповідних функцій.

З властивостей функцій $f(x,t), z(x,t)$ та виразів (17), (18) слідує, що $y_j(x,t), p_j(x,t) \in$ $\in C_{\text{per}}^{\infty}(Q)\ \forall j.$

З (15) і (16) слідує, що задачі для внутрішніх розкладів не розпадаються, що було характерно для відповідних задач з локальними крайовими умовами. Покажемо, що вони проте є примежовими. З цією метою знайдемо нульову складову розкладу (13). Задачі (15), (16) розв'язуємо методом Фур'є по повній системі $\{\exp(k\iota t)\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Тоді для коефіцієнтів розкладу розв'язків вказаних задач отримаємо

$$\frac{d^2\alpha_{0,k}^1(\eta)}{d\eta^2} + k\iota\alpha_{0,k}^1(\eta) = -\beta_{0,k}^1(\eta),$$

$$\frac{d^2\beta_{0,k}^1(\eta)}{d\eta^2} - k\iota\beta_{0,k}^1(\eta) = \alpha_{0,k}^1(\eta), \eta > 0, \qquad (19)$$

$$\alpha_{0,k}^1(0) = -y_{0,k}(0),\ \frac{d\alpha_{0,k}^1(0)}{d\eta} = \frac{d\alpha_{0,k}^2(0)}{d\overline{\eta}};$$

$$\frac{d^2\alpha_{0,k}^2(\overline{\eta})}{d\overline{\eta}^2} + k\iota\alpha_{0,k}^2(\overline{\eta}) = -\beta_{0,k}^2(\overline{\eta}),$$

$$\frac{d^2\beta_{0,k}^2(\overline{\eta})}{d\overline{\eta}^2} - k\iota\beta_{0,k}^2(\overline{\eta}) = \alpha_{0,k}^2(\overline{\eta}), \overline{\eta} < 0,$$

$$p_{0,k}(0) + \beta_{0,k}^1(0) = p_{0,k}(1) + \beta_{0,k}^2(0), \qquad (20)$$

$$\frac{d\beta_{0,k}^2(0)}{d\overline{\eta}} = 0,$$

де $y_{0,k}(0), p_{0,k}(0), p_{0,k}(1)$ — складові розкладів у ряд Фур'є для функцій $y_0(0,t), p_0(0,t), p_0(1,t)$ відповідно.

Примежові загальні розв'язки систем з (19), (20) мають вигляд

$$\alpha_{0,k}^1(\eta) = \exp\left(-\left(\frac{k^2+1}{4}\right)^{1/4}(1+\iota)\eta\right)c_{0,k}^{1,1} +$$
$$+ \exp\left(-\left(\frac{k^2+1}{4}\right)^{1/4}(1-\iota)\eta\right)c_{0,k}^{1,2},$$

$$\beta_{0,k}^1(\eta) =$$
$$= -\iota(\sqrt{k^2+1}+k)\exp\left(-\left(\frac{k^2+1}{4}\right)^{1/4}(1+\iota)\eta\right)c_{0,k}^{1,1} +$$

$$+\iota(\sqrt{k^2+1}-k)\exp\left(-\left(\frac{k^2+1}{4}\right)^{1/4}(1-\iota)\eta\right)c_{0,k}^{1,2},\ \eta>0,$$

$$\alpha_{0,k}^2(\bar\eta)=\exp\left(\left(\frac{k^2+1}{4}\right)^{1/4}(1+\iota)\bar\eta\right)c_{0,k}^{2,1}+$$
$$+\exp\left(\left(\frac{k^2+1}{4}\right)^{1/4}(1-\iota)\bar\eta\right)c_{0,k}^{2,2},\qquad(21)$$

$$\beta_{0,k}^2(\bar\eta)=$$
$$=-\iota(\sqrt{k^2+1}+k)\exp\left(\left(\frac{k^2+1}{4}\right)^{1/4}(1+\iota)\bar\eta\right)c_{0,k}^{2,1}+$$
$$+\iota(\sqrt{k^2+1}-k)\exp\left(\left(\frac{k^2+1}{4}\right)^{1/4}(1-\iota)\bar\eta\right)c_{0,k}^{2,2},\ \bar\eta<0.$$

З (21) і граничних умов для крайових задач (19), (20) отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення констант виразу (21):

$$c_{0,k}^{1,1}+c_{0,k}^{1,2}=y_{0,k}(0),$$

$$-\iota c_{0,k}^{1,1}-c_{0,k}^{1,2}=-\iota c_{0,k}^{2,1}+c_{0,k}^{2,2},$$

$$p_{0,k}(0)-\iota(\sqrt{k^2+1}+k)c_{0,k}^{1,1}+\iota(\sqrt{k^2+1}-k)c_{0,k}^{1,2}=\qquad(22)$$

$$=p_{0,k}(1)-\iota(\sqrt{k^2+1}+k)c_{0,k}^{2,1}+\iota(\sqrt{k^2+1}-k)c_{0,k}^{2,2},$$

$$-(1+\iota)(\sqrt{k^2+1}+k)c_{0,k}^{2,1}+(1-\iota)(\sqrt{k^2+1}-k)c_{0,k}^{2,2}=0.$$

Визначник системи (22) відмінний від нуля, тому вона однозначно розв'язна для довільних k, а ряди Фур'є для функцій $Y_0^1(\eta,t),P_0^1(\eta,t)$, $Y_0^2(\bar\eta,t),P_0^2(\bar\eta,t)$ по системі $\{\exp(k\ \iota\ t)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ визначають експоненційно спадний класичний розв'язок відповідної крайової задачі. При $j\neq 0$ результат буде таким же. Тим самим ми побудували формальний розв'язок системи оптимальності у вигляді асимптотичних рядів (13).

Обмежимося в рядах (13) скінченним числом доданків, тобто

$$y_\varepsilon^n(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j(y_j(x,t)+Y_j^1(\eta,t)+Y_j^2(\bar\eta,t)),$$

$$p_\varepsilon^n(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j(p_j(x,t)+P_j^1(\eta,t)+P_j^2(\bar\eta,t)).\qquad(23)$$

Теорема. Нехай у задачі (1)–(4) $f(x,t)$, $z(x,t)\in C_{\mathrm{per}}^{\infty}(Q)$, функції $y_j(x,t),p_j(x,t)$ – розв'язки системи (14), $Y_j^1(\eta,t),P_j^1(\eta,t),Y_j^2(\bar\eta,t)$, $P_j^2(\bar\eta,t)$ – примежові розв'язки систем (15), (16). Тоді вираз (23) дає повну асимптотику розв'язку вихідної задачі оптимального керування з оцінками

$$\|y_{\mathrm{opt},\varepsilon}-y_\varepsilon^n\|+\|u_{\mathrm{opt},\varepsilon}-u_\varepsilon^n\|\le C\varepsilon^{n+1},$$
$$|I_\varepsilon(u_{\mathrm{opt},\varepsilon})-I_\varepsilon^n|\le C\varepsilon^{n+1},\qquad(24)$$

де

$$u_\varepsilon^n(x,t)=-p_\varepsilon^n(x,t),$$

$$I_\varepsilon^n=0,5\left(\int_Q((y_\varepsilon^n(x,t)-z(x,t))^2+(u_\varepsilon^n(x,t))^2)\,dxdt\right).$$

Доведення. Визначимо величини похибок $\delta_\varepsilon^n y(x,t)=y_{\mathrm{opt},\varepsilon}(x,t)-y_\varepsilon^n(x,t)$, $\delta_\varepsilon^n p(x,t)=$ $=p_{\mathrm{opt},\varepsilon}(x,t)-p_\varepsilon^n(x,t)$. Вони задовольняють крайову задачу

$$D_\varepsilon\delta_\varepsilon^n y(x,t)=-\delta_\varepsilon^n p(x,t)+F_n(x,t,\varepsilon),$$
$$\delta_\varepsilon^n y(x,0)=\delta_\varepsilon^n y(x,2\pi),\qquad(25)$$

$$\delta_\varepsilon^n y(0,t)=0,$$
$$\frac{\partial\delta_\varepsilon^n y(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\delta_\varepsilon^n y(1,t)}{\partial x}+\alpha\delta_\varepsilon^n y(1,t)+F_n^{(1)}(t,\varepsilon),\qquad(26)$$

$$D_\varepsilon^*\delta_\varepsilon^n p(x,t)=\delta_\varepsilon^n y(x,t)+Z_n(x,t,\varepsilon),$$
$$\delta_\varepsilon^n p(x,0)=\delta_\varepsilon^n p(x,2\pi),\qquad(27)$$

$$\delta_\varepsilon^n p_{\mathrm{opt},\varepsilon}(0,t)=\delta_\varepsilon^n p(1,t),$$
$$\frac{\partial\delta_\varepsilon^n p(1,t)}{\partial x}+\alpha\delta_\varepsilon^n p(1,t)=Z_n^{(1)}(t,\varepsilon),\qquad(28)$$

де

$$F_n(x,t,\varepsilon)=-\left(\varepsilon^{n+1}\frac{\partial^2 y_{n-1}(x,t)}{\partial x^2}+\varepsilon^{n+2}\frac{\partial^2 y_n(x,t)}{\partial x^2}\right),$$

$$F_n^{(1)}(t,\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon^{n+1}\left[\left(\frac{\partial y_n(1,t)}{\partial x} - \frac{\partial y_n(0,t)}{\partial x}\right) + \alpha\left(y_n(1,t) + Y_n^2(0,t)\right)\right],$$

$$Z_n(x,t,\varepsilon) = -\left(\varepsilon^{n+1}\frac{\partial^2 p_{n-1}(x,t)}{\partial x^2} + \varepsilon^{n+2}\frac{\partial^2 p_n(x,t)}{\partial x^2}\right),$$

$$Z_n^{(1)}(t,\varepsilon) = -\varepsilon^{n+1}\left[\frac{\partial p_n(1,t)}{\partial x} + \alpha\left(p_n(1,t) + P_n^2(0,t)\right)\right].$$

Використати оцінку (12) для розв'язку системи (25)–(28) ми не можемо в силу неоднорідності крайових умов в останній. Використовуючи заміну змінних у вигляді

$$\delta_\varepsilon^n y(x,t) = \tilde{\delta}_\varepsilon^n y(x,t) - xF_n^{(1)}(t,\varepsilon)/\alpha,$$
$$\delta_\varepsilon^n p(x,t) = \tilde{\delta}_\varepsilon^n p(x,t) + Z_n^{(1)}(t,\varepsilon)/\alpha, \qquad (29)$$

для функцій $\tilde{\delta}_\varepsilon^n y(x,t), \tilde{\delta}_\varepsilon^n p(x,t)$ отримаємо задачу

$$D_\varepsilon \tilde{\delta}_\varepsilon^n y(x,t) = -\tilde{\delta}_\varepsilon^n p(x,t) + \tilde{F}_n(x,t,\varepsilon); \qquad (30)$$

$$\tilde{\delta}_\varepsilon^n y(x,0) = \tilde{\delta}_\varepsilon^n y(x,2\pi),$$
$$\tilde{\delta}_\varepsilon^n y(0,t) = 0,\ \frac{\partial\tilde{\delta}_\varepsilon^n y(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial\tilde{\delta}_\varepsilon^n y(1,t)}{\partial x} + \alpha\tilde{\delta}_\varepsilon^n y(1,t); \qquad (31)$$

$$D_\varepsilon^* \tilde{\delta}_\varepsilon^n p(x,t) = \tilde{\delta}_\varepsilon^n y(x,t) + \tilde{Z}_n(x,t,\varepsilon); \qquad (32)$$

$$\tilde{\delta}_\varepsilon^n p(x,0) = \tilde{\delta}_\varepsilon^n p(x,2\pi),$$
$$\tilde{\delta}_\varepsilon^n p_{\text{opt},\varepsilon}(0,t) = \tilde{\delta}_\varepsilon^n p(1,t), \frac{\partial\tilde{\delta}_\varepsilon^n p(1,t)}{\partial x} + \alpha\tilde{\delta}_\varepsilon^n p(1,t) = 0, \qquad (33)$$

де

$$\tilde{F}_n(x,t,\varepsilon) = F_n(x,t,\varepsilon) - \frac{x}{\alpha}\frac{\partial F_n^{(1)}(t,\varepsilon)}{\partial t},$$

$$\tilde{Z}_n(x,t,\varepsilon) = Z_n(x,t,\varepsilon) - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial Z_n^{(1)}(t,\varepsilon)}{\partial t}.$$

Тоді з (12), (23), (29)–(33) і умов оптимальності отримаємо оцінки (25).

Розділене керування

У задачі (1)–(4) внесемо такі зміни: в рівнянні (1) покладемо $u(x,t) = g(x)v(t)$, $g(x) \in C^\infty(0,1)$, $|g(x)| \ge \beta > 0\ \forall x \in [0,1]$; $v(t) \in C(0,2\pi)$, а замість функціоналу (4) будемо розглядати функціонал

$$I_\varepsilon(v) = 0,5\left(\int_Q ((y_\varepsilon(x,t) - z(x,t))^2 + v^2(t))dxdt\right) \qquad (34)$$

з такою ж функцією $z(x,t)$, як і в попередньому пункті.

Розв'язність отриманої задачі встановлюється аналогічно розв'язності задачі оптимального керування з розподіленим керуванням. Оптимальне керування $v_{\text{opt},\varepsilon}(t)$ задовольняє необхідні та достатні умови оптимальності (8)–(11), в яких замість рівняння (8) слід взяти рівняння

$$D_\varepsilon y_{\text{opt},\varepsilon}(x,t) = -g(x)(g(\cdot), p_{\text{opt},\varepsilon}(\cdot,t))_{L_2(0,1)} + f(x,t),$$

$$v_{\text{opt},\varepsilon}(x,t) = -(g(\cdot), p_{\text{opt},\varepsilon}(\cdot,t))_{L_2(0,1)}. \qquad (35)$$

Замість оцінки (12) використаємо оцінку

$$\| y_{\text{opt},\varepsilon} \|_{L_2(Q)} + \| v_{\text{opt},\varepsilon} \|_{L_2(0,2\pi)} \le C(\| f \| + \| z \|). \qquad (36)$$

Формальні асимптотики умов оптимальності шукаємо у вигляді (13), де коефіцієнти для зовнішнього розкладу задовольняють задачі

$$\frac{\partial^2 y_{j-2}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial y_j(x,t)}{\partial t} = -g(x)\left[(g(\cdot), p_j(\cdot,t)) + \sum_{i=0}^{j-1}\frac{1}{i!}\times\right.$$
$$\times\left(\frac{d^i g(0)}{dx^i}\int_0^\infty \eta^i P_{j-1-i}^1(\eta,t)d\eta +\right.$$
$$\left.\left. + \frac{d^i g(1)}{dx^i}\int_0^\infty \bar{\eta}^i P_{j-1-i}^2(\bar{\eta},t)d\bar{\eta}\right)\right] + f(x,t)\delta_{j,0}, \qquad (37)$$

$$\frac{\partial^2 p_{j-2}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial p_j(x,t)}{\partial t} = y_j(x,t) - z(x,t)\delta_{j,0},$$

$$y_j(x,0) = y_j(x,2\pi),\ p_j(x,0) = p_j(x,2\pi);$$

для внутрішнього розкладу (лівий примежовий шар):

$$\frac{\partial^2 Y_j^1(\eta,t)}{\partial\eta^2} - \frac{\partial Y_j^1(\eta,t)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 P_j^1(\eta,t)}{\partial\eta^2} + \frac{\partial P_j^1(\eta,t)}{\partial t} = Y_j^1(\eta,t), \eta > 0,$$

$$Y_j^1(\eta,0)=Y_j^1(\eta,2\pi),\ P_j^1(\eta,0)=P_j^1(\eta,2\pi),$$
$$Y_j^1(0,t)=-y_j(0,t),$$
$$\frac{\partial y_{j-1}(0,t)}{\partial x}+\frac{\partial Y_j^1(0,t)}{\partial\eta}= \tag{38}$$
$$=\frac{\partial y_{j-1}(1,t)}{\partial x}+\frac{\partial Y_j^2(0,t)}{\partial\bar\eta}+\alpha(y_{j-1}(1,t)+Y_{j-1}^2(0,t));$$

для внутрішнього розкладу (правий примежовий шар):

$$\frac{\partial^2 Y_j^2(\bar\eta,t)}{\partial\bar\eta^2}-\frac{\partial Y_j^2(\bar\eta,t)}{\partial t}=0,$$
$$\frac{\partial^2 P_j^2(\bar\eta,t)}{\partial\bar\eta^2}+\frac{\partial P_j^2(\bar\eta,t)}{\partial t}=Y_j^2(\bar\eta,t),\bar\eta<0, \tag{39}$$
$$Y_j^2(\bar\eta,0)=Y_j^2(\bar\eta,2\pi),\ P_j^2(\bar\eta,0)=P_j^2(\bar\eta,2\pi),$$
$$p_j(0,t)+P_j^1(0,t)=p_j(1,t)+P_j^2(0,t),$$
$$\frac{\partial p_{j-1}(1,t)}{\partial x}+\frac{\partial P_j^2(0,t)}{\partial\bar\eta}+\alpha(p_{j-1}(1,t)+P_{j-1}^2(0,t))=0.$$

Ітераційні задачі (37) однозначно розв'язні та $y_j(x,t),\ p_j(x,t)\in C_{\text{per}}^{\infty}(Q)\ \ \forall j.$ Задачі для внутрішніх розкладів не розпадаються, але їх розв'язки є примежовими функціями. Дійсно, знайдемо розв'язок нульової складової для задач (38), (39). Для коефіцієнтів Фур'є вказаних задач отримаємо

$$\frac{d^2\alpha_{0,k}^1(\eta)}{d\eta^2}+k\iota\alpha_{0,k}^1(\eta)=0,$$
$$\frac{d^2\beta_{0,k}^1(\eta)}{d\eta^2}-k\iota\beta_{0,k}^1(\eta)=\alpha_{0,k}^1(\eta),\eta>0, \tag{40}$$
$$\alpha_{0,k}^1(0)=-y_{0,k}(0),\ \frac{d\alpha_{0,k}^1(0)}{d\eta}=\frac{d\alpha_{0,k}^2(0)}{d\bar\eta};$$
$$\frac{d^2\alpha_{0,k}^2(\bar\eta)}{d\bar\eta^2}+k\iota\alpha_{0,k}^2(\bar\eta)=0,$$
$$\frac{d^2\beta_{0,k}^2(\bar\eta)}{d\bar\eta^2}-k\iota\beta_{0,k}^2(\bar\eta)=\alpha_{0,k}^2(\bar\eta),\bar\eta<0, \tag{41}$$
$$p_{0,k}(0)+\beta_{0,k}^1(0)=p_{0,k}(1)+\beta_{0,k}^2(0),$$
$$\frac{d\beta_{0,k}^2(0)}{d\bar\eta}=0.$$

Примежові загальні розв'язки систем із (40), (41) мають вигляд

$$\alpha_{0,k}^1(\eta)=\exp\left(-\sqrt{\frac{|k|}{2}}(1-\operatorname{sign}k\iota)\eta\right)c_{0,k}^{1,1},$$
$$\beta_{0,k}^1(\eta)=\exp\left(-\sqrt{\frac{|k|}{2}}(1+\operatorname{sign}k\iota)\eta\right)c_{0,k}^{1,2}+$$
$$+\frac{1}{|k|\operatorname{sign}k+k}\iota\exp\left(-\sqrt{\frac{|k|}{2}}(1-\operatorname{sign}k\iota)\eta\right)c_{0,k}^{1,1},\eta>0;$$
$$\alpha_{0,k}^2(\bar\eta)=\exp\left(\sqrt{\frac{|k|}{2}}(1-\operatorname{sign}k\iota)\bar\eta\right)c_{0,k}^{2,1}, \tag{42}$$
$$\beta_{0,k}^2(\bar\eta)=\exp\left(\sqrt{\frac{|k|}{2}}(1+\operatorname{sign}k\iota)\bar\eta\right)c_{0,k}^{2,2}+$$
$$+\frac{1}{|k|\operatorname{sign}k+k}\iota\exp\left(\sqrt{\frac{|k|}{2}}(1-\operatorname{sign}k\iota)\bar\eta\right)c_{0,k}^{2,1},\bar\eta<0.$$

З граничних умов для крайових задач (40), (41) однозначно знаходимо константи у виразі (42).

При $j\neq 0$ результат буде таким же. Тим самим ми побудували формальний розв'язок системи оптимальності у вигляді асимптотичних рядів (13). Обґрунтування знайдених асимптотик виконується аналогічно попередньому пункту з використанням оцінки (36).

Висновки

У статті наведено результати з дослідження задач програмного оптимального керування для сингулярно збурених параболічних рівнянь з нелокальними крайовими умовами, періодичними початковими умовами та традиційними (квадратичними) критеріями якості.

Для розподіленого керування розглянуто лінійно-квадратичну задачу для параболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами. Виявилось, що для цієї задачі також властива асимптотична декомпозиція, але, на відміну від подібних задач з локальними крайовими умовами, тут не вдається "розщепити" задачі в розтягнутих координатах на окремі задачі в околі кожної їхньої граничної точки по просторовій змінній: ці задачі пов'язані між собою граничними умовами. Однак при цьому показано їх однозначну розв'язність у класі примежових функцій і доведено теорему, що обумовлює повний асимптотичний розв'язок задачі.

Для розділеного керування розглянуто лінійно-квадратичну задачу для параболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами. Для її розв'язку виявились справедливими якісні властивості, притаманні задачі з розподіленим керуванням.

1. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. – 1977. – **13**, № 2. – С. 294–304.
2. *Мокин А.Ю.* Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности // Там же. – 2009. – **45**, № 1. – С. 123–137.
3. *Моисеев Е.И., Амбарцумян В.Э.* О разрешимости нелокальной краевой задачи с равенством потоков на части границы и сопряженной к ней задачи // Там же. – 2010. – **46**, № 5. – С. 718–725.
4. *Моисеев Е.И., Амбарцумян В.Э.* О разрешимости нелокальной краевой задачи с противоположными потоками на части границы и сопряженной к ней задачи // Там же. – **46**, № 6. – С. 883–886.
5. *Капустян В.Е., Лазаренко И.С.* Задачи с минимальной энергией для параболических уравнений с нелокальными краевыми условиями // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Моделювання. – 2009. – **17**, № 8, вип. 1. – С. 47–60.
6. *Капустян В.Е., Лазаренко И.С.* Оптимальная стабилизация распределенным управлением решений параболических уравнений с нелокальными краевыми условиями // Компьютерная математика. – 2010. – № 2. – С. 149–155.
7. *Капустян В.Е.* Асимптотика локально ограниченных управлений в оптимальных параболических задачах // Укр. мат. журнал. – 1996. – **48**, № 1. – С. 50–56.

Рекомендована Радою
факультету менеджменту і маркетингу
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
27 травня 2011 року