УДК 517.9

С.В. Спічак, В.І. Стогній, І.М. Копась

СИМЕТРІЙНИЙ АНАЛІЗ І ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КОЛМОГОРОВА

This paper considers the symmetry properties of the linear Kolmogorov equation. We obtain the maximal invariance algebra of this equation. Moreover, we classify all two-dimensional subalgebras of the invariance algebra up to action of transformations of its automorphism group. Using the obtained subalgebras, we reduce the symmetry to ordinary differential equations and separate variables for this equation. In some cases we integrate the reduced equations and to obtain exact solutions of the linear Kolmogorov equation.

Вступ

Рівняння Фоккера–Планка (ФП)

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[A_i(t,x)u(t,x)] + + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[B_{ij}(t,x)u(t,x)], \qquad (1)$$

де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, коефіцієнти зносу $A(t,x)$ і дифузії $B(t,x)$ визначаються відповідно як вектор і матриця

$$\bar{A}(t,x) = (A_1(t,x), A_2(t,x), ..., A_n(t,x)),$$

$$B(t,x) = \| B_{ij}(t,x) \|_{i,j=1}^{n},$$

займає важливе місце в описі різноманітних процесів фізики, біології, хімії, економіки [1–4].

У зв'язку з цим протягом багатьох років спостерігається стійкий інтерес до дослідження рівнянь вигляду (1) та побудови їх точних розв'язків.

З точки зору теоретико-групових методів дослідження диференціальних рівнянь [5] одновимірне рівняння вигляду (1), тобто рівняння, що відповідає $n = 1$, є добре вивченим. Істотним результатом групової класифікації є встановлення того факту [6], що кожне одновимірне рівняння ФП, яке допускає шестипараметричну групу локальних перетворень, локальними замінами змінних зводиться до рівняння теплопровідності.

Щодо рівнянь ФП у просторах вищої розмірності, то, наскільки нам відомо, було досліджено лише окремі класи рівнянь вигляду (1) у двовимірному випадку. Так, в праці [7] було знайдено умови, при яких рівняння (1) з однорідним коефіцієнтом зносу і сталою діагональною матрицею дифузії є інваріантним відносно дев'ятипараметричної групи локальних перетворень. У [8] досліджено двовимірне рівняння ФП і змінною матрицею дифузії. В [9, 10] на основі симетрійних властивостей рівняння ФП для $\bar{A}(t,x,y) = (-V'(y) - \gamma x, x)$, $B(t,x,y) = \begin{pmatrix} 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (рівняння Крамерса) знайдено ряд його інваріантних розв'язків. Нарешті, в праці [11] було розглянуто задачу групової класифікації рівняння ФП з однорідним коефіцієнтом зносу та сталою діагональною матрицею дифузії, а також для деяких з отриманих рівнянь з нетривіальною симетрією було знайдено інваріантні розв'язки. Отже, як випливає зі сказаного вище, питання про групову класифікацію рівнянь вигляду (1) у просторах розмірності, вищої за одиницю залишається відкритим і в кожному окремому випадку потребує самостійного вивчення.

Постановка задачі

Метою статті є: дослідити симетрійні властивості лінійного рівняння Колмогорова, яке є окремим випадком двовимірного ($n = 2$) рівняння ФП (1); провести класифікацію всіх двовимірних підалгебр алгебр інваріантності досліджуваного рівняння; виконати симетрійну редукцію і побудувати точ-ні розв'язки лінійного рівняння Колмогорова.

Вихідні положення

Лінійне рівняння Колмогорова, запропоноване для моделювання випадкових рухів, має вигляд [12]

$$u_t - u_{xx} + xu_y = 0, \qquad (2)$$

де $u = u(t,x,y)$, $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Рівняння (2) є виродженим параболічним рівнянням і частинним випадком двовимірного рівняння ФП, коефіцієнти зносу і дифузії матимуть відповідно вигляд $\bar{A}(t,x,y)=(0,x)$, $B(t,x,y)=$ $=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

В [12] також було одержано і фундаментальний розв'язок рівняння (2):

$$u=\frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2}\exp\left[-\frac{x^2}{4t}-\frac{3}{t^3}\left(y-\frac{1}{2}tx\right)^2\right], \qquad (3)$$

де $t_0=x_0=y_0=0$.

Зауважимо, що теорія Уленбека і Орнштейна одновимірного броунівського руху вільної частинки одержується з рівняння (2). У зв'язку з цим становить інтерес побудова інших, відмінних від (3), точних розв'язків рівняння (2).

Далі застосуємо теоретико-групові методи для інтегрування рівняння (2). Добре відомо, що якщо лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними має неперервну групу симетрії, то це дає можливість використовувати диференціальні оператори алгебри цієї групи для симетрійної редукції [5] і відокремлення змінних [13] з подальшою побудовою точних розв'язків даного рівняння.

Симетрійні властивості рівняння Колмогорова

Згідно із загальним алгоритмом Лі [5] інфінітезимальні оператори, що генерують алгебру інваріантності рівняння (2), шукаємо в класі операторів

$$X=\tau\partial_t+\xi\partial_x+\theta\partial_y+\eta\partial_u, \qquad (4)$$

де $\tau=\tau(t,x,y,u)$, $\xi=\xi(t,x,y,u)$, $\theta=\theta(t,x,y,u)$, $\eta=\eta(t,x,y,u)$ — довільні двічі диференційовані функції в деякій області простору незалежних змінних *t, x, y* і залежної змінної *u*.

Умова інваріантності рівняння (2) відносно оператора (4) має вигляд

$$\varphi^t-\varphi^{xx}+\xi u_y+x\varphi^y\big|_{(2)}=0, \qquad (5)$$

де

$$\varphi^t=D_t(\eta)-u_tD_t(\tau)-u_xD_t(\xi)-u_yD_t(\theta),$$

$$\varphi^x=D_x(\eta)-u_tD_x(\tau)-u_xD_x(\xi)-u_yD_x(\theta),$$

$$\varphi^y=D_y(\eta)-u_tD_y(\tau)-u_xD_y(\xi)-u_yD_y(\theta),$$

$$\varphi^{xx}=D_x(\varphi^x)-u_{tx}D_x(\tau)-u_{xx}D_x(\xi)-u_{xy}D_x(\theta),$$

де D_t, D_x, D_y — узагальнені оператори диференціювання за змінними *t, x, y* відповідно; умова $|_{(2)}$ в (5) означає заміну u_t у виразах φ^t, φ^x, φ^y, φ^{xx} на $u_{xx}-xu_y$. Виконавши в (5) відповідні перетворення та обчислення, переконаємось, що має місце таке твердження.

Теорема. Максимальна алгебра Лі інваріантності рівняння (2) генерується такими диференціальними операторами:

$$e_1=2t\partial_t+x\partial_x+3y\partial_y-2u\partial_u,$$

$$e_2=-t^2\partial_t-(tx+3y)\partial_x-3ty\partial_y+(x^2+2t)u\partial_u,$$

$$e_3=\partial_t,$$

$$X_1=\frac{1}{2}t^2\partial_x+\frac{1}{6}t^3\partial_y+\frac{1}{2}(y-tx)u\partial_u,$$

$$X_2=t\partial_x+\frac{1}{2}t^2\partial_y-\frac{1}{2}xu\partial_u,$$

$$X_3=\partial_x+t\partial_y,\ X_4=\partial_y,\ X_5=u\partial_u,\ X=\beta(t,x,y)\partial_u.$$

В останньому операторі функція β є довільним розв'язком рівняння (2).

Зауваження. Далі ми не враховуватимемо оператор симетрії $X=\beta(t,x,y)\partial_u$, який притаманний лінійним рівнянням і обумовлює принцип суперпозиції. Задача опису таких операторів еквівалентна пошуку загального розв'язку таких рівнянь.

Зазначимо, що диференціальні оператори e_1, e_2, e_3, X_i (i = 1,...,5) симетрії становлять базис *восьмивимірної алгебри Лі*

$$L_8=sl(2,R)\oplus L_5,$$

де $sl(2,R)=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $L_5=\langle X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\rangle$.

Симетрійні редукції і точні розв'язки

Одним із застосувань симетрійних властивостей диференціальних рівнянь з частинними похідними є симетрійна редукція рівнянь з нетривіальною симетрією до рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних, зокрема до звичайних диференціальних рівнянь (див., наприклад, [5]). Нетривіальні симетрійні властивості рівняння (2) дають можливість використовувати для побудови його точних розв'язків нееквiвалентні двійки операторів симетрії. Зупинимося спочатку на використані неабелевих підалгебр для симетрійної редукції рівняння (2).

Розглянемо двійку операторів

$$\langle e_1 - \alpha X_5, X_2\rangle \ (\alpha \neq 0)\,. \tag{6}$$

Для побудови інваріантів треба знайти фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$(e_1 - \alpha X_5)\circ F(t,x,y,u) =$$
$$= 2tF_t + xF_x + 3yF_y - (2 \mp \alpha)uF_u = 0,$$
$$X_2 \circ F(t,x,y,u) = tF_x + \frac{1}{2}t^2F_y - \frac{1}{2}xuF_u = 0. \tag{7}$$

Безпосередньою перевіркою неважко переконатися, що фундаментальну систему розв'язків системи (7) становлять функції

$$\omega_1 = ut^{1-\frac{\alpha}{2}}\exp\left\{\frac{x^2}{4t}\right\} \text{ і } \omega_2 = \frac{2y - tx}{2t\sqrt{t}}\,.$$

Інваріантний розв'язок знаходиться з рівності $\omega_1 = f(\omega_2)$, з якої для відповідної підалгебри (6) одержуємо підстановку (анзац)

$$u = t^{\frac{\alpha}{2}-1}\exp\left\{-\frac{x^2}{4t}\right\}f(\omega)\,,\ \ \omega = \frac{2y - tx}{2t\sqrt{t}}\,,$$

що зводить досліджуване рівняння (2) до такого звичайного диференціального рівняння:

$$f_{\omega\omega} + 6\omega f_\omega + (2 - 2\alpha)f = 0\,.$$

У випадку $\alpha = -2$ його загальним розв'язком є функція

$$f = \exp(-3\omega^2)(A + B\int \exp(3\omega^2)d\omega)\,,\ \ A, B \in R\,,$$

з якої, при $A = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$, $B = 0$, отримуємо фундаментальний розв'язок (3) рівняння (2).

Для того щоб використати інші можливі редукції рівняння (2), необхідно знайти нееквівалентні підалгебри алгебри L_8. Зокрема, одновимірним підалгебрам буде відповідати редукція рівняння (2) до рівняння з частинними похідними від двох незалежних змінних або частинне відокремлення змінних. Симетрійна редукція рівняння (2) до звичайних диференціальних рівнянь передбачає наявність списку двовимірних підалгебр алгебри L_8, а до повного відокремлення змінних у рівнянні (2) приведуть її абелеві двовимірні підалгебри.

Нами проведено класифікацію всіх неспряжених двовимірних підалгебр (абелевих і неабелевих) алгебри Лі L_8, тобто алгебр, які не перетворюються одна на одну дією перетворень групи автоморфізмів алгебри Лі L_8. При цьому було використано відомий метод класифікації неспряжених підалгебр алгебри Лі з нетривіальним ідеалом (виклад методу див., наприклад, у [14]). Нижче ми наводимо список цих підалгебр.

Неабелеві двовимірні підалгебри алгебри L_8:

$$\langle e_1, e_2\rangle,\ \langle e_1, X_1\rangle,\ \langle e_1, X_2\rangle,\ \langle e_1, X_3\rangle,\ \langle e_1, X_4\rangle,$$
$$\langle e_1 + \alpha X_5, e_2\rangle, \tag{8}$$
$$\langle e_1 + \alpha X_5, X_1\rangle,\ \langle e_1 + \alpha X_5, X_3\rangle,\ \langle e_1 + \alpha X_5, X_4\rangle$$
$$(\alpha \neq 0).$$

Абелеві двовимірні підалгебри алгебри L_8:

$$\langle X_1, X_3\rangle,\ \langle X_3, X_4\rangle,\ \langle X_1 + \varepsilon X_4, X_3\rangle, \langle X_2 + \varepsilon X_3, X_4\rangle,$$
$$\langle X_2 + \varepsilon X_4, X_1 - \varepsilon X_3\rangle,$$
$$\langle X_2 + \varepsilon X_4, X_1 - \varepsilon X_3 + \alpha X_4\rangle,\ \langle X_1 + \varepsilon X_4, X_2\rangle, \tag{9}$$
$$\langle X_1 + \varepsilon X_4, X_2 + \alpha X_3\rangle, \langle e_2, X_1\rangle,\ \langle e_2, X_1 + \alpha X_5\rangle$$
$$(\varepsilon = \pm 1, \alpha \neq 0).$$

Використовуючи інваріанти підгруп групи симетрій рівняння (2), що відповідає знайденим підалгебрам, можна провести ефективну редукцію цього рівняння до звичайних диференціальних рівнянь.

Результати симетрійної редукції з використанням неабелевих пар операторів симетрії (6) такі:

1. $\langle e_1, e_2\rangle$: $u = y^{-2/3}\exp\left(\frac{-x^3}{9y}\right)\varphi(\omega)$, $\omega = \frac{3y - xt}{3t\sqrt[3]{y}}$, $\varphi_{\omega\omega} + 9\omega^2\varphi_\omega = 0$;

2. $\langle e_1, X_1\rangle$: $u = \frac{1}{t}\exp\left(\frac{3xy - 2x^2t}{3t^2}\right)\varphi(\omega)$, $\omega = \frac{3y - xt}{3t\sqrt{t}}$, $\varphi_{\omega\omega} + \frac{15}{2}\omega\varphi_\omega + (9\omega^2 - 3)\varphi = 0$;

3. $\langle e_1, X_2\rangle$: $u = \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\varphi(\omega)$, $\omega = \frac{2y - xt}{2t\sqrt{t}}$, $\varphi_{\omega\omega} + 6\omega\varphi_\omega + 2\varphi = 0$;

4. $\langle e_1, X_3\rangle: \ u = \frac{1}{t}\varphi(\omega), \ \omega = \frac{y - xt}{t\sqrt{t}},$

$\varphi_{\omega\omega} + \frac{3}{2}\omega\varphi_\omega + \varphi = 0;$

5. $\langle e_1, X_4\rangle: \ u = \frac{1}{t}\varphi(\omega), \ \omega = \frac{\sqrt{t}}{x},$

$\omega^4\varphi_{\omega\omega} + \left(2\omega^3 - \frac{1}{2}\omega\right)\varphi_\omega + \varphi = 0;$

6. $\langle e_1 + \alpha X_5, e_2\rangle: \ u = \frac{t^\alpha}{(\sqrt[3]{y^2})^{(\alpha/2)+1}}\exp\left(-\frac{x^3}{9y}\right)\varphi(\omega),$

$\omega = \frac{3y - tx}{t\sqrt[3]{y}}, \ \varphi_{\omega\omega} + \frac{1}{3}\omega^2\varphi_\omega - \frac{\alpha}{3}\omega\varphi = 0;$

7. $\langle e_1 + \alpha X_5, X_1\rangle: \ u = t^{(\alpha/2)-1}\exp\left(\frac{3xy - 2x^2t}{3t^2}\right)\varphi(\omega),$

$\omega = \frac{3y - tx}{3t\sqrt{t}}, \ \varphi_{\omega\omega} + \frac{15}{2}\omega\varphi_\omega + \left(9\omega^2 - 3 - \frac{9}{2}\alpha\right)\varphi = 0;$

8. $\langle e_1 + \alpha X_5, X_3\rangle: \ u = t^{(\alpha/2)-1}\varphi(\omega), \ \omega = \frac{y - tx}{t\sqrt{t}},$

$\varphi_{\omega\omega} + \frac{3}{2}\omega\varphi_\omega + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\varphi = 0;$

9. $\langle e_1 + \alpha X_5, X_4\rangle: \ u = t^{(\alpha/2)-1}\varphi(\omega), \ \omega = \frac{\sqrt{t}}{x},$

$\omega^4\varphi_{\omega\omega} + \left(2\omega^3 - \frac{1}{2}\omega\right)\varphi_\omega + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\varphi = 0.$

У деяких випадках можна явно проінтегрувати редуковані рівняння та отримати точні розв'язки рівняння (2). Як приклад розглянемо сьому двійку операторів $\langle e_1 + \alpha X_5, X_1\rangle$, якій відповідає редуковане рівняння

$$\varphi_{\omega\omega} + \frac{15}{2}\omega\varphi_\omega + \left(9\omega^2 - 3 - \frac{9}{2}\alpha\right)\varphi = 0. \qquad (10)$$

У випадках $\alpha = -2$ і $\alpha = -1$ рівняння (10) має частинні розв'язки $\varphi = \exp(-3\omega^2)$ і $\varphi = \exp\left(-\frac{3}{4}\omega^2\right)$ відповідно. Підставляючи ці функції у відповідний вираз (анзац) для залежної змінної u, отримаємо розв'язки рівняння (2):

$$u = t^{-2}\exp\left\{\frac{3ytx - t^2x^2 - 3y^2}{t^3}\right\},$$

$$u = t^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{\frac{6xyt - 3t^2x^2 - 3y^2}{4t^3}\right\}.$$

Для двійки операторів з восьмого пункту при $\alpha = -4$ редукційоване рівняння $\varphi_{\omega\omega} + \frac{3}{2}\omega\varphi_\omega + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\varphi = 0$ має частинний розв'язок $\varphi = \omega\exp\left(-\frac{3}{4}\omega^2\right)$, якому відповідає такий розв'язок рівняння (2):

$$u = \frac{y - tx}{t^4\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{3(y - tx)^2}{4t^3}\right).$$

Відокремлення змінних

Ще одним важливим застосуванням нетривіальних симетрійних властивостей саме лінійних диференціальних рівнянь є побудова систем координат, в яких такі рівняння допускають відокремлення змінних. Добре відомо (див., наприклад, [13] і реферовані там джерела), що розв'язок з відокремленими змінними певного рівняння можна отримувати як власну функцію деяких наборів операторів симетрії цього рівняння першого та вищих порядків, що комутують між собою.

Зупинимося на цій проблемі для рівняння (2), використовуючи знайдені вище абелеві двійки диференціальних операторів симетрії. Розглянемо випадок пари операторів $\langle X_3, X_4\rangle$ з (9).

Розв'язок у відокремлених змінних рівняння (2) отримаємо, проінтегрувавши таку систему диференціальних рівнянь:

$$u_t - u_{xx} + xu_y = 0,$$
$$X_3u = \lambda u, \qquad (11)$$
$$X_4u = \mu u,$$

де $\lambda, \mu \in R$ — сталі відокремлення. Саме ж відокремлення змінних здійснюється інтегруванням двох останніх рівнянь системи (11). Безпосередні обчислення показують, що власна функція операторів X_3 і X_4 має такий вигляд:

$$u = \exp(\mu y + (\lambda - \mu t)x)\varphi(t). \qquad (12)$$

Здійснивши підстановку (12) в перше рівняння системи (11), отримаємо таке звичайне диференціальне рівняння для визначення функції φ:

$$\varphi_t - (\lambda - \mu t)^2\varphi = 0.$$

Проінтегрувавши це рівняння і підставивши φ в (12), отримаємо розв'язок рівняння (2):

$$u = C\exp\left(\mu y + (\lambda - \mu t)x - \frac{(\lambda - \mu t)^3}{3\mu}\right), \quad C, \lambda, \mu \in R.$$

Аналогічно, використовуючи двійку операторів $\langle X_1, X_3 \rangle$ з (9), отримаємо такий розв'язок рівняння (2):

$$u = Ct^{-3/2}\exp\left((\mu - \lambda)^2 t^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{t^3}\left[(\mu - \lambda)(y - tx) + \frac{1}{4}(y - tx)^2\right]\right).$$

Для інших абелевих підалгебр відповідні розв'язки рівняння (2) ми не наводимо через їх громіздкість.

Зауваження. В отриманих розв'язках константа C, взагалі кажучи, є функцією параметрів μ, λ:

$$C = C(\mu, \lambda).$$

Якщо відповідні двійки операторів самоспряжені в просторі розв'язків рівняння (2), то наведені двопараметричні розв'язки утворюють повний базис в цьому просторі і тоді загальний розв'язок можна одержати як інтеграл двопараметричного розв'язка по параметрах. Питання про самоспряженість буде вивчене в майбутніх дослідженнях.

Висновки

Нами знайдено повний набір операторів симетрії першого порядку для рівняння Колмогорова (2) і використано ці операторі для розділення змінних та побудови точних розв'язків. Зокрема, показано, що фундаментальний розв'язок Колмогорова (3) також можна отримати як інваріантний розв'язок, який відповідає двовимірній підалгебрі (6).

В перспективі можна вивчити інваріантність цього рівняння відносно операторів другого порядку, з використанням яких можна знайти додаткові системи координат, у яких існують розв'язки з розділеними змінами.

1. *Van Kampen N.G.* Stochastic Processes in Physics and Chemestry. – Amsterdam: North-Holland, 2007. – 464 p.
2. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986. – 528 с.
3. *Risken H.* The Fokker-Planck Equation. – Berlin: Springer, 1996. – 472 c.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. – М.: Мир, 1984. – 528 с.
5. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
6. *Bluman G.W.* On the transformation of diffusion processes into the Wiener process // SIAM J.Appl. Math. – 1980. – **39**. – P. 238–247.
7. *Стогній В.І.* Симетрійні властивості двовимірного рівняння Фокера–Планка // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2000. – № 1. – С. 134–136.
8. *Лагно В.І., Стогній В.І.* Симетрія і точні розв'язки двовимірного рівняння Фоккера–Планка із змінною матрицею дифузії // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2006. – № 1. – С. 132–138.
9. *Saied E.A.* On the silimarity solutions for the free Kramers equation // Appl. Math. And Comp. – 1996. – **74**. – P. 59–63.
10. *Shtelen W.M., Stogny V.I.* Symmetry properties of one and two-dimensional Fokker-Planck equations // J. Rhys. A: Math. Gen. – 1989. – **22**. – L. 539–543.
11. *Finkel F.* Symmetries of the Fokker-Planck equations with a constant diffusion matrix in 2+1 dimensions // Ibid. – 1999. – **32**. – P. 2671–2684.
12. *Kolmogoroff A.N.* Zufallige Bewegungen (Zur Theorie der Brownischen Bewegung) // Ann. Math. – 1934. – **35**, N 2. – P. 116–117.
13. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. – М.: Мир, 1981. – 342 с.
14. *Лагно В.И., Спичак С.В., Стогний В.И.* Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа. – Москва-Ижевск: РХД, 2004. – 392 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
2 вересня 2011 року