УДК 517.589

О.В. Овчаренко

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ q-ІНТЕГРАЛЬНОГО ЗОБРАЖЕННЯ (τ,β)-УЗАГАЛЬНЕНОЇ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

The key objective of this paper is to obtain differential formulas for q-integral representation of (τ,β)-generalized hypergeometric function. To this end, we consider new (τ,β)-generalized hypergeometric functions ${}_2^qF_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$ and ${}_3^qF_2^{\tau,\beta}(a,b_1,b_2;c_1,c_2;z)$. Using the integral property of q-beta function for the function ${}_3^qF_2^{\tau,\beta}(z)$, we obtain the q-integral representation. Employing the body of the theory of fractional differentiation, we also investigate a series of q-differential relations for these new generalized hypergeometric functions. The results obtained allow widely applying ${}_2^qF_1^{\tau,\beta}(z)$, ${}_3^qF_2^{\tau,\beta}(z)$ functions to solve problems of mathematical physics, differential and integral equations, the theory of probability, mathematical statistics and others.

Вступ

Розв'язання багатьох задач математичної фізики, звичайних диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей і математичної статистики, теорії теплопровідності, аеромеханіки, квантової механіки, аеродинаміки, біомедицини тощо приводить до спеціальних функцій. Розвиток теорії спеціальних функцій — циліндричних і сферичних, еліптичних, функцій Матьє, гіпергеометричних функцій, поліномів Лежандра, Кравчука, Якобі, Чебишева і т.д. — особливо стимулював розроблення питання (яке виникло з практики розв'язання конкретних задач) про зображення функцій не тільки у вигляді тригонометричних рядів, а й у вигляді рядів за іншими спеціальними функціями [1–4].

Внаслідок широкого застосування спеціальних функцій у теорії диференціальних та інтегральних рівнянь в останні роки інтерес до них зріс і, зокрема, поглибились дослідження з теорії гіпергеометричних функцій. Загалом вивчення саме функцій гіпергеометричного типу займає важливе місце в теорії спеціальних функцій і засвідчує існування глибинних взаємозв'язків між різними галузями математики, оскільки використовує апарат теорії функцій дійсної та комплексної змінних, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії чисел, теорії дробового інтегро-диференціювання тощо [5–9].

Оскільки гіпергеометричні функції відіграють особливо важливу роль як в теорії, так і на практиці при розв'язанні багатьох задач у різноманітних галузях прикладної математики та фізики, то ці функції та їх частинні випадки виходять на перший план наукових досліджень.

Особливо важливими та цінними для практики виявилися узагальнені гіпергеометричні функції. Вони мають широке застосування у математичній фізиці, астрофізиці, теорії ймовірностей, теорії кодування тощо.

Постановка задачі

Мета статті — одержати диференціальні формули для q-інтегрального зображення (τ,β)-узагальненої гіпергеометричної функції.

Означення узагальнених гіпергеометричних функцій ${}_2^qF_1^{\tau,\beta}(z)$, ${}_3^qF_2^{\tau,\beta}(z)$ і попередні відомості

Розглянемо нову узагальнену гіпергеометричну функцію у вигляді ряду

$$ {}_2^qF_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)=\frac{\Gamma_q(c)}{\Gamma_q(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n\Gamma_q(b+\tau n)}{\Gamma_q(c+\beta n)}\frac{z^n}{(q;q)_n}, \quad (1) $$

де a, b, c — дійсні або комплексні числа, $\{\tau;\beta\}\subset R$, $\tau>0$, $\beta>0$, $1+\beta-\tau>0$, $c\neq 0,-1,-2,\ldots$, $|z|<1$, $|q|<1$, $\Gamma_q(b+\tau n)$ і $\Gamma_q(c+\beta n)$ скінченні для цілих n; q-факторіал визначається як

$$ (\alpha;q)_n=\begin{cases} 1 & \text{при } n=0; \\ (1-q^{\alpha})(1-q^{\alpha+1})\ldots(1-q^{\alpha+n-1}) & \text{при } n\in N, \end{cases} $$

де α — дійсне або комплексне число, $|q|<1$, або в термінах q-гамма-функції [10]:

$$ (\alpha;q)_n=\frac{\Gamma_q(\alpha+n)(1-q)^n}{\Gamma_q(\alpha)}, \quad n>0, $$

де

$$\Gamma_q(\alpha) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^\alpha;\omega)_\infty (1-q)^{\alpha-1}}.$$

Очевидно, що

$$\lim_{q\to 1-} \Gamma_q(a) = \Gamma(a)$$

і

$$\lim_{q\to 1-} \frac{(q^a;q)_n}{(1-q)^n} = (a)_n = a(a+1)(a+2)...(a+n-1),$$

$$n \geq 1.$$

Також визначимо дробову q-похідну порядку $\delta > 0$ від функції $\varphi(t) = t^{\lambda-1}$:

$$D^\delta_{q,t}(t^{\lambda-1}) = \frac{\Gamma_q(\lambda)\, t^{\lambda-\delta-1}}{\Gamma_q(\lambda-\delta)},\ \lambda \neq 0,-1,-2,...$$

Зауважимо, що при $q \to 1$ в (1) отримаємо (τ,β)-узагальнену гіпергеометричну функцію ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$ [11]:

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \times$$

$$\times \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\, {}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,1);(c,\tau);\\ (c,\beta);\end{matrix}\middle| zt^\tau\right]dt.$$

Запровадимо нову узагальнену функцію ${}_3^qF_2^{\tau,\beta}(z)$ у вигляді суми ряду

$${}_3^qF_2^{\tau,\beta}(a,b_1,b_2;c_1,c_2;z) = \frac{\Gamma_q(c_1)\Gamma_q(c_2)}{\Gamma_q(b_1)\Gamma_q(b_2)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^\infty \frac{(a;q)_n \Gamma_q(b_1+\tau n)\Gamma_q(b_2+\tau n)}{\Gamma_q(c_1+\tau n)\Gamma_q(c_2+\beta n)} \frac{z^n}{(q;q)_n}, \qquad (2)$$

де $\mathrm{Re}(c_1) > \mathrm{Re}(b_1) > 0,\ \mathrm{Re}(c_2) > \mathrm{Re}(b_2) > 0, \{\tau;\beta\} \subset$ $\subset R, \tau > 0, \beta > 0, 1+\beta-\tau > 0,\ |z| < 1, |q| < 1$.

Зауважимо, що у випадку $b_1 = c_1$ (2) зводиться до (1).

Означення q-інтегрального зображення (τ,β)-узагальненої гіпергеометричної функції

Знайдемо q-інтегральне зображення для функції ${}_3^qF_2^{\tau,\beta}(z)$.

Теорема 1. Для узагальненої гіпергеометричної функції (2) інтегральне зображення має вигляд

$${}_3^qF_2^{\tau,\beta}(a,b_1,b_2;c_1,c_2;z) = \frac{\Gamma_q(c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1-b_1)} \times$$

$$\times \int_0^1 t^{b_1-1} \frac{(tq;q)_\infty}{(tq^{c_1-b_1};q)_\infty}\, {}_2^qF_1^{\tau,\beta}(a,b_2;c_2;zt)d_qt, \qquad (3)$$

де $\mathrm{Re}(c_1) > \mathrm{Re}(b_1) > 0,\ \mathrm{Re}(c_2) > \mathrm{Re}(b_2) > 0,\ \{\tau;\beta\} \subset$ $\subset R, \tau > 0, \beta > 0, 1+\beta-\tau > 0,\ |z| < 1, |q| < 1$.

Доведення. Використаємо зображення функції у вигляді ряду та виконаємо таке перетворення:

$${}_3^qF_2^{\tau,\beta}(a,b_1,b_2;c_1,c_2;z) = \frac{\Gamma_q(c_1)\Gamma_q(c_2)}{\Gamma_q(b_1)\Gamma_q(b_2)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^\infty \frac{(a;q)_n \Gamma_q(b_1+\tau n)\Gamma_q(b_2+\tau n)}{\Gamma_q(c_1+\tau n)\Gamma_q(c_2+\beta n)} \frac{z^n}{(q;q)_n} =$$

$$= \frac{\Gamma_q(c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1-b_1)} \sum_{n=0}^\infty \frac{(a;q)_n \Gamma_q(c_2)\Gamma_q(b_2+\tau n)}{\Gamma_q(b_2)\Gamma_q(c_2+\beta n)} \frac{z^n}{(q;q)_n} \times$$

$$\times \mathrm{B}_q(b_1+\tau, c_1-b_1),$$

де $\mathrm{B}_q(x,y)$ – q-бета-функція [10]. Далі використаємо властивість інтегралу q-бета функції

$$\mathrm{B}_q(x,y) = \frac{\Gamma_q(x)\Gamma_q(y)}{\Gamma_q(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1} \frac{(tq;q)_\infty}{(tq^y;q)_\infty} d_qt,$$

де $\mathrm{Re}(x) > 0, \mathrm{Re}(y) > 0$.

Відповідно, маємо:

$${}_3^qF_2^{\tau,\beta}(a,b_1,b_2;c_1,c_2;z) =$$

$$= \frac{\Gamma_q(c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1-b_1)} \sum_{n=0}^\infty \frac{(a;q)_n \Gamma_q(c_2)\Gamma_q(b_2+\tau n)}{\Gamma_q(b_2)\Gamma_q(c_2+\beta n)} \frac{z^n}{(q;q)_n} \times$$

$$\times \int_0^1 t^{b_1+\tau n-1} \frac{(tq;q)_\infty}{(tq^{c_1-b_1};q)_\infty} d_qt.$$

Змінивши порядок операцій інтегрування та підсумовування, отримаємо

$$\frac{\Gamma_q(c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1-b_1)} \int_0^1 t^{b_1-1} \frac{(tq;q)_\infty}{(tq^{c_1-b_1};q)_\infty} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^\infty \frac{(a;q)_n \Gamma_q(c_2)\Gamma_q(b_2+\tau n)}{\Gamma_q(b_2)\Gamma_q(c_2+\beta n)} \frac{(zt^\tau)^n}{(q;q)_n} d_qt =$$

$$= \frac{\Gamma_q(c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1-b_1)} \int_0^1 t^{b_1-1} \frac{(tq;q)_\infty}{(tq^{c_1-b_1};q)_\infty} \times$$

$$\times\ {}_2^qF_1^{\tau,\beta}(a,b_2;c_2;zt)d_qt\,.$$

Теорему доведено.

Формули *q*-диференціювання для функцій ${}_2^qF_1^{\tau,\beta}(z)$ і ${}_3^qF_2^{\tau,\beta}(z)$

Подамо ряд формул, що містять результати дії дробової q-похідної на (τ,β)-узагальнену гіпергеометричну функцію.

Теорема 2. За умов існування узагальненої гіпергеометричної функції ${}_3^qF_2^{\tau,\beta}(z)$ справедливі такі диференціальні співвідношення:

$$D_{q,z}\,[{}_3^qF_2^{\tau,\beta}(a,b_1,b_2;c_1,c_2;z)] =$$

$$= \frac{(a;q)\Gamma_q(c_1)\Gamma_q(c_2)\Gamma_q(b_1+\tau)\Gamma_q(b_2+\tau)}{\Gamma_q(b_1)\Gamma_q(b_2)\Gamma_q(c_1+\tau)\Gamma_q(c_2+\beta)}\times$$

$$\times\ {}_3^qF_2^{\tau,\beta}(aq,b_1+\tau,b_2+\tau;c_1+\tau,c_2+\beta;z)\,, \qquad (4)$$

$$D_{q,z}\,[z^a\,{}_3^qF_2^{\tau,\beta}(a,b_1,b_2;c_1,c_2;z)] =$$

$$= (a;q)z^{a-1}\ {}_3^qF_2^{\tau,\beta}(aq,b_1,b_2;c_1,c_2;z)\,, \qquad (5)$$

$$D_{q,z}^n\,[z^{a+n-1}\,{}_3^qF_2^{\tau,\beta}(a,b_1,b_2;c_1,c_2;z)] =$$

$$= (a;q)z^{a-1}\ {}_3^qF_2^{\tau,\beta}(aq^n,b_1,b_2;c_1,c_2;z)\,, \qquad (6)$$

$$D_{q,z}^n\,[{}_3^qF_2^{\tau,\beta}(a,b_1,b_2;c_1,c_2;z)] =$$

$$= \frac{(a;q)_n\Gamma_q(c_1)\Gamma_q(c_2)\Gamma_q(b_1+\tau n)\Gamma_q(b_2+\tau n)}{\Gamma_q(b_1)\Gamma_q(b_2)\Gamma_q(c_1+\tau n)\Gamma_q(c_2+\beta n)}\times$$

$$\times\ {}_3^qF_2^{\tau,\beta}(aq^n,b_1+\tau,b_2+\tau;c_1+\tau,c_2+\beta;z)\,. \qquad (7)$$

Д о в е д е н н я . Доведемо, наприклад, (4).

$$\frac{\Gamma_q(c_1)\Gamma_q(c_2)}{\Gamma_q(b_1)\Gamma_q(b_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n\Gamma_q(b_1+\tau n)\Gamma_q(b_2+\tau n)}{\Gamma_q(c_1+\tau n)\Gamma_q(c_2+\beta n)}\frac{D_{q,z}(z^n)}{(q;q)_n} =$$

$$= \frac{\Gamma_q(c_1)\Gamma_q(c_2)}{\Gamma_q(b_1)\Gamma_q(b_2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a;q)_n\Gamma_q(b_1+\tau n)\Gamma_q(b_2+\tau n)}{\Gamma_q(c_1+\tau n)\Gamma_q(c_2+\beta n)}\times$$

$$\times\frac{(1-q^n)}{(1-q)(q;q)_n}z^{n-1}\,.$$

Змінивши n на $n+1$, отримаємо

$$D_{q,z}\,[{}_3^qF_2^{\tau,\beta}(a,b_1,b_2;c_1,c_2;z)] =$$

$$= \frac{\Gamma_q(c_1)\Gamma_q(c_2)}{\Gamma_q(b_1)\Gamma_q(b_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_{n+1}\Gamma_q(b_1+\tau n+\tau)\Gamma_q(b_2+\tau n+\tau)}{\Gamma_q(c_1+\tau n+\tau)\Gamma_q(c_2+\beta n+\beta)}\times$$

$$\times\frac{(1-q^{n+1})}{(1-q)(q;q)_{n+1}}z^n$$

і після перетворень маємо

$$\frac{(a;q)\Gamma_q(c_1)\Gamma_q(c_2)}{\Gamma_q(b_1)\Gamma_q(b_2)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n\Gamma_q(b_1+\tau n+\tau)\Gamma_q(b_2+\tau n+\tau)}{\Gamma_q(c_1+\tau n+\tau)\Gamma_q(c_2+\beta n+\beta)}\frac{z^n}{(q;q)_n} =$$

$$= \frac{(a;q)\Gamma_q(c_1)\Gamma_q(c_2)\Gamma_q(b_1+\tau)\Gamma_q(b_2+\tau)}{\Gamma_q(b_1)\Gamma_q(b_2)\Gamma_q(c_1+\tau)\Gamma_q(c_2+\beta)}\times$$

$$\times\ {}_3^qF_2^{\tau,\beta}(aq,b_1+\tau,b_2+\tau;c_1+\tau,c_2+\beta;z)\,,$$

звідки випливає (4). Доведення рівностей (5)–(7) аналогічне.

Наслідок. Для узагальненої гіпергеометричної функції ${}_2^qF_1^{\tau,\beta}(z)$ мають місце такі рівності:

$$D_{q,z}\,[{}_2^qF_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)] =$$

$$= \frac{(a;q)\Gamma_q(c)\Gamma_q(b+\tau)}{\Gamma_q(b)\Gamma_q(c+\beta)}\ {}_2^qF_1^{\tau,\beta}(aq,b+\tau;c+\beta;z), \quad (8)$$

$$D_{q,z}\,[z^a\,{}_2^qF_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)] =$$

$$= (a;q)z^{a-1}\ {}_2^qF_1^{\tau,\beta}(aq,b;c;z), \qquad (9)$$

$$D_{q,z}^n\,[z^{a+n-1}\,{}_2^qF_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)] =$$

$$= (a;q)z^{a-1}\,{}_2^qF_1^{\tau,\beta}(aq^n,b;c;z)\,, \qquad (10)$$

$$D_{q,z}^n\,[{}_2^qF_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)] =$$

$$= \frac{(a;q)_n\Gamma_q(c)\Gamma_q(b+\tau n)}{\Gamma_q(b)\Gamma_q(c+\beta n)}\,{}_2^qF_1^{\tau,\beta}(aq^n,b+\tau;c+\beta;z)\,. \quad (11)$$

Доведення формул (8)–(11) здійснюється безпосередньою перевіркою.

Висновки

У статті запроваджено нові (τ,β)-узагальнені гіпергеометричні функції ${}_2^qF_1^{\tau,\beta}(z)$ і ${}_3^qF_2^{\tau,\beta}(z)$.

Для функції ${}_{3}^{q}F_{2}^{\tau,\beta}(z)$ одержано q-інтегральне зображення. Отримано ряд формул q-дробового диференціювання для нових узагальнених гіпергеометричних функцій. Ці результати дають змогу широко застосовувати ${}_{2}^{q}F_{1}^{\tau,\beta}(z)$, ${}_{3}^{q}F_{2}^{\tau,\beta}(z)$ функції для розв'язання задач математичної фізики, диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії ймовірностей і математичної статистики тощо. В подальших дослідженнях планується знайти композиційні та рекурентні співвідношення для запроваджених функцій.

1. *Бейтмен Г., Эрдеи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.1. – М.: Наука, 1965. – 296 с.
2. *Wright E.M.* The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function // J. London Math. Soc. – 1935. – **10**. – P. 287–293.
3. *Трантер К.Дж.* Інтегральні перетворення в математичній фізиці. – М.: ГТТИ, 1956. – 204 с.
4. *Virchenko N.* On some generalizations of the functions of hypergeometric type // J. Fractional Calculus and Appl. Analysis. – 1999. – **2**, N 3. – P. 233–244.
5. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1982. – **20**. – С. 78–115.
6. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations // North-Holland Mathematics Studies. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 542 p.
7. *Kilbas A.A., Saigo M.* H-Transforms. – London: Charman and Hall / CRC, 2004. – 390 p.
8. *Kumbhat R.K., Sharma S.* Some results on a generalized probability density function // J. Stat. and Appl. – 2008. – **3**, N 1. – P. 49–58.
9. *Mathai A.M., Haubold H.J.* Special Functions for Applied Scientists. – New York: Springer, 2008. – 464 p.
10. *Gasper G., Rahman M.* Basic hypergeometric series. – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 322 p.
11. *Вірченко Н.О., Рум'янцева О.В.* Про узагальнену гіпергеометричну функцію Гаусса та її застосування // Доповіді НАН України. – 2008. – № 4. – С. 12–19.

Рекомендована Радою
Фізико-технічного інституту
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
23 травня 2011 року