УДК 517.9

Т.Б. Шкляр

ГЛОБАЛЬНИЙ АТРАКТОР НЕАВТОНОМНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО ВКЛЮЧЕННЯ ТИПУ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

The present paper considers the nonautonomous evolution inclusion of reaction-diffucion type, whose right part is majorized by continuous functions of step growth, for which additional conditions of translation compactness are imposed. We prove the existence and study the properties of the global attractor of the family of multivalued processes generated by solutions of the inclusion. Relying on the solutions of nonautonomous inclusion with the right part of power growth, we construct the family of multivalued processes. In addition, we prove the existence of the invariant stable connected global attractor for this family in the phase space. It comprises bounded completed trajectories. This proof method can be applied to other classes of problems: evolutional inclusions of the second order and systems of phase–field equations with the multivalued function of interaction.

Вступ

Аналіз поведінки розв'язків дисипативних еволюційних систем останнім часом прийнято пов'язувати з дослідженнями глобальних атракторів — компактних, інваріантних підмножин фазового простору, що притягують всі траєкторії системи. При цьому значний інтерес становлять еволюційні об'єкти, для яких поряд із глобальною розв'язністю невідомою або неприродною є єдиність розв'язку задачі Коші. Широкий клас таких об'єктів утворюють еволюційні включення [1—3] як адекватний апарат для опису процесів із розривними функціями взаємодії та задач оптимального керування. Основні результати в напрямі дослідження глобальних атракторів для систем без єдиності належать В.С. Мельнику, М.І. Вишику та їхнім учням [4—7]. Існування глобального атрактора для систем рівнянь типу реакції-дифузії було доведено в [6], для неавтономного включення параболічного типу з багатозначною частиною не більше лінійного росту — в праці [7].

Постановка задачі

Мета статті — для неавтономного еволюційного включення, права частина якого мажорується неперервними функціями степеневого росту, за умов трансляційної компактності цих функцій дослідити існування та властивості глобального атрактора сім'ї багатозначних процесів, що породжуються розв'язками включення.

Умови і параметри задачі

Розглядається задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} \in a\Delta u - F(t,u) + h(t,x), (t,x) \in (\tau,+\infty)\times\Omega, \\ u\,|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де $a > 0, \tau \in \mathbb{R}$ — початковий момент часу, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область, $h \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ $F(t,u) = [g(t,u), f(t,u)]$, де $f, g \in C(\mathbb{R}^2)$ такі, що задовольняють умови

$$\begin{gathered} |f(t,u)| + |g(t,u)| \le C_1(1 + |u|^{p-1}), \\ g(t,u)u \ge \alpha |u|^p - C_2,\ f(t,u)u \ge \alpha |u|^p - C_2, \end{gathered} \quad (2)$$

де $p \ge 2, \alpha > 0, C_1, C_2 \ge 0$ — константи.

Розв'язком задачі (1) на $(\tau,+\infty)$ будемо називати функцію $u = u(t,x) \in L^2_{\text{loc}}(\tau,+\infty; H^1_0(\Omega)) \cap$ $\cap\, L^p_{\text{loc}}(\tau,+\infty; L^p(\Omega))$, таку, що для деякої $l = l(t,x) \in L^q_{\text{loc}}(\tau,+\infty; L^q(\Omega))$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ виконується $l(t,x) \in F(t,u(t,x))$ майже скрізь (м.с.) і $\forall T > \tau, \forall v \in H^1_0(\Omega) \cap L^p(\Omega), \forall \eta \in C_0^\infty(\tau,T)$

$$-\int_\tau^T (u,v)\eta_t\,dt + \int_\tau^T (a(u,v)_{H^1_0} + (l,v) - (h,v))\eta\,dt = 0, \quad (3)$$

де $\|\cdot\|, (\cdot,\cdot)$ — норма і скалярний добуток в $L^2(\Omega)$.

З [4, 6] маємо, що для будь-яких $\tau \in \mathbb{R}$, $u_\tau \in L^2(\Omega)$ існує розв'язок (1) $u \in C([\tau,+\infty); L^2(\Omega))$, такий, що $u(\tau) = u_\tau$.

Основна мета роботи — за додаткових умов трансляційної компактності функцій f і g довести, що розв'язки (1) породжують сім'ю багатозначних процесів, для якої у фазовому просторі $X = L^2(\Omega)$ існує інваріантний, зв'язний, стійкий глобальний атрактор, що складається з повних траєкторій.

Глобальні атрактори многозначних процесів

Нехай (X,ρ) – метричний простір, $\mathbb{R}_d = \{(t,\tau)\in\mathbb{R}^2 \mid t\ge\tau\}$, $P(X)$ – сукупність усіх непорожніх підмножин X, $\beta(X)$ – сукупність усіх непорожніх, обмежених підмножин X, Σ – деякий метричний простір, на якому задано багатозначний (m-напівпотік): $\{T(h):\Sigma\mapsto P(\Sigma)\}_{h\ge 0}$ [4], тобто $\forall\,\sigma\in\Sigma$ $\;T(0)\sigma=\sigma$ і $\forall\, h_1,h_2\ge 0$ $T(h_1+h_2)\sigma\subseteq T(h_1)T(h_2)\sigma$. Замикання в X множини A позначимо $cl_X A$.

***Означення* 1.** Будемо казати, що задано *сім'ю багатозначних процесів* (МП) $\{U_\sigma:\mathbb{R}_d\times X\mapsto P(X)\}_{\sigma\in\Sigma}$, якщо $\forall\,\sigma\in\Sigma$ виконані умови:

1) $U_\sigma(\tau,\tau,x)=x\quad\forall x\in X, \forall\tau\in\mathbb{R}$,

2) $U_\sigma(t,\tau,x)\subseteq U_\sigma(t,s,U_\sigma(s,\tau,x)),\ \forall t\ge s\ge\tau$, $\forall x\in X$,

3) $U_\sigma(t+h,\tau+h,x)\subseteq U_{T(h)\sigma}(t,\tau,x)\ \forall t\ge\tau$, $\forall h\ge 0$,

де для $A\subset X$, $B\subset\Sigma$ $\;U_B(t,s,A)=\bigcup\limits_{\sigma\in B}\bigcup\limits_{x\in A}U_\sigma(t,s,x)$.

***Означення* 2.** Компактна множина $\Theta_\Sigma\subset X$ називається *глобальним атрактором* сім'ї МП $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, якщо:

1) Θ_Σ є рівномірно притягувальною множиною, тобто $\forall\,\tau\in\mathbb{R}$, $\forall\, B\in\beta(X)$

$$\operatorname{dist}(U_\Sigma(t,\tau,B),\Theta_\Sigma)\to 0,\ t\to+\infty;$$

2) Θ_Σ – мінімальна в класі замкнених рівномірно притягувальних множин.

Глобальний атрактор Θ_Σ називається *інваріантним*, якщо

$$\forall t\ge\tau\quad \Theta_\Sigma=U_\Sigma(t,\tau,\Theta_\Sigma).$$

Глобальний атрактор Θ_Σ називається *стійким*, якщо

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall t\ge\tau\ \ U_\Sigma(t,\tau,O_\delta(\Theta_\Sigma))\subset O_\varepsilon(\Theta_\Sigma),$$

де $O_\delta(A)$ – δ – окіл множини A.

***Означення* 3.** Відображення $\varphi:[\tau,+\infty)\mapsto X$ називається *траєкторією* МП U_σ, якщо

$$\forall t\ge s\ge\tau\quad \varphi(t)\in U_\sigma(t,s,\varphi(s)).$$

Якщо для $\varphi:\mathbb{R}\mapsto X$ включення $\varphi(t)\in U_\sigma(t,s,\varphi(s))$ виконується для будь-яких $\forall t\ge s$, то φ називається *повною траєкторією* МП U_σ.

Нехай для довільних $\sigma\in\Sigma$ і $\tau\in\mathbb{R}$ задано K_σ^τ – множину відображень $\varphi:[\tau,+\infty)\mapsto X$, таких, що:

a) $\forall x\in X\ \exists\varphi(\cdot)\in K_\sigma^\tau$ таке, що $\varphi(\tau)=x$;

b) $\forall\varphi(\cdot)\in K_\sigma^\tau, \forall s\ge\tau\ \ \varphi(\cdot)|_{[s,+\infty)}\in K_\sigma^s$;

c) $\forall h\ge 0, \forall\varphi(\cdot)\in K_\sigma^{\tau+h}\ \ \varphi(\cdot)+h\in K_{T(h)\sigma}^\tau$.

Покладемо

$$U_\sigma(t,\tau,x)=\{\varphi(t)\,|\,\varphi(\cdot)\in K_\sigma^\tau,\ \varphi(\tau)=x\}. \tag{4}$$

За додаткових умов $\forall s\ge\tau$, $\forall\psi(\cdot)\in K_\sigma^\tau$, $\forall\varphi(\cdot)\in K_\sigma^s$, таких, що $\psi(s)=\varphi(s)$, відображення

$$\theta(p)=\begin{cases}\psi(p),\ p\in[\tau,s],\\ \varphi(p),\ p>s\end{cases} \tag{5}$$

належить K_σ^τ, в умові 2 означення 1 має місце рівність.

З іншого боку, якщо задано сім'ю МП $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, причому $\forall x\in X$, $\forall t\ge\tau$, $\forall\sigma\in\Sigma$, $\forall\,\xi\in U_\sigma(t,\tau,x)$ існує $\varphi:[\tau,+\infty)\mapsto X$ – неперервна траєкторія U_σ, така, що $\varphi(\tau)=x$, $\varphi(t)=\xi$, то легко показати, що набір

$$K_\sigma^\tau=\{\varphi(\cdot):[\tau,+\infty)\mapsto X - \text{неперервна траєкторія } U_\sigma\}$$

задовольняє умови a–c і пов'язаний з МП U_σ формулою (4).

Лема 1. Нехай сім'я МП $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ побудована за формулою (4), $\forall\varphi(\cdot)\in K_\sigma^\tau$ є неперервною на $[\tau,+\infty)$, виконується умова (5), і якщо $\varphi_n(\cdot)\in K_\sigma^\tau$, $\varphi_n(\tau)=x$, то $\exists\varphi(\cdot)\in K_\sigma^\tau$, $\varphi(\tau)=x$ таке, що по підпослідовності $\varphi_n(t)\to\varphi(t)\ \ \forall t\ge\tau$.

Тоді будь-яка неперервна на $[\tau,+\infty)$ траєкторія МП U_σ належить K_σ^τ.

Доведення. Нехай $\psi:[\tau,+\infty)\mapsto X$ – неперервна і задовольняє означення 3. Побудуємо послідовність $\{\varphi_n(\cdot)\}_{n=1}^{+\infty} \subset K_\sigma^\tau$ таку, що $\varphi_n(\tau + j2^{-n}) = \psi(\tau + j2^{-n})$ $\forall j = 0,1,\ldots,n2^n$. Побудуємо $\varphi_1(\cdot)$. З означення 3 маємо

$$\psi\left(\tau+\frac{1}{2}\right) \in U_\sigma\left(\tau+\frac{1}{2}, \tau, \psi(\tau)\right),$$

$$\psi(\tau+1) \in U_\sigma\left(\tau+1, \tau+\frac{1}{2}, \psi\left(\tau+\frac{1}{2}\right)\right).$$

Звідси існують $\tilde{\varphi}(\cdot) \in K_\sigma^\tau$ і $\tilde{\tilde{\varphi}}(\cdot) \in K_\sigma^{\tau+\frac{1}{2}}$ такі, що $\psi\left(\tau+\frac{1}{2}\right) = \tilde{\varphi}\left(\tau+\frac{1}{2}\right)$, $\tilde{\varphi}(\tau) = \psi(\tau)$, $\psi(\tau+1) = \tilde{\tilde{\varphi}}(\tau+1)$, $\tilde{\tilde{\varphi}}\left(\tau+\frac{1}{2}\right) = \psi\left(\tau+\frac{1}{2}\right)$. Тому в силу (5) для функції $\varphi_1(p) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(p), p \in \left[\tau, \tau+\frac{1}{2}\right], \\ \tilde{\tilde{\varphi}}(p), p > \tau+\frac{1}{2} \end{cases}$ маємо

$$\varphi_1(\cdot) \in K_\sigma^\tau,\ \varphi_1(\tau) = \psi(\tau),\ \varphi_1\left(\tau+\frac{1}{2}\right) = \psi\left(\tau+\frac{1}{2}\right),$$

$$\varphi_1(\tau+1) = \psi(\tau+1).$$

Далі, використовуючи (5), одержуємо шукану властивість для будь-яких $n \ge 1$.

Оскільки $\varphi_n(\tau) = \psi(\tau)$, то $\exists \varphi(\cdot) \in K_\sigma^\tau$, $\varphi(\tau) = \psi(\tau)$, таке, що по підпослідовності $\forall t \ge \tau$ $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$. Оскільки $\forall t = \tau + j2^{-n}$ $\varphi(t) = \psi(t)$, то в силу неперервності $\varphi(t) = \psi(t)$ $\forall t \ge \tau$. Лему доведено.

Теорема 1 випливає з результатів [4, 6].

Теорема 1. Нехай сім'я МП $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, що задається формулою (4), задовольняє такі умови:

1) Σ – компакт, $\forall h \ge 0\ T(h)\Sigma = \Sigma$, в умовах 2, 3 означення 1 має місце рівність;

2) $\exists B_0 \in \beta(X)\ \forall B \in \beta(X), \exists T = T(B)\ \forall t \ge T$, $U_\Sigma(t,0,B) \subset B_0$;

3) $\forall \{x_n\} \subset \beta(X), \forall \{\sigma_n\} \subset \Sigma, \forall t > 0, \forall \varphi_n(\cdot) \in K_{\sigma_n}^0$ $\varphi_n(0) = x_n$, послідовність $\{\varphi_n(t)\}$ – передкомпактна в X.

4) якщо $x_n \to x_0, \sigma_n \to \sigma_0, t_n \to t_0$, то для будь-яких $\varphi_n(\cdot) \in K_{\sigma_n}^0, \varphi_n(0) = x_n$ принаймні по підпослідовності $\varphi_n(t_n) \to \varphi(t_0)$, де $\varphi(\cdot) \in K_{\sigma_0}^0$, $\varphi(0) = x_0$.

Тоді існує інваріантний, стійкий глобальний атрактор $\Theta_\Sigma = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} K_\sigma(0)$, де K_σ – множина повних обмежених траєкторій МП U_σ.

Якщо, крім того, $\Sigma, U_\sigma(t,0,x)$ – зв'язні множини, існує зв'язна $B_1 \in \beta(X)$, така, що $\Theta_\Sigma \subset B_1$, то Θ_Σ – зв'язна множина.

Д о в е д е н н я. В силу умови 1 для $\tau \ge 0$ $U_\sigma(t,\tau,x) = U_{T(\tau)\sigma}(t-\tau,0,x)$, для $\tau < 0$ $\exists \sigma_1 \in \Sigma$ маємо

$$U_\sigma(t,\tau,x) = U_{T(-\tau)\sigma_1}(t,\tau,x) = U_{\sigma_1}(t-\tau,0,x).$$

Отже, всі властивості достатньо перевіряти при $\tau = 0$. В силу умови 3 $\forall t > 0$ $U_\Sigma(t,0,B_0)$ – предкомпакт, в силу умови 4 відображення $(x,\sigma) \mapsto U_\sigma(t,0,x)$ має замкнений графік. Тоді з умови дисипативності 2 та виконання рівностей в означенні 1 з [6] маємо існування інваріантного глобального атрактора

$$\Theta_\Sigma = \omega_\Sigma(B_0) = \bigcap_{s\ge 0} \overline{\bigcup_{t \ge s} U_\Sigma(t,0,B_0)}.$$

Умова 4 забезпечує його стійкість. Оскільки за вказаних умов відображення $(x,\sigma) \mapsto U_\sigma(t,0,x)$ є напівнеперервним зверху, то додаткові умови зв'язності Σ і U_σ, згідно з [6], гарантують зв'язність Θ_Σ. Якщо $z \in K_\sigma(0)$, то $z = \varphi(0)$, де $\varphi(\cdot)$ – обмежена повна траєкторія U_σ. Тоді $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ $\forall n \ge n_0$

$$z = \varphi(0) \in U_\sigma(0,-n,\varphi(-n)) \subset U_{T(n)\sigma_n}(0,-n,\varphi(-n)) \subset$$

$$\subset U_\Sigma,(n,0,\varphi(-n)) \subset O_\varepsilon(\Theta_\Sigma),$$

отже, $z \in \Theta_\Sigma$. Якщо $z \in \Theta_\Sigma$, то по підпослідовності $z = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t_n)$, де $\varphi_n(\cdot) \in K_{\sigma_n}^0$, $\varphi_n(0) \in B_0$, $\sigma_n \to \sigma$. Тоді для функції $\psi_n(\cdot) = \varphi_n(\cdot + t_n) \in K_{\tilde{\sigma}_n}^{-t_n}$, $\tilde{\sigma}_n \in T(t_n)\sigma_n$ маємо

$$\psi_n(\cdot) \in K_{\tilde{\sigma}_n}^0,\ \tilde{\sigma}_n \to \tilde{\sigma},\ \psi_n(0) \to z.$$

Отже, в силу умови 4 існує $\psi^{(0)}(\cdot) \in K_{\tilde{\sigma}_n}^0$, $\psi^{(0)}(0) = z$, така, що $\forall t \ge 0$ $\psi_n(t) \to \psi^{(0)}(t)$. Далі діагональною процедурою будуємо послідовність функцій $\psi^{(-k)}(\cdot) \in K_{\tilde{\sigma}}^{-k}$, $k \ge 0$, таку, що

$$\psi^{(-k+1)}(t) = \psi^{(-k)}(t)\ \ \forall t \ge -k+1,$$

і покладемо $\psi(t) := \psi^{(-k)}(t)$, якщо $t \ge -k$. Тоді $\psi(0) = z$ $\forall \tau \in \mathbb{R}$ $\psi(\cdot)|_{[\tau,+\infty)} \in K_{\sigma}^{\tau}$ і $\forall t \in \mathbb{R}$ $\psi(t) \in \in \Theta_{\Sigma} \in \beta(X)$, тобто $z \in K_{\sigma}(0)$ і теорема доведена.

Властивості розв'язків задачі (1)

З [4] маємо, що будь-який розв'язок $u = = u(t,x)$ задачі (1) має властивості $u(\cdot) \in \in C([\tau,+\infty); L^2(\Omega))$, $t \mapsto \|u(t)\|$ – абсолютно неперервний і для всіх $t > \tau$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 =$$

$$= -a\|u(t)\|^2_{H_0^1} - (l(t), u(t)) + (h(t), u(t)). \qquad (6)$$

Оскільки $l(t,x) \in F(t, u(t,x))$ м.с., то в силу (2)

$$l(t,x)u(t,x) \ge \alpha |u(t,x)|^p - C_2 \text{ м.с.}$$

Тоді з (6) для кожного розв'язку (1) маємо оцінки $t \ge s \ge \tau$

$$\|u(t)\|^2 + a\int_s^t \|u(r)\|^2_{H_0^1}\, dr + 2\alpha\int_s^t \|u(r)\|^2_{L_p} dr \le$$

$$\le \|u(s)\|^2 + C_3\int_s^t (\|h(r)\|^2 + 1)\, dr, \qquad (7)$$

$$\|u(t)\|^2 \le$$

$$\le \|u(s)\|^2 e^{-\delta(t-s)} + C_4\int_s^t (\|h(r)\|^2 + 1) e^{-\delta(t-r)} dr, \quad (8)$$

$$\|u(t)\|^2 \le$$

$$\le \|u(s)\|^2 + \int_s^t (h(r), u(r)) dr + C_2 |\Omega| (t-s), \quad (9)$$

де константи $C_3 > 0, C_4 > 0, \delta > 0$ залежать лише від констант задачі (1).

Лема 2. Нехай послідовність $\{F_n = [g_n, f_n], h_n\}_{n\ge 1}$ задовольняє (2) і для будь-якого $T > \tau$ і $A > 0$

$$\sup_{t\in[\tau,T]}\sup_{|v|\le A}(|g_n(t,v) - g(t,v)| + |f_n(t,v) - f(t,v)|) \to o,$$

$$n \to +\infty, h_n \to h \text{ слабко в } L^2(\tau, T; L^2(\Omega)). \qquad (10)$$

Нехай $\{u^n\}_{n\ge 1}$ – послідовність розв'язків (1) з правою частиною $-F_n + h_n$, $\{t_n\} \subset [\tau, T]$, $t_n \to t_0, u^n(\tau) \to u_\tau$ слабко в $L^2(\Omega)$. Тоді існує $u(\cdot)$ – розв'язок (1) з $u(\tau) = u_\tau$ і правою частиною $-F + h$ такий, що по підпослідовності $u_n(t_n) \to u(t_0)$ слабко в $L^2(\Omega)$ і, крім того,

1) якщо $t_0 > \tau$, то $u_n(t_n) \to u(t_0)$ в $L^2(\Omega)$;

2) якщо $t_0 = \tau, u^n(\tau) \to u_\tau$ в $L^2(\Omega)$, то $u^n(t_n) \to u(\tau)$ в $L^2(\Omega)$.

Доведення. Нехай $\{l^n\} \subset L^q(\tau, T; L^q(\Omega))$ відповідають $\{u^n\}$. Тоді в силу (10) $\{h_n\}$ – обмежені в $L^2(\tau, T; L^2(\Omega))$, отже, з (7) $\{u_n\}$ – обмежена в $L^\infty(\tau, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(\tau, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(\tau, T; L^p(\Omega))$. Тоді з (2) послідовності $\{g_n(t, u_n)\}$, $\{f_n(t, u_n)\}, \{l^n\}$ – обмежені в $L^q(\tau, T; L^q(\Omega))$, $\left\{\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\}$ – обмежені в $L^q(\tau, T; H^{-s}(\Omega))$, де $s = \max\left\{1, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)n\right\}$. Отже, з леми про компактність [8] існує $u = u(t,x)$ така, що по підпослідовності

$$u^n \to u \text{ слабко в } L^2(\tau, T; H_0^1) \cap L^p(\tau, T; L^p(\Omega)),$$

$$u^n \to u \text{ – в } L^2(\tau, T; L^2(\Omega)),$$

$$u^n(t) \to u(t) \text{ – в } L^2(\Omega) \text{ для м.в.} \qquad (11)$$

$$t \in (\tau, T) \text{ і слабко } \forall t \in [\tau, T],$$

$$u^n(t,x) \to u(t,x) \text{ м.с.}$$

Оскільки $l_n \to l$ слабко в $L^q(\tau, T; L^q(\Omega))$, то можемо перейти до границі в (3) і отримати, що $u = u(t,x)$ – розв'язок (1) з правою частиною $-l + h$. Отже, $u \in C([\tau, T]; L^2(\Omega))$ і з [4] $u^n(t_n) \to u(t_0)$ слабко в $L^2(\Omega)$, $u(\tau) = u_\tau$. Покажемо, що $l(t,x) \in F(t, u(t,x))$ м.с. Для $\forall n \ge 1$ маємо нерівність

$$g_n(t, u^n(t,x)) \le l^n(t,x) \le f_n(t, u^n(t,x)) \text{ м.с.} \quad (12)$$

З леми Ліонса [8] $g_n(t, u^n) \to g(t,u)$, $f_n(t, u^n) \to f(t,u)$ слабко в $L^q(\tau, T; L^q(\Omega))$.

Згідно з теоремою Мазура [9], існує підпослідовність опуклих комбінацій $S_n(t,x) = = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k l^k(t,x)$, де $\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k = 1$, $\alpha_k \ge 0$ і дорівнюють нулю, крім скінченного числа, така, що $S_n \to l$ в $L^q(\tau, T; L^q(\Omega))$, а отже, по підпослідовності $S_n(t,x) \to l(t,x)$ м.с.

Нехай (t,x) таке, що $u_n(t,x) \to u(t,x)$, $S_n(t,x) \to l(t,x)$ і для будь-яких $n \ge 1$ виконується (12). Тоді з (10) $\forall \varepsilon > 0\, \exists N = N(t,x)$ $\forall n \ge N$ маємо

$$g_n(t, u^n(t,x)) \le l^n(t,x) \le f(t, u(t,x)) + \varepsilon. \quad (13)$$

Умова (13) виконується і для $S_n(t,x)$, а отже, і для $l(t,x)$. В силу довільності $\varepsilon > 0$ маємо, що $l(t,x) \in F(t, u(t,x))$, отже, $u = u(t,x)$ – розв'язок (1). Тоді з оцінки (9) аналогічно [4] маємо, що $u_n(t_n) \to u(t_0)$ в $L^2(\Omega)$. Лему доведено.

Побудова сім'ї процесів і існування глобального атрактора

Розглянемо простір $M = C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ з топологією рівномірної збіжності на компактах. Будемо казати, що $F = [g, f]$ задовольняє умову трансляційної компактності, якщо

$$\Sigma_1 = cl_{C(\mathbb{R},M^2)}\{\{g(t+\cdot), f(t+\cdot)\} \mid t \in \mathbb{R}\} \text{ – компакт } C(\mathbb{R}, M^2). \quad (14)$$

З [5] маємо, що умова (14) рівносильна обмеженості і рівномірній неперервності функцій g, f на множині $\{(s,v) \mid s \in \mathbb{R}, |v| \le \mathbb{R}\}$ $\forall \mathbb{R} > 0$.

Будемо казати, що h задовольняє умову трансляційної компактності, якщо

$$\Sigma_2 = cl_{L^{2,w}_{\text{loc}}(\mathbb{R};L^2(\Omega))}\{h(t+\cdot) \mid t \in \mathbb{R}\} \text{ – компакт у } L^{2,w}_{\text{loc}}(\mathbb{R}; L^2(\Omega)). \quad (15)$$

З [5] маємо, що умова (15) рівносильна умові $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|h(s)\|^2 ds < +\infty$. Тепер для $\forall \sigma(\cdot) = \{g_\sigma(\cdot), f_\sigma(\cdot), h_\sigma(\cdot)\} \in \Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ розглянемо задачу (1) з правою частиною $-[g_\sigma, f_\sigma] + h_\sigma$, яку будемо позначати $(1)_\sigma$. Оскільки виконуються умови (2) з константами, що не залежать від $\sigma \in \Sigma$, то $\forall \sigma \in \Sigma$ $(1)_\sigma$ має розв'язок, причому виконуються (6)–(9). Покладемо для $\sigma \in \Sigma$, $\tau \in \mathbb{R}$

$$K_\sigma^\tau = \{u(\cdot) \text{ – розв'язок } (1)_\sigma \text{ на } (\tau, +\infty)\}, \quad (16)$$

$$U_\sigma(t, \tau, u_\tau) = \{u(t) \mid u(\cdot) \in K_\sigma^\tau,\ u(\tau) = u_\tau\}. \quad (17)$$

Тоді легко показати, що K_σ^τ задовольняють умови а–с відносно напівгрупи зсуву $\{T(h) : \Sigma \mapsto \Sigma\}_{h \ge 0}$, $T(h)\sigma(\cdot) = \sigma(\cdot + h)$. Таким чином, формула (17) визначає сім'ю МП $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, причому $T(h)\Sigma = \Sigma\ \forall h \ge 0$ і в умовах 2, 3 означення 1 має місце рівність.

Теорема 2. Нехай виконуються умови (2), (14), (15). Тоді сім'я МП $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, побудована в (17), має у фазовому просторі $X = L^2(\Omega)$ інваріантний, зв'язний, стійкий глобальний атрактор, що складається з обмежених повних траєкторій.

Доведення. Перевіримо виконання умов теореми 1. Умова 1 вже доведена. Оскільки $\forall u(\cdot) \in K_\sigma^0$ задовольняє (8) і в силу (15) $\exists K > 0\ \forall \sigma \in \Sigma\ \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|h_\sigma(s)\|^2 ds < K$, то $\exists K_1 > 0$ $\forall t \ge 0$

$$\|u(t)\|^2 \le \|u(0)\|^2 e^{-\delta t} + K_1. \quad (18)$$

З (18) маємо виконання умови 2 з $B_0 = \{u \in L^2(\Omega) \mid \|u\| \le \sqrt{K_1 + 1}\}$.

Тепер нехай $u_n(\cdot) \in K_{\sigma_n}^0$, $\{\sigma_n\} \subset \Sigma$, $\{u_n(0)\} \subset X$ – обмежені. Оскільки Σ – компакт, то будемо вважати, що $\sigma_n \to \sigma_0$, $u_n(0) \to u_0$ слабко в X. Оскільки $\sigma_n = \{g_n, f_n, h_n\} \to \sigma = \{g, f, h\}$ в Σ означає, що виконуються умови (10), то з леми 2 для $\forall t > 0$ $u_n(t) \to u(t)$ в $L^2(\Omega)$, де $u(\cdot) \in K_{\sigma_0}^0$, $u(0) = u_0$, отже, виконується умова 3. Якщо ж $u_n(0) \to u_0$, то одразу маємо виконання умови 4. Оскільки Σ – зв'язний метричний простір, то залишилось показати зв'язність множини $U_\sigma(t^*, 0, u_0)$ для фіксованого $\sigma = \{g, f, h\} \in \Sigma$, $t^* > 0$, $u_0 \in X$. Оскільки в силу умови 4 ця множина є компактом, то міркування від супротивного приводять до існування неперетинних компактів A_1 і A_2, таких, що $U_\sigma(t^*, 0, u_0) = A_1 \cup A_2$. Тоді існують $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in K_\sigma^0$, $u_1(0) = u_2(0) = u_0$ такі, що $u_1(t^*) \in U_1$, $u_2(t^*) \in U_2$, де U_1 і U_2 – неперетинні відкриті околи A_1 і A_2 відповідно.

Нехай $l_i(t,x) \in F_\sigma(t,u_i(t,x)) = [g_\sigma(t,u_i(t,x)), f_\sigma(t,u_i(t,x))]$ відповідають $u_i, i=1,2$. Згідно з [4], існують гладкі функції $\{g_n, f_n\}_{n\geq 1}$, що задовольняють (2), (10) і при цьому

$$\forall n \geq 1 \quad \exists C(n): \frac{\partial g_n}{\partial u} \geq -C(n), \ \frac{\partial f_n}{\partial u} \geq -C(n). \quad (19)$$

Нехай для $n \geq 1$, $i = 1,2$ $u_i^n(t,\gamma)$ дорівнює $u_i(t)$, якщо $t \in [0,\gamma]$, і є розв'язком задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - a\Delta v + f_n(t,v) = h, \\ v|_{\partial\Omega} = 0, \\ v|_{t=\gamma} = u_i(\gamma,x), \end{cases} \quad (20)$$

якщо $t \in [\gamma,T]$, $T > t^*$. Аналогічно [4], (20) має єдиний розв'язок і $\forall n \geq 1, \forall t \in [0,T]$ відображення $[0,T] \ni \gamma \mapsto u_i^n(t,\gamma) \in L^2(\Omega)$ є не перервним. Покладемо

$$\gamma(\lambda) = \begin{cases} -T\lambda, \ \lambda \in [-1,0], \\ T\lambda, \lambda \in [0,1] \end{cases}$$

і означимо

$$u^n(t,\lambda) = \begin{cases} u_1^n(t,\gamma(\lambda)), \ \lambda \in [-1,0], \\ u_2^n(t,\gamma(\lambda)), \ \lambda \in [0,1]. \end{cases}$$

Тоді $u^n(t^*,-1) = u_1^n(t^*,T) = u_1(t^*)$, $u^n(t^*,1) = u_2(t^*)$ і в силу неперервності $\exists \lambda_n \in [-1,1]: u^n(t^*, \lambda_n) \notin U_1 \cup U_2$. Без обмеження загальності будемо вважати, що по підпослідовності $\gamma_n = \gamma(\lambda_n) \to \gamma_0 \in [0, T]$

$$u^n(t) := u^n(t,\lambda_n) = \begin{cases} u_1(t), \ t \in [0,\gamma_n), \\ u_1^n(t,\gamma_n), \ t \in [\gamma_n, T]. \end{cases}$$

Тоді $u^n(\cdot)$ розв'язок (3) з $l^n(t,x) = \begin{cases} l_1(t,x), \ t \in [0,\gamma_n), \\ f_n(t,u_1^n(t,\gamma_n)), \ t \in [\gamma_n, T] \end{cases}$ і по підпослідовності u^n збігається до деякого $u = u(t,x)$ в сенсі (11), зокрема $u^n(t^*) \to (t^*)$ слабко в $L^2(\Omega)$. Тоді

$$l^n(t,x) \to l(t,x) = \begin{cases} l_1(t,x), \ t \in [0,\gamma_0], \\ f_\sigma(t,u(t,x)), \ t \in [\gamma_0, T] \end{cases} \text{ м.с.}$$

і в силу обмежености $\{l^n\}$ в $L^q(0,T;L^q(\Omega))$ маємо слабку збіжність l^n до l в $L^q(0,T; L^q(\Omega))$. Тоді переходимо до границі в (3) і маємо, що u – розв'язок (3) з правою частиною $l(t,x) \in F(t,u(t,x))$ м.с. Отже, $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ – розв'язок (1) на $(0,T), u(0) = u_0$. З оцінки (9) функції

$$J_n(t) = \|u^n(t)\|^2 - \int_0^t (h(\tau,u^n(\tau))d\tau - C_2|\Omega|t,$$

$$J(t) = \|u(t)\|^2 - \int_0^t (h(\tau,u(\tau))d\tau - C_2|\Omega|t$$

є монотонно незростаючими і неперервними, $J_n(t) \to J(t)$ м.с. Тоді $J_n(t^*) \to J(t^*)$, що в силу (11) означає виконання нерівностей

$$\|u(t^*)\| \leq \underline{\lim}\, \|u^n(t^*)\| \leq \overline{\lim}\, \|u^n(t^*)\| \leq \|u(t^*)\|.$$

Таким чином, $u^n(t^*) \to u(t^*)$ в $L^2(\Omega)$, де $u(\cdot) \in K_\sigma^0, u(0) = u_0$, і оскільки $\forall n \geq 1$ $u^n(t^*) \notin U_1 \cup U_2$, то маємо протиріччя. Теорему доведено.

Висновки

У статті на розв'язках еволюційного неавтономного включення з правою частиною степеневого росту побудовано сім'ю багатозначних процесів, для якої у фазовому просторі доведено існування інваріантного, стійкого, зв'язного глобального атрактора, що складається з обмежених повних траєкторій. У перспективі застосований у роботі метод доведення може бути поширений на інші класи задач, такі як еволюційні включення другого порядку та системи фазово-польових рівнянь з багатозначною функцією взаємодії.

1. *Zgurovsky M.Z., Mel'nik V.S.* Nonlinear analysis and control of physical processes and fields. – Berlin: Springer, 2004. – 508 p.

2. *Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – К.: Наук. думка, 2004. – 588 с.

3. *Zgurovsky M.Z., Mel'nik V.S., Kasyanov P.O.* Evolution inclusions and variation inequalities for earth data processing. – Berlin: Springer, 2010. – 274 p.
4. *Global* attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness / O.V. Kapustyan, V.S. Mel'nik, J. Valero, V.V. Yasinsky. – K.: Naukova Dumka, 2008. – 216 p.
5. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors for equations of mathematical physics. – Providence: AMS, 2002. – 364 p.
6. *Kapustyan O.V., Valero J.* On the Kneser property for the complex Ginzburg-Landau equation and the Lotka-Volterra system with diffusion // J. Math. Anal and Appl. – 2006. – **323**. – P. 614–633.
7. *Капустян О.В., Шкляр Т.Б.* Якісна поведінка розв'язків неавтономного параболічного включення з трансляційно-компактною правою частиною // Вісник Київ. ун-ту. Сер. Математика, механіка. – 2009. – Вип. 22. – С. 17–20.
8. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М: Мир, 1972. – 588 с.
9. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М: Мир, 1967. – 624 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
8 квітня 2011 року