УДК 517. 581

Г.О. Южакова

КОМПОЗИЦІЙНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ τ-УЗАГАЛЬНЕНОЇ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ГАУССА

The paper deals with the τ-generalized (by Wright) Gauss hypergeometric function ${}_2F_1^{\tau}(a,b;c;z)$. We formulate and prove the lemma of composition relations for ${}_2F_1^{\tau}(a, b; c; z)$ and its adjacent functions. Our proof is based on using the representation of ${}_2F_1^{\tau}(a, b; c; z)$ function in the series form as well as employing some properties of the classic gamma function. The proved formulas generalize known expressions for classic Gauss hypergeometric function ${}_2F_1(a, b; c; z)$, a specific case of the considered τ-generalized function ${}_2F_1^{\tau}(a, b; c; z)$ when $\tau = 1$.

Вступ

Протягом останніх десятиліть у різноманітних сферах теоретичних і прикладних наук стрімко зростає потреба у використанні спеціальних функцій, зокрема при розв'язанні крайових задач у багатьох галузях прикладної математики та фізики, теорії моделювання, біомедицині тощо. Особливо важливу роль серед спеціальних функцій відіграють гіпергеометрична функція Гаусса та її частинні випадки (функції Бесселя, Лежандра, Лагерра та ін.).

Останнім часом відбувається швидке зростання кількості спеціальних функцій та їх узагальнень [1–3 та ін.]. При цьому особлива увага приділяється вивченню властивостей таких узагальнених функцій з метою їх подальшого застосування при розв'язанні теоретичних і практичних задач.

Постановка задачі

Метою статті є встановлення нових композиційних співвідношень для τ-узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса.

Основні позначення і результати

Розглянемо τ-узагальнену (за Райтом) гіпергеометричну функцію Гаусса ${}_2F_1^{\tau}(a, b;c;z)$ [4] у вигляді ряду:

$$ {}_2F_1^{\tau}(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)} \frac{z^n}{n!}, \quad (1) $$

де a, b, c можуть бути комплексними; $\tau \in R$, $\tau > 0$; $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$; $\Gamma(...)$ – класична гамма-функція [5]. При $\tau = 1$ функція ${}_2F_1^{\tau}(a,b;c;z)$ збігається з класичною гіпергеометричною функцією Гаусса ${}_2F_1(a,b;c;z)$ [5].

До відомих [4] рекурентних формул для ${}_2F_1^{\tau}(a,b;c;z)$ додамо низку нових співвідношень.

Лема. При умовах існування τ-узагальненої (за Райтом) гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2F_1^{\tau}(a,b;c;z)$ та її суміжних функцій справедливі такі формули:

$$ (c - a\tau)\,{}_2F_1^{\tau}(a-1) - a\tau\,{}_2F_1^{\tau}(a+1) + $$
$$ + a\tau z \frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}\,{}_2F_1^{\tau}(a+1, b+\tau-1; c+\tau-1; z) + $$
$$ + (2a\tau - c)\,{}_2F_1^{\tau} = (a\tau - b + 1 - \tau) z \times $$
$$ \times \frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}\,{}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1,\ c+\tau-1) + $$
$$ + z(\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}\,{}_2F_1^{\tau}(b+\tau,\ c+\tau), \quad (2) $$

$$ (c-b)\,{}_2F_1^{\tau}(b-1) - b\,{}_2F_1^{\tau}(b+1) + (2b-c)\,{}_2F_1^{\tau} = $$
$$ = z(b+\tau-1-a\tau)\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}\,{}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1, c+\tau-1) - $$
$$ - z\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-1+\tau)}\,{}_2F_1^{\tau}(b+\tau,\ c-1+\tau), \quad (3) $$

$$ (c - a\tau - b)\,{}_2F_1^{\tau} - (c - a\tau)\,{}_2F_1^{\tau}(a-1) + b\,{}_2F_1^{\tau}(b+1) = $$
$$ = z\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}\,{}_2F_1^{\tau}(b+\tau,\ c+\tau-1) + $$
$$ + z(1-\tau)\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}\,{}_2F_1^{\tau}(b+\tau,\ c+\tau), \quad (4) $$

$$c\;{}_2F_1^\tau - c\;{}_2F_1^\tau(a-1) = z\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}\times$$
$$\times\left((c+\tau-1)\,{}_2F_1^\tau(b+\tau-1,\,c+\tau-1)+\right.$$
$$\left.+(b-c)\,{}_2F_1^\tau(b+\tau-1,\,c+\tau)\right), \qquad (5)$$

$$ac\tau({}_2F_1^\tau - {}_2F_1^\tau(a+1)) + z(b-c+\tau-1)\times$$
$$\times\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}\,{}_2F_1^\tau(b+\tau-1,\,c+\tau-1)+$$
$$+zac\tau\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}\,{}_2F_1^\tau(a+1, b+\tau-1; c+\tau-1; z)+$$
$$+z(c-a\tau)(c-b)\frac{\Gamma(b+\tau-1)\,\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c+\tau)}\,{}_2F_1^\tau(b+\tau-1, c+\tau)-$$
$$-zc(\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}\,{}_2F_1^\tau(b+\tau, c+\tau)=0, \qquad (6)$$

де ${}_2F_1^\tau(a,b;c;z) = {}_2F_1^\tau$, ${}_2F_1^\tau(a\pm1,b;c;z) = {}_2F_1^\tau(a\pm1)$, ${}_2F_1^\tau(a,b\pm1;c;z) = {}_2F_1^\tau(b\pm1)$, ${}_2F_1^\tau(a,b+\tau-1;c+\tau-1;z) = {}_2F_1^\tau(b+\tau-1,c+\tau-1)$, ${}_2F_1^\tau(a,b+\tau;c+\tau-1;z) = {}_2F_1^\tau(b+\tau,\,c+\tau-1)$, ${}_2F_1^\tau(a,b+\tau-1;c+\tau;z) = {}_2F_1^\tau(b+\tau-1,c+\tau)$, ${}_2F_1^\tau(a,b+\tau;c+\tau;z) = {}_2F_1^\tau(b+\tau,\,c+\tau)$.

Доведення основних результатів

Використаємо зображення (1) функції ${}_2F_1^\tau(a,b;c;z)$ у вигляді ряду та відому [5] властивість гамма-функції $\Gamma(a) = = (a-1)\Gamma(a-1)$.

1. Для доведення формули (2) виконаємо низку тотожних перетворень суми $(c-a\tau)\times$ $\times\,{}_2F_1^\tau(a-1) - a\tau\,{}_2F_1^\tau(a+1) + (2a\tau-c)\,{}_2F_1^\tau$:

$$(c-a\tau)\,{}_2F_1^\tau(a-1) - a\tau\,{}_2F_1^\tau(a+1) + (2a\tau-c)\,{}_2F_1^\tau =$$
$$=(c-a\tau)\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a-1)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a-1+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}\frac{z^n}{n!}-$$
$$-a\tau\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+1+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}\frac{z^n}{n!}+$$
$$+(2a\tau-c)\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}\frac{z^n}{n!}=$$
$$=\frac{(a-1)\Gamma(c)(c-a\tau)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a-1+n)\,\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}\frac{z^n}{n!}-$$
$$-\tau\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+n)\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}\frac{z^n}{n!}+$$
$$+(2a\tau-c)\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}\frac{z^n}{n!}=$$
$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n-1)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}((a-1)(c-a\tau)-$$
$$-\tau(a+n)(a+n-1)+(2a\tau-c)(a+n-1))\frac{z^n}{n!}=$$
$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n-1)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}\times$$
$$\times(-n(c-\tau+n\tau))\frac{z^n}{n!}. \qquad (7)$$

У ланцюжку перетворень (7) в останньому одержаному виразі перший доданок суми (при $n=0$) дорівнює нулю, тому підсумовування можна починати з $n=1$. Матимемо

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n-1)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}(-n(c-\tau+n\tau))\frac{z^n}{n!}=$$
$$=-\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n-1)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}(c+\tau(n-1))\times$$
$$\times\frac{z^{n-1}\cdot z}{(n-1)!}=-z\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n-1)\Gamma(b+\tau+(n-1)\tau)}{\Gamma(c+\tau+(n-1)\tau)}\times$$
$$\times(c+\tau(n-1))\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}=-z\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+\tau+k\tau)}{\Gamma(c+\tau+k\tau)}(c+k\tau)\frac{z^k}{k!}=-z\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+\tau+k\tau)}{\Gamma(c+\tau+k\tau)}(c+k\tau+\tau-1+1-\tau)\frac{z^k}{k!}=$$
$$=-z\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau+n\tau)}{\Gamma(c+\tau+n\tau)}\times$$
$$\times(c+n\tau+\tau-1)\frac{z^n}{n!}-z(1-\tau)\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau+n\tau)}{\Gamma(c+\tau+n\tau)}\frac{z^n}{n!}=-z\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau-1+n\tau)}{\Gamma(c+\tau-1+n\tau)}(b+\tau-1+n\tau)\frac{z^n}{n!}+$$
$$+z(\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}\,{}_2F_1^\tau(b+\tau,c+\tau)=-z(b+\tau-1)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau-1+n\tau)}{\Gamma(c+\tau-1+n\tau)}\frac{z^n}{n!}-$$

$$-z\tau\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau-1+n\tau)}{\Gamma(c+\tau-1+n\tau)}n\frac{z^n}{n!}+$$

$$+z(\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}{}_2F_1^{\tau}(b+\tau,\,c+\tau)=$$

$$=-z(b+\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}{}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1,\,c+\tau-1)-$$

$$-z\tau\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau-1+n\tau)}{\Gamma(c+\tau-1+n\tau)}(n+a-a)\frac{z^n}{n!}+$$

$$+z(\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}{}_2F_1^{\tau}(b+\tau,c+\tau)=-z(b+\tau-1)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}{}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1,c+\tau-1)-$$

$$-z\tau\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+n)\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau-1+n\tau)}{\Gamma(c+\tau-1+n\tau)}\frac{z^n}{n!}+$$

$$+az\tau\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau-1+n\tau)}{\Gamma(c+\tau-1+n\tau)}\frac{z^n}{n!}+$$

$$+z(\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}{}_2F_1^{\tau}(b+\tau,c+\tau)=-z(b+\tau-1)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}{}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1,c+\tau-1)-z\tau\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+1+n)\Gamma(b+\tau-1+n\tau)}{\Gamma(c+\tau-1+n\tau)}\frac{z^n}{n!}+az\tau\times$$

$$\times\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}{}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1,c+\tau-1)+z(\tau-1)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}{}_2F_1^{\tau}(b+\tau,c+\tau)=z(a\tau-b+1-\tau)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}{}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1,\,c+\tau-1)-az\tau\times$$

$$\times\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+1+n)\Gamma(b+\tau-1+n\tau)}{\Gamma(c+\tau-1+n\tau)}\frac{z^n}{n!}+$$

$$+z(\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}{}_2F_1^{\tau}(b+\tau,\,c+\tau)=$$

$$=z(a\tau-b+1-\tau)\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}{}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1,c+\tau-1)-$$

$$-az\tau\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}{}_2F_1^{\tau}(a+1,b+\tau-1;c+\tau-1;z)+$$

$$+z(\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}{}_2F_1^{\tau}(b+\tau,\,c+\tau). \qquad (8)$$

Об'єднавши ланцюжки перетворень (7) і (8), отримаємо

$$(c-a\tau)_2F_1^{\tau}(a-1)-a\tau\,{}_2F_1^{\tau}(a+1)+(2a\tau-c)_2F_1^{\tau}=$$

$$=z(a\tau-b+1-\tau)\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}{}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1,c+\tau-1)-$$

$$-az\tau\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}{}_2F_1^{\tau}(a+1,b+\tau-1;c+\tau-1;z)+$$

$$+z(\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}{}_2F_1^{\tau}(b+\tau,c+\tau),$$

звідки і приходимо до формули (2).

2. Для доведення співвідношення (3) розглянемо вираз $(c-b)_2F_1^{\tau}(b-1)-b_2F_1^{\tau}(b+1)+(2b-c)_2F_1^{\tau}$:

$$(c-b)_2F_1^{\tau}(b-1)-b_2F_1^{\tau}(b+1)+(2b-c)_2F_1^{\tau}=$$

$$=(c-b)\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b-1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b-1+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}\frac{z^n}{n!}-$$

$$-b\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+1+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}\frac{z^n}{n!}+$$

$$+(2b-c)\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}\frac{z^n}{n!}=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n\tau)}((b-1)(c-b)\Gamma(b-1+n\tau)-$$

$$-\Gamma(b+1+n\tau)+(2b-c)\Gamma(b+n\tau))\frac{z^n}{n!}=-\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b-1+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}n\tau(c-1+n\tau)\frac{z^n}{n!}. \qquad (9)$$

У ланцюжку перетворень (9) в останньому одержаному виразі перший доданок суми (при $n=0$) дорівнює нулю, тому підсумовування також можна починати з $n=1$. Матимемо

$$-\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b-1+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}n\tau(c-1+n\tau)\frac{z^n}{n!}=$$

$$=-\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b-1+n\tau)}{\Gamma(c-1+n\tau)}\tau\frac{z^{n-1}\cdot z}{(n-1)!}=$$

$$=-z\tau\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+1+k)\Gamma(b-1+\tau+k\tau)}{\Gamma(c-1+\tau+k\tau)}\frac{z^k}{k!}=$$

$$= -z\tau \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+k)\Gamma(a+k)\Gamma(b-1+\tau+k\tau)}{\Gamma(c-1+\tau+k\tau)} \frac{z^k}{k!} =$$

$$= -za\tau \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b-1+\tau+n\tau)}{\Gamma(c-1+\tau+n\tau)} \frac{z^n}{n!} -$$

$$- z \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b-1+\tau+n\tau)}{\Gamma(c-1+\tau+n\tau)} \times$$

$$\times (n\tau + b - 1 + \tau - (b-1+\tau)) \frac{z^n}{n!} = -za\tau \times$$

$$\times \frac{\Gamma(b-1+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(c-1+\tau)\Gamma(b)} {}_2F_1^{\tau}(b-1+\tau, c-1+\tau) - z \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau+n\tau)}{\Gamma(c-1+\tau+n\tau)} \frac{z^n}{n!} + z(b+\tau-1) \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau-1+n\tau)}{\Gamma(c+\tau-1+n\tau)} \frac{z^n}{n!} = -za\tau \frac{\Gamma(b-1+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(c-1+\tau)\Gamma(b)} \times$$

$$\times {}_2F_1^{\tau}(b-1+\tau, c-1+\tau) - z \frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-1+\tau)} \times$$

$$\times {}_2F_1^{\tau}(b+\tau, c-1+\tau) + z(b+\tau-1) \frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)} \times$$

$$\times {}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1, c+\tau-1) = z(b+\tau-1-a\tau) \times$$

$$\times \frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)} {}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1, c+\tau-1) -$$

$$- z \frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-1+\tau)} {}_2F_1^{\tau}(b+\tau, c-1+\tau) . \qquad (10)$$

Об’єднавши ланцюжки перетворень (9) і (10), одержимо формулу (3):

$$(c-b) {}_2F_1^{\tau}(b-1) - b\, {}_2F_1^{\tau}(b+1) + (2b-c) {}_2F_1^{\tau} =$$

$$= z(b+\tau-1-a\tau) \frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)} {}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1, c+\tau-1) -$$

$$- z \frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-1+\tau)} {}_2F_1^{\tau}(b+\tau, c-1+\tau).$$

3. Для доведення формули (4) виконаємо тотожні перетворення виразу $(c-a\tau-b) {}_2F_1^{\tau} - (c-a\tau) {}_2F_1^{\tau}(a-1) + b\, {}_2F_1^{\tau}(b+1)$:

$$(c-a\tau-b)\, {}_2F_1^{\tau} - (c-a\tau)\, {}_2F_1^{\tau}(a-1) + b\, {}_2F_1^{\tau}(b+1) =$$

$$= (c-a\tau-b) \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)} \frac{z^n}{n!} -$$

$$- (c-a\tau) \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a-1)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a-1+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)} \frac{z^n}{n!} +$$

$$+ b \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+1+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)} \frac{z^n}{n!} =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)} \times$$

$$\times \left(c - a\tau - b - \frac{(a-1)(c-a\tau)}{a-1+n} + b + n\tau\right) \frac{z^n}{n!} =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{(a-1+n)\Gamma(c+n\tau)} n(c-\tau+n\tau) \frac{z^n}{n!} =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a-1+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)} n(c-\tau+n\tau) \frac{z^n}{n!}. \quad (11)$$

У ланцюжку перетворень (11) в останньому виразі, як і в попередніх випадках, перший доданок суми (при $n=0$) дорівнює нулю, отже, підсумовування можна починати з $n=1$. Матимемо

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a-1+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)} n(c-\tau+n\tau) \frac{z^n}{n!} =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a-1+n)\Gamma(b+\tau+(n-1)\tau)}{\Gamma(c+\tau+(n-1)\tau)} \times$$

$$\times (c+(n-1)\tau) \frac{z^{n-1} \cdot z}{(n-1)!} = z \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+\tau+k\tau)}{\Gamma(c+\tau+k\tau)} ((c+k\tau+\tau-1)+(1-\tau)) \frac{z^k}{k!} =$$

$$= z \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau+n\tau)}{\Gamma(c+\tau-1+n\tau)} \frac{z^n}{n!} +$$

$$+ z(1-\tau) \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau+n\tau)}{\Gamma(c+\tau+n\tau)} \frac{z^n}{n!} =$$

$$= z \frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(c-1+\tau)\Gamma(b)} {}_2F_1^{\tau}(b+\tau, c-1+\tau) +$$

$$+ z(1-\tau) \frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)} {}_2F_1^{\tau}(b+\tau, c+\tau). \qquad (12)$$

Об’єднавши ланцюжки перетворень (11) і (12), приходимо до формули (4):

$$(c-a\tau-b) {}_2F_1^{\tau} - (c-a\tau) {}_2F_1^{\tau}(a-1) + b\, {}_2F_1^{\tau}(b+1) =$$

$$= z \frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)} {}_2F_1^{\tau}(b+\tau, c+\tau-1) +$$

$$+ z(1-\tau) \frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)} {}_2F_1^{\tau}(b+\tau, c+\tau).$$

4. Щоб довести співвідношення (5), розглянемо різницю $c\,{}_2F_1^{\tau} - c\,{}_2F_1^{\tau}(a-1)$:

$$c\,{}_2F_1^{\tau} - c\,{}_2F_1^{\tau}(a-1) = c\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}\frac{z^n}{n!} - c\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a-1)\Gamma(b)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a-1+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}\frac{z^n}{n!} = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a-1+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}((a-1+n)-(a-1))\frac{z^n}{n!} =$$

$$= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a-1+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}n\frac{z^n}{n!}. \qquad (13)$$

В останньому одержаному виразі ланцюжка перетворень (13) підсумовування можна починати з $n=1$, оскільки перший доданок суми (при $n=0$) дорівнює нулю. Матимемо

$$\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a-1+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}n\frac{z^n}{n!} = z\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(a-1+n)\Gamma(b+\tau+(n-1)\tau)}{\Gamma(c+\tau+(n-1)\tau)}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} =$$

$$= z\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+\tau+k\tau)}{\Gamma(c+\tau+k\tau)}\frac{z^k}{k!} = z\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau-1+n\tau)}{\Gamma(c+\tau+n\tau)}(b+\tau-1+n\tau)\frac{z^n}{n!} =$$

$$= z(b+\tau-1)\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau-1+n\tau)}{\Gamma(c+\tau+n\tau)}\frac{z^n}{n!} +$$

$$+ z\tau\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau-1+n\tau)}{\Gamma(c+\tau+n\tau)}n\frac{z^n}{n!} =$$

$$= z\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+\tau)\Gamma(b)}{}_2F_1^{\tau}(b-1+\tau, c+\tau) + z\tau\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau-1+n\tau)}{\Gamma(c+\tau+n\tau-1)}\frac{n}{c+\tau+n\tau-1}\frac{z^n}{n!} =$$

$$= z\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+\tau)\Gamma(b)}{}_2F_1^{\tau}(b-1+\tau, c+\tau) +$$

$$+ z\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau-1+n\tau)}{\Gamma(c+\tau+n\tau-1)}\times$$

$$\times\frac{n\tau+(c+\tau-1)-(c+\tau-1)}{c+\tau+n\tau-1}\frac{z^n}{n!} =$$

$$= z\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+\tau)\Gamma(b)}{}_2F_1^{\tau}(b-1+\tau, c+\tau) + z\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau-1+n\tau)}{\Gamma(c+\tau+n\tau-1)}\left(1-\frac{c+\tau-1}{c+\tau+n\tau-1}\right)\frac{z^n}{n!} =$$

$$= z\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+\tau)\Gamma(b)}{}_2F_1^{\tau}(b-1+\tau, c+\tau) + z\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau-1+n\tau)}{\Gamma(c+\tau+n\tau-1)}\frac{z^n}{n!} - z(c+\tau-1)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau-1+n\tau)}{(c+\tau+n\tau-1)\Gamma(c+\tau+n\tau-1)}\frac{z^n}{n!} =$$

$$= z\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+\tau)\Gamma(b)}{}_2F_1^{\tau}(b-1+\tau, c+\tau) +$$

$$+ z\frac{\Gamma(b-1+\tau)\Gamma(c+1)}{\Gamma(c-1+\tau)\Gamma(b)}{}_2F_1^{\tau}(b-1+\tau, c-1+\tau) -$$

$$-z(c+\tau-1)\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b-1+\tau+n\tau)}{\Gamma(c+\tau+n\tau)}\frac{z^n}{n!} =$$

$$= z\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+\tau)\Gamma(b)}{}_2F_1^{\tau}(b-1+\tau, c+\tau) +$$

$$+ z\frac{\Gamma(b-1+\tau)\Gamma(c+1)}{\Gamma(c-1+\tau)\Gamma(b)}{}_2F_1^{\tau}(b-1+\tau, c-1+\tau) -$$

$$- z(c+\tau-1)\frac{\Gamma(b-1+\tau)\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+\tau)\Gamma(b)}{}_2F_1^{\tau}(b-1+\tau, c+\tau) =$$

$$= z\frac{\Gamma(b-1+\tau)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}((c+\tau-1){}_2F_1^{\tau}(b-1+\tau, c-1+\tau) +$$

$$+ (b-c){}_2F_1^{\tau}(b-1+\tau, c+\tau)). \qquad (14)$$

Тепер отримаємо формулу (5), об'єднавши ланцюжки перетворень (13) і (14):

$$c\,{}_2F_1^{\tau} - c\,{}_2F_1^{\tau}(a-1) = z\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}\times$$

$$\times((c+\tau-1){}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1, c+\tau-1) +$$

$$+ (b-c){}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1, c+\tau)).$$

5. Формулу (6) доведемо, використавши вже доведені співвідношення (2) і (5). Для цього помножимо обидві частини формули (2) на c і в отриману рівність підставимо вираз для $c\,{}_2F_1^{\tau}(a-1)$, знайдений із (5). Після перенесення всіх доданків в ліву частину одержаного співвідношення отримаємо

$$(c - a\tau)({}_2F_1^\tau - z\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}\times$$

$$\times(c+\tau-1){}_2F_1^\tau(b+\tau-1, c+\tau-1) + z(c-b)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}{}_2F_1^\tau(b+\tau-1, c+\tau)) -$$

$$-ac\tau{}_2F_1^\tau(a+1) + zac\tau\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}\times$$

$$\times{}_2F_1^\tau(a+1, b+\tau-1; c+\tau-1; z) + 2ac\tau{}_2F_1^\tau -$$

$$-c^2{}_2F_1^\tau - zac\tau\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}{}_2F_1^\tau(b+\tau-1, c+\tau-1) +$$

$$+zc(b+\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}{}_2F_1^\tau(b+\tau-1, c+\tau-1) -$$

$$-zc(\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}{}_2F_1^\tau(b+\tau, c+\tau) = 0. \quad (15)$$

Виконаємо перетворення множника

$$z(a\tau - c)(c+\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)} -$$

$$-zac\tau\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)} + zc(b+\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}$$

при функції ${}_2F_1^\tau(b+\tau-1, c+\tau-1)$ з рівності (15) з урахуванням властивості $c\Gamma(c) = \Gamma(c+1)$ гамма-функції:

$$z(a\tau - c)(c+\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)} -$$

$$-zac\tau\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)} + zc(b+\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)} =$$

$$= z\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}(a\tau - c - a\tau + b + \tau - 1) =$$

$$= z(b-c+\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}.$$

В результаті, остаточно спростивши вираз (15), приходимо до формули (6):

$$ac\tau({}_2F_1^\tau - {}_2F_1^\tau(a+1)) +$$

$$+z(b-c+\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}\times$$

$$\times{}_2F_1^\tau(b+\tau-1, c+\tau-1) + zac\tau\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}\times$$

$$\times{}_2F_1^\tau(a+1, b+\tau-1; c+\tau-1; z) + z(c-a\tau)(c-b)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}{}_2F_1^\tau(b+\tau-1, c+\tau) -$$

$$-zc(\tau-1)\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}{}_2F_1^\tau(b+\tau, c+\tau) = 0.$$

Зазначимо, що доведені формули (2)–(6) при $\tau = 1$ збігаються з відомими [5] композиційними співвідношеннями для класичної гіпергеометричної функції ${}_2F_1(a,b;c;z)$ та її суміжних функцій.

Висновки

У статті одержано нові композиційні співвідношення для τ-узагальненої за Райтом [1] гіпергеометричної функції Гаусса.

Композиційні формули (2)–(6) доведені за умов існування τ-узагальненої (за Райтом) гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2F_1^\tau(a,b;c;z)$ та її суміжних функцій. При доведенні використано зображення функції ${}_2F_1^\tau(a,b;c;z)$ у вигляді ряду та властивості класичної гамма-функції. Одержані нові результати є узагальненням відомих співвідношень для класичної гіпергеометричної функції Гаусса [5], що відкриває нові можливості для їх теоретичного і практичного застосування.

1. *Kilbas A.A., Saigo M.* H-Transforms. – London: Charman and Hall // CRC, 2004. – 390 p.
2. *Virchenko N., Fedotova I.* Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications. – Singapore: World Scientific, 2001. – 195 p.
3. *Andrews L.C., Askey R., Roy R.* Special functions. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – 664 p.
4. *Virchenko N., Kalla S.L. and A.Al-Zamel.* Some results on a generalized hypergeometric function // Integr. and Special Functions. – 2001. – **12**, N 1. – P. 89–100.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1965. – 294 с.

Рекомендована Радою
Фізико-технічного інституту
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
6 вересня 2011 року