УДК 517.9

М.І. Яременко

ІСНУВАННЯ І ЄДИНІСТЬ РОЗВ’ЯЗКУ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З МАТРИЦЕЮ ГІЛЬБЕРГА–СЕРРІНА В R^l

The study under scrutiny proves that it’s possible to solve the nonlinear differential equation in the second-order partial derivatives with operator coefficients in all Euclidean space R^l, in the spaces scale W_1^p. We also propose a new class of operators associated with the given differential equation. We construct the nonlinear semigroup of compression in L^2 for specific differential operators $A: D(A) \to L^2(R^l, d^l x)$, generated by the left part of these differential equations. Furthermore, we describe some possible topological constructions in $L_{L_2(R^l, d^l x)}([0,t])$, instrumental in proving the analogue of the Hille–Yosida–Phillips theorem. Specifically, we demonstrate that operators introduced in the elliptic equation are actually local generators of semigroups.

Вступ

Статтю присвячено розгляду рівнянь, які належать до класу слабконелінійних рівнянь, але не є лінійними відносно похідної. Нами розглядається диференціальне рівняння з частинними похідними вигляду

$$\lambda u - \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) + b(x, u, \nabla u) = f, \qquad (1)$$

яке для скорочення запису записується далі у такому вигляді:

$$\lambda u - d \circ a \circ du + b(x, u, \nabla u) = f. \qquad (2)$$

Тут $\lambda > 0$, $f \in L_1 \cap L_\infty, x \in R^l, l \ge 3$, де a – матриця Гільберга–Серріна, елементи якої мають вигляд

$$a_{ij} = \left(\delta_{ij} + b \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right), \; b = -1 + \frac{l-1}{1-\chi}, \; \chi < 1,$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Вивченню рівнянь (1) присвячено значну кількість наукової літератури [1–4], де, зокрема, для різних класів задач для (1) отримано умови існування і єдиності його розв’язків.

У [2, 3] розглянуто рівняння $a \circ d^2 u = 0$, де $a = (a_{ij})$ – матриця Гільберга–Серріна при $\chi = \dfrac{l-2}{-z}$, $2 \le z < p$. Очевидно, це рівняння має тривіальний розв’язок $u \equiv 0$. Крім того, функція $u = |x|^\chi$ задовольняє це рівняння [3], хоча і не належить класу допустимих розв’язків, оскільки $|x|^\chi \notin L_{loc}^{\frac{pl}{l-2}}$, тобто функція $|x|^\chi$ не є розв’язком у розумінні [3].

Покажемо, що знайдений ними розв’язок $u_D = R^\chi - r^\chi$ задачі Діріхле не належить області визначення оператора $A_{\lambda\beta}^p : W_1^p \to W_{-1}^p$, який $\forall u \in D(A_{\lambda\beta}^p)$ задовольняє нерівність $\langle A_{\lambda\beta}^p(u), u|u|^{p-2} \rangle \ge c(\beta) \| \nabla(u|u|^{\frac{p-2}{2}}) \|_2^2$, що, в свою чергу, внаслідок теореми вкладення Соболєва–Ільїна: $L^{p\frac{l}{l-2}} \supset W_1^2$, дає $\langle A_{\lambda\beta}^p(u), u|u|^{p-2} \rangle \ge c(l, \beta) \|u\|^p_{p\frac{l}{l-2}}$, а це означає, що необхідною умовою того, що функція є розв’язком рівняння, є $D(A_{\lambda\beta}^p) \subset L^{p\frac{l}{l-2}}$.

Очевидно, що $u_D = R^\chi - r^\chi$ при їх виборі χ не належить $L^{p\frac{l}{l-2}}(B_R(0))$ та існує тільки один розв’язок $u \equiv 0$.

Вивчення питання про існування і єдиність розв’язку рівняння вигляду (1) проводилося в [2–4] при традиційних обмеженнях на коефіцієнти, за яких має місце умова коерцитивності $\| L(x,u) \|_{L_p} \ge c \|u\|_{W_2^p}$. У цій статті рівняння (1) вивчається за припущення про виконання послабленої умови коерцитивності, яка формулюється в термінах деякої форми, що є лінійною по одній зі змінних. Нами використовується аналог методу монотонних слабкокомпактних операторів [5–9] типу $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$, де $p \ge 2$.

Такі оператори розглядалися раніше в [4] при $p = 2$. При доведенні тверджень у статті використовуються апріорні оцінки, які надалі стають апостеріорними, що дає змогу отримати відповідь на питання про розв'язність рівняння та єдиність його розв'язку. Окремо розглядається випадок $p = 2$, при цьому введено звуження відповідних операторів на L_2, описано деякі можливі топологічні конструкції в $L_{L_2(R^l,d^lx)}([0,t])$. Також доведено аналог теореми Хілле–Іосіди–Філліпса [7–9], тобто показано, що оператор A, який певним чином пов'язаний з оператором A_λ^2, насправді є локальним генератором напівгрупи.

Постановка задачі

Мета роботи – встановити слабку розв'язність рівняння (1) в шкалі соболевих просторів за умов (2)–(5), побудова нелінійної напівгрупи в L^2, генератором якої були б оператори, породжені лівою частиною рівняння.

Вихідні відомості

Розглядається рівняння (1) за умови, що виконуються такі припущення:

$$|b(x,u,\nabla u)| \le \mu_1(x)\,|\nabla u| + \mu_2(x)\,|u| + \mu_3(x), \quad (2)$$

$$|b(x,u,\nabla u) - b(x,v,\nabla v)| \le$$

$$\le \mu_4(x)\,|u-v| + \mu_5(x)\,|\nabla(u-v)|, \quad (3)$$

$$|b^r(x,u,\nabla u)| \le \mu_6(x)\,|\nabla u| + \mu_7(x)\,|u| + \mu_8(x), \quad (4)$$

$$|b^u(x,u,\nabla u)| \le \mu_9(x)\,|u| + \mu_{10}(x),$$

$$|b^{\nabla u}(x,u,\nabla u)| \le \mu_{11}(x), \quad (5)$$

де $\mu_i \in L_\infty(R^l)$, $i = 5,\ldots,11$; $\mu_3 \in L^p(R^l)$; $\mu_1^2, \mu_2^2, \mu_4^2 \in L_1^{loc}(R^l)$; $\mu_{11} \in L_1 \cap L_\infty$; функція $b(x,y,z)$ – неперервна на $R^l \times R \times R^l$ і неперервно диференційована за (y,z).

В умовах (2)–(5) і в статті далі використовуються такі позначення: $b^u(x,u,\nabla u)$ – похідна від $b(x,u,\nabla u)$ за другим аргументом, а $b^{\nabla u}(x,u,\nabla u)$ – похідна від $b(x,u,\nabla u)$ за третім аргументом.

Нами досліджується питання про існування і єдиність розв'язку $u \in W_1^p(R^l,d^lx)$ рівняння (1) в усьому евклідовому просторі R^l.

Аналог теореми Мінті–Браудера

Розглянемо простір Соболєва [2, 3]

$$W_1^p(R^l,d^lx) =: \{v \mid v \in L^p(R^l,d^lx),$$

$$D^i v \in L^p(R^l,d^lx),\ i = 1,\ldots,l\}$$

з нормою

$$\|v\|_{W_1^p(R^l,d^lx)} = \|v\|_{L^p(R^l,d^lx)} + \sum_i \|D^i v\|_{L^p(R^l,d^lx)},$$

де $W_{1,0}^p(R^l,d^lx)$ – простір функцій $v \in W_1^p(R^l,d^lx)$, які мають компактний носій; $W_{-1}^q(R^l,d^lx)$ – простір, спряжений до $W_{1,0}^p(R^l,d^lx)$.

Позначимо $\Pi K_\beta(-\Delta)$ – клас так званих формообмежених функцій $v^2 \in \Pi K_\beta(-\Delta)$, тобто таких функцій $v^2 \in L_{loc}^1(R^l)$, для яких існують такі сталі β, $c(\beta)$, що для довільної функції $\varphi \in C_0^\infty(R^l)$ виконується нерівність [5, 8]:

$$\|v\varphi\|^2_{L^2(R^l,d^lx)} \le \beta\,\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(R^l,d^lx)} + c(\beta)\,\|\varphi\|^2_{L^2(R^l,d^lx)}.$$

Визначимо за рівнянням (1) для $v \in W_{1,0}^q(R^l,d^lx)$ форму $h_\lambda^p(u,v)$:

$$h_\lambda^p(u,v) \equiv \lambda\langle u,v\rangle + \langle dv \circ a \circ du\rangle + \langle b(x,u,\nabla u), v\rangle.$$

Має місце лема.

Лема 1. Форма h_λ^p обмежена.

Оскільки $h_\lambda^p : W_1^p \times W_1^q \to R$ є лінійним (за другим аргументом) і обмеженим відображенням, то згідно з теоремою Банаха [14] форма $h_\lambda^p(u,v)$ породжує оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l,d^lx) \to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$, а отже, $h_\lambda^p(u,v) = \langle A_\lambda^p(u), v\rangle$.

Як наслідок леми 1 маємо, що оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l,d^lx) \to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$ є обмеженим.

Лема 2. Оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l,d^lx) \to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$ є коерцитивним при $\lambda > \lambda_0$, де стала λ_0 залежить лише від функцій $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ і l.

Під коерцитивним ми розуміємо такий оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l,d^lx) \to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$, який задовольняє умову

$$\lim_{\|u|u|^{p-2}\|_{W_1^q} \to \infty} \frac{h_\lambda^p(u, u\,|u|^{p-2})}{\|u\,|u|^{p-2}\|_{W_1^q}} = \infty.$$

Лема 3. Оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ – хемінеперервний, тобто для всіх $u, v \in W_1^p$ $\lim_{t\to 0} \mathrm{A}_\lambda^p(u+tv) = \mathrm{A}_\lambda^p(u)$ слабко за нормою простору W_{-1}^p.

Лема 4. Оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ – акретивний в L_p, тобто $\langle A_\lambda^p(u) - A_\lambda^p(v), (u-v)\,|\,u-v\,|^{p-2}\rangle \ge 0$ для всіх $u, v \in W_1^p$.

Для рівняння (1) є аналог теореми Мінті–Браудера [11, 15].

Теорема 1. Рівняння (1) за умов (2)–(5) однозначно розв'язне в $W_1^p(R^l, d^l x)$.

Для доведення цієї теореми використаємо модернізацію метода Гальоркіна і апроксимацію рівняння (1) гладкими. Введемо визначення *зрізки* функції $u(x)$. Нехай $u(x)$ – вимірна за Лебегом функція на R^l. Позначимо через u_ϑ і s_ϑ зрізку і її носій, відповідно

$$u_\vartheta = \begin{cases} u - \vartheta, u \ge \vartheta, \\ 0, |u| \le \vartheta, \\ u + \vartheta, u < -\vartheta, \end{cases} \qquad s_\vartheta(u) = \{x \in R^l \,|\, |\, u(x)\,| > \vartheta\}, \quad \vartheta > 0.$$

Розглянемо гладку апроксимацію функцій $a^m(x), b^m(x,y,z),$ $f^m(x)$ за аргументом x. $a_i^{n,m}(x) = \int_{R^l} \rho_n(x-t) a_i^m(t) dt = \rho_n * a_i^m$, де $\rho_n(t)$ – гладка невід'ємна апроксимація 1 в R^l. Нехай $a^m(x),$ $f^m(x),$ $b^m(x,y,z)$ – зрізки за аргументом x функцій $a(x) \forall x \in R^l,$ $f(x),$ $b(x,y,z) \forall (y,z) \in R \times R^l$, відповідно далі апроксимуємо наше рівняння рівняннями з гладкими коефіцієнтами. За цими згладженими рівняннями побудуємо форми, які породять оператори для згладжених рівнянь, дослідимо властивості цих операторів і встановимо розв'язність згладжених рівнянь, потім, використовуючи апріорні оцінки, перейдемо до границі.

Знаючи властивості оператора, можемо застосувати деяку модифікацію методу Гальоркіна, тобто розглянути таку систему

$$\langle A_\lambda^p(u_n),\, v_i^* \rangle = \langle f, v_i^* \rangle, \;\; i = 1, \ldots, n,$$

де $u_n = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ і $\{v_i\}, \{v_i^*\}$ базиси просторів $W_{1,0}^p, W_{1,0}^q$ відповідно.

Внаслідок акритивності оператора $A_\lambda^p : W_1^p \to W_{-1}^p$ в L_p. Покладемо в $\langle A_\lambda^p(u^{n'}) - A_\lambda^p(v), (u^{n'} - v)\,|\,u^{n'} - v\,|^{p-2}\rangle \ge 0,$ $v \equiv u_0 - tz \forall z \in W_{1,0}^p$ і, скорочуючи обидві частини одержаної нерівності на t^{p-1}, одержуємо, що $\langle A_\lambda^p(u^{n'}) - A_\lambda^p(u_0 - tz), z\,|z|^{p-2}\rangle \ge 0.$ Оскільки оператор $A_\lambda^p : W_1^p \to W_{-1}^p$ – хемінеперервний, то, переходячи до границі при $n' \to \infty$ і $t \to 0,$ остаточно одержуємо $y = A_\lambda^p(u_0) = f,$ тобто рівняння (1) має єдиний розв'язок в W_1^p для $\forall f \in L^1 \cap L^\infty$.

Узагальнена задача Коші

Якщо оператор $\mathrm{A}_\lambda^2 : W_1^2 \to W_{-1}^2$, породжений формою $h_\lambda^2(u,v)$, побудованою за диференціальним рівнянням (1), задовольняє умови теореми Мінті–Браудера, то його звуження на $L_2(R^l, d^l x)$ є максимальним монотонним оператором [6, 7, 9]. Дійсно, оскільки вкладення $W_1^2(R^l, d^l x) \subset L^2(R^l, d^l x) \subset W_{-1}^2(R^l, d^l x)$ є неперервним і щільним, то можна означити оператор $\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^2$ – звуження A_λ^2 на $L^2(R^l, d^l x)$, тобто $\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^2 = \mathrm{A}_\lambda^2 \uparrow L_2(R^l, d^l x),$ $D(\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^2) = \{u \in W_1^2(R^l, d^l x) : \mathrm{A}_\lambda^2(u) \in L_2(R^l, d^l x)\}.$

Оскільки $\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^2 : D(\mathrm{A}_\lambda^2) \to L_2(R^l, d^l x)$ – сюр'єктивне відображення, то рівняння (1) має розв'язок в $D(\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^2)$, а через те, що $\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^2$ – максимальний монотонний оператор, то $\mathrm{A} \equiv -\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^2$ – максимальний дисипативний оператор.

Оператор А визначає еволюційне рівняння $\frac{d}{dt} u(t) \in \mathrm{A} u(t),$ $u(t) \in L_2(R^l, d^l x),$ $t \in [0, t_0],$ для якого можна розглянути задачу Коші з початковою умовою $u(0) = u_0$.

Для того, щоб ввести поняття розв'язку цієї задачі Коші, опишемо таку конструкцію. Позначимо через $C_{L_2(R^l, d^l x)}[0,t]$ – простір усіх $L_2(R^l, d^l x)$ – значних сильно неперервних функцій на інтервалі $[0,t]$, тобто якщо $u(\cdot) \in C_{L_2(R^l, d^l x)}[0,t],$ то $u : [0,t] \to L_2(R^l, d^l x)$ і $\lim_{s \to s_0} \| u(s) - u(s_0) \|_{L_2(R^l, d^l x)} = 0,$ $s_0 \in [0,t],$ а через

$L_{L_2(R^l,d^l x)}[0,t]$ — простір всіх $L_2(R^l,d^l x)$-значних сильно інтегрованих функцій на інтервалі $[0,t]$, тобто якщо $u(\cdot)\in L_{L_2(R^l,d^l x)}[0,t]$, то $u:[0,t]\to$ $\to L_2(R^l,d^l x)$ і $\|u\|_L=\int_0^t \|u(s)\|\,ds<\infty$.

Розглянемо декартів добуток просторів $C_{L_2(R^l,d^l x)}[0,t]\times L_{L_2(R^l,d^l x)}[0,t]$ і задамо на цьому просторі відображення $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_t$ згідно з формулою $\langle\langle u,v\rangle\rangle_t=\int_0^t (u(s),\,v(s))\,ds$. Так, визначене відображення задовольняє всі аксіоми скалярного добутку. Можемо вважати, що оператор $\mathrm{A}:L_2(R^l,d^l x)\to L_2(R^l,d^l x)$ діє із $C_{L_2(R^l,d^l x)}[0,t]$ в $L_{L_2(R^l,d^l x)}[0,t]$, тобто $u\to\{v\in L_{L_2(R^l,d^l x)}[0,t]:v(s)\in$ $\in \mathrm{A}u(s)$ майже скрізь за $s\}$.

Назвемо відображення $\tilde{\mathrm{A}}$ розширенням відображення A, якщо $\tilde{\mathrm{A}}:C_{L_2(R^l,d^l x)}[0,t]\ni u\to$ $\to\{v\in L_{L_2(R^l,d^l x)}[0,t]:\exists u_n\in D(\mathrm{A})\subset C_{L_2(R^l,d^l x)}[0,t]$, $v_n\in \mathrm{A}u_n$, $\lim_{n\to\infty}u_n=u$, $\sigma-\lim_{n\to\infty}v_n=v\}$, де $\sigma=$ $=\sigma(L_{L_2(R^l,d^l x)}[0,t],\ C_{L_2(R^l,d^l x)}[0,t])$ — слабка топологія в $L_{L_2(R^l,d^l x)}[0,t]$ відносно $C_{L_2(R^l,d^l x)}[0,t]$ і символом $\sigma-\lim_{n\to\infty}v_n=v$ позначено границю послідовності v_n в топології σ.

Означення. Функція $u\in C_{L_2(R^l,d^l x)}[0,t_0]$ називається слабким розв'язком задачі Коші $\frac{d}{dt}u(t)\in \mathrm{A}u(t)$, $u(t)\in L_2(R^l,d^l x)$, $t\in[0,t_0]$, $u(0)=u_0$, якщо існує послідовність абсолютно не перервних розв'язків u_n рівняння $\frac{d}{dt}u_n(t)\in\tilde{\mathrm{A}}u_n(t)$ майже при всіх $t\in[0,t_0]$ і $\lim_{n\to\infty}u_n=u$ в $C_{L_2(R^l,d^l x)}[0,t_0]$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3 (про узагальнену задачу Коші в L_2). Узагальнена задача Коші

$$\frac{d}{dt}u(t)\in \mathrm{A}u(t),\ u(t)\in L_2(R^l,d^l x),\ t\in[0,t_0],$$

$$u(0)=u_0,$$

де $\mathrm{A}\equiv-\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^2:L_2(R^l,d^l x)\to L_2(R^l,d^l x)$, має при кожному $u_0\in D(A)$ єдиний слабкий розв'язок.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що $D((\mathrm{I}-\lambda\mathrm{A})^{-1})=$ $=L_2(R^l,d^l x)$, $\lambda\in(0,1]$.

Оскільки $(\mathrm{I}-\lambda\mathrm{A})^{-1}$ — оператор стиску, то операція $(\mathrm{I}-\lambda\mathrm{A})^{-1}$ визначає однозначне відображення. Нехай $u\in L_2(R^l,d^l x)$ — довільний (фіксований) елемент, число $\mu\in\left(\frac{1}{2},1\right]$. Покладемо $v=(\mathrm{I}-\mu\mathrm{A})^{-1}u$. Тоді $v-\mu\mathrm{A}v=u$.

Справджується рівність $v=(\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\times$ $\times\left(\frac{1}{\mu}u-\frac{1-\mu}{\mu}v\right)$.

Розглянемо відображення $\mathrm{E}_u:v\to(\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\times$ $\times\left(\frac{1}{\mu}u-\frac{1-\mu}{\mu}v\right)$.

Неважко переконатися, що виконується нерівність $\|\mathrm{E}_u v_1-\mathrm{E}_u v_2\|\le\frac{1-\mu}{\mu}\|v_1-v_2\|$. Звідси випливає, що рівняння $\mathrm{E}_u v=v$ згідно з принципом стиску має в просторі $L_2(R^l,d^l x)$ розв'язок, а отже, оператори $(\mathrm{I}-\lambda\mathrm{A})^{-1}$, E_u визначені на $L_2(R^l,d^l x)$.

Аналогічно маємо, що оператор $(\mathrm{I}-\mu^k\mathrm{A})^{-1}$ при кожному $k=1,2,\ldots$ визначений на $L_2(R^l,d^l x)$, а отже, можна записати $\lambda=\mu^k$ для певних μ і k. Якщо A — однозначний оператор, то покладемо $\mathrm{A}_n=\mathrm{A}\left(\mathrm{I}-\frac{\mathrm{A}}{n}\right)^{-1}$, $n\in N$. У загальному випадку маємо $\mathrm{A}_n:u-\frac{1}{n}v\to v$, де $u\in D(\mathrm{A})$, $v\in\mathrm{A}u$.

Дослідимо відображення A_n на однозначність. Нехай $u_1-\frac{v_1}{n}=u_2-\frac{v_2}{n}$, де $v_1\in\mathrm{A}u_1$, $v_2\in\mathrm{A}u_2$. Тоді маємо

$$u_1=\left(\mathrm{I}-\frac{\mathrm{A}}{n}\right)^{-1}\left(u_1-\frac{v_1}{n}\right)=\left(\mathrm{I}-\frac{\mathrm{A}}{n}\right)^{-1}\left(u_2-\frac{v_2}{n}\right)=u_2.$$

Отже, $\left(\mathrm{I}-\frac{\mathrm{A}}{n}\right)^{-1}$ — однозначне відображення, тобто $v_1=v_2$, звідси робимо висновок про те, що оператори A_n — однозначні.

Покажемо, що кожне відображення A_n є дисипативним і генерує нелінійну напівгрупу T_t^n, для якої виконується нерівність $\|\mathrm{A}_n \mathrm{T}_t^n u\| \le \|\mathrm{A}_n u\|$. Доведемо спочатку дисипативність оператора A_n. Нехай u_1, u_2 — два довільні елементи з $L_2(R^l, d^l x)$ і $v_1 = \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^{-1} u_1$, $v_2 = \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^{-1} u_2$. Виберемо елементи $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$ так, щоб виконувалися такі умови: $\tilde{v}_1 \in \mathrm{A} v_1$, $\mathrm{A}_n u_1 = \tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2 \in \mathrm{A} v_2$, $\mathrm{A}_n u_2 = \tilde{v}_2$. Тоді виконуються рівності $u_1 = v_1 - \frac{\tilde{v}_1}{n}$, $u_2 = v_2 - \frac{\tilde{v}_2}{n}$. Перевіримо дисипативність оператора A_n. Маємо

$$(\mathrm{A}_n u_1 - \mathrm{A}_n u_2, u_1 - u_2) =$$
$$= \left(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2, v_1 - \frac{\tilde{v}_1}{n} - v_2 + \frac{\tilde{v}_2}{n}\right) \le$$
$$\le (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2, v_1 - v_2) - \frac{(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2, \tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)}{n} \le 0,$$

тобто A_n — дисипативний оператор при кожному $n \in \mathrm{N}$.

Наступна викладка показує, що A_n визначає неперервне й обмежене відображення. Дійсно, маємо

$$\|\mathrm{A}_n u_1 - \mathrm{A}_n u_2\|^2 \le n^2 \|v_1 - v_2\|^2 +$$
$$+ \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|^2 \le n^2 \|u_1 - u_2\|^2.$$

Таким чином, задача

$$\frac{d}{dt} u(t) = \mathrm{A}_n u(t),$$
$$u(0) = u_0, \ u_0 \in L_2(R^l, d^l x)$$

має єдиний розв'язок, який можна записати у вигляді $u_n(t) = \mathrm{T}_t^n u_0$, де T_t^n — напівгрупа стиску. Оскільки $\|\mathrm{T}_h^n u_0 - u_0\| \ge \|\mathrm{T}_{t+h}^n u_0 - \mathrm{T}_t^n u_0\|$, то

$$\|\mathrm{A}_n u_0\| = \left\| \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (\mathrm{T}_h^n u_0 - u_0) \right\| \ge$$
$$\ge \left\| \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (\mathrm{T}_{t+h}^n u_0 - \mathrm{T}_t^n u_0) \right\| = \|\mathrm{A}_n \mathrm{T}_t^n u_0\|.$$

Зафіксуємо довільний елемент $u \in D(\mathrm{A})$ і доведемо рівномірну збіжність стосовно t на кожному скінченному інтервалі. Нехай $v \in \mathrm{A} u$, $u_n = u - \frac{v}{n}$, $n \in N$. Маємо

$$\| \mathrm{T}_t^m u_m - \mathrm{T}_t^n u_n \|^2 - \| u_m - u_n \|^2 =$$
$$= \int_0^t \frac{d}{ds} \| \mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n \|^2 \, ds =$$
$$= 2\left(\int_0^t \frac{d}{ds} \mathrm{T}_s^m u_m - \frac{d}{ds} \mathrm{T}_s^n u_n, \mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n \right) ds =$$
$$= \left(2\int_0^t \mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{A}_n \mathrm{T}_s^n u_n, \mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n \right) ds =$$
$$= 2\int_0^t \left(\mathrm{A}\left(\mathrm{I} - \frac{1}{m}\mathrm{A}\right)^{-1} \mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{A}\left(\mathrm{I} - \frac{1}{n}\mathrm{A}\right)^{-1} \mathrm{T}_s^n u_n, \right.$$
$$\left. \left(\mathrm{I} - \frac{1}{m}\mathrm{A}\right)^{-1} \mathrm{T}_s^m u_m - \left(\mathrm{I} - \frac{1}{n}\mathrm{A}\right)^{-1} \mathrm{T}_s^n u_n \right) ds +$$
$$+ 2\int_0^t (\mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{A}_n \mathrm{T}_s^n u_n, \left(\mathrm{I} - \left(\mathrm{I} - \frac{1}{m}\mathrm{A}\right)^{-1} \right) \times$$
$$\times \mathrm{T}_s^m u_m - \left(\mathrm{I} - \left(\mathrm{I} - \frac{1}{n}\mathrm{A}\right)^{-1} \right) \mathrm{T}_s^n u_n) ds \le$$
$$\le 2\int_0^t (\mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{A}_n \mathrm{T}_s^n u_n, \left(\mathrm{I} - \left(\mathrm{I} - \frac{1}{m}\mathrm{A}\right)^{-1} \right) \times$$
$$\times \mathrm{T}_s^m u_m - \left(\mathrm{I} - \left(\mathrm{I} - \frac{1}{n}\mathrm{A}\right)^{-1} \right) \mathrm{T}_s^n u_n) ds.$$

Оскільки

$$\|\mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^m u_m\| \le \|\mathrm{A}_m u_m\| = \|v\|,$$
$$\|\mathrm{A}_n \mathrm{T}_s^n u_n\| \le \|\mathrm{A}_n u_n\| = y,$$

$$\left(\mathrm{I} - \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{m}\right)^{-1} \right) \mathrm{T}_s^m u_m = \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{m}\right)\left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{m}\right)^{-1} \mathrm{T}_s^m u_m -$$
$$- \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{m}\right)^{-1} \mathrm{T}_s^m u_m = -\frac{1}{m} \mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^m u_m,$$

$$\left(\mathrm{I} - \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^{-1} \right) \mathrm{T}_s^n u_n = -\frac{\mathrm{A}_n}{n} \mathrm{T}_s^n u_n,$$

то

$$\left\| \left(\mathrm{I} - \left(\mathrm{I} - \frac{1}{m} \mathrm{A} \right)^{-1} \right) \mathrm{T}_s^m u_m \right\| =$$

$$= \frac{1}{m} \| \mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^m u_m \| \le \frac{\| \mathrm{A}_m u_m \|}{m} = \frac{\| v \|}{m} \times$$

$$\times \left\| \left(\mathrm{I} - \left(\mathrm{I} - \frac{1}{n} \mathrm{A} \right)^{-1} \right) \mathrm{T}_s^n u_n \right\| \le \frac{\| v \|}{n}.$$

Таким чином,

$$\int_0^t \left(\mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{A}_n \mathrm{T}_s^n u_n, \left(\mathrm{I} - \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{m} \right)^{-1} \right) \mathrm{T}_s^m u_m - \right.$$

$$\left. - \left(\mathrm{I} - \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{m} \right)^{-1} \right) \mathrm{T}_s^n u_n \right) ds \le 2 \| v \|^2 \, t \frac{n+m}{nm}.$$

При кожному фіксованому $t_0 > 0$ справедлива оцінка

$$\sup_{t \in [0, t_0]} \| \mathrm{T}_t^m u - \mathrm{T}_t^n u \| \le \sup_{t \in [0, t_0]} (\| \mathrm{T}_t^m u - \mathrm{T}_t^m u_m \| +$$

$$+ \| \mathrm{T}_t^n u_n - \mathrm{T}_t^n u \| + \| \mathrm{T}_t^m u_m - \mathrm{T}_t^n u_n \|) \le$$

$$\le \| u - u_m \| + \| u_n - u \| +$$

$$+ \sup_{t \in [0, t_0]} \sqrt{ \| u_m - u_n \|^2 + 4 \frac{m+n}{nm} \| v \|^2 \, t } \xrightarrow[n, m \to \infty]{} 0.$$

Внаслідок повноти простору $L_2(R^l, d^l x)$ послідовність $\mathrm{T}_t^n u$ збігається рівномірно стосовно t на будь-якому скінченному інтервалі. Згідно з нерівністю $\| \mathrm{T}_t^n u_1 - \mathrm{T}_t^n u_2 \| \le \| u_1 - u_2 \|$, і враховуючи, що послідовність $\mathrm{T}_t^n u_2$ прямує рівномірно стосовно t на будь-якому скінченному інтервалі при всіх $u_2 \in D(\mathrm{A})$, маємо, що послідовність $\mathrm{T}_t^n u_1$ прямує рівномірно стосовно t на будь-якому скінченному інтервалі при всіх $u_1 \in L_2(R^l, d^l x)$.

Нехай $\mathrm{T}_t u = \lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{T}_t^n u$, де $u \in D(\mathrm{A})$. Покладемо $u_n = u - \dfrac{1}{n} v$, $v \in \mathrm{A} u$. Покажемо, що T_t — нелінійна напівгрупа, яка задовольняє умову $\dfrac{d}{dt} \mathrm{T}_t^n u \in \tilde{\mathrm{A}} \mathrm{T}_t^n u$ майже для всіх $t \in [0, t_0]$, де через $\tilde{\mathrm{A}}$ позначено розширення відображення А згідно з описаною вище конструкцією. А також $u_n \to u$ в $C_{L_2(R^l, d^l x)}[0, t_0]$.

З нерівності $\left\| \left(\mathrm{I} - \left(\mathrm{I} - \dfrac{\mathrm{A}}{n} \right)^{-1} \right) \mathrm{T}_t^n u_n \right\| \le \| v \| \dfrac{1}{n}$ одержуємо

$$\left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{n} \right)^{-1} \mathrm{T}_t^n u_n \to \mathrm{T}_t u,$$

де послідовність збігається рівномірно стосовно t на будь-якому обмеженому інтервалі.

Оскільки множина $\left\{ \left(\mathrm{I} - \dfrac{\mathrm{A}}{n} \right)^{-1} \mathrm{T}_t^n u_n : t \in [0, t_0], \; n = 1, 2, \ldots \right\}$ обмежена в $L_2(R^l, d^l x)$, то існує підпослідовність $\left\{ \mathrm{A} \left(\mathrm{I} - \dfrac{\mathrm{A}}{n_k} \right)^{-1} \mathrm{T}_t^{n_k} u_{n_k} \right\}$, яка збігається в слабкій σ-топології. Отже, $\tilde{\mathrm{A}} \mathrm{T}_t u \in \sigma - \lim \mathrm{A}_{n_k} \mathrm{T}_t^{n_k} u_{n_k}$.

Послідовність $\mathrm{A}_n \mathrm{T}_t^n u_n = \dfrac{d}{dt} \mathrm{T}_t^n u_n$ прямує до елемента $\dfrac{d}{dt} \mathrm{T}_t^n u$ в топології $L_2(R^l, d^l x)$-значних нескінченно диференційованих функцій, що визначені на проміжку $(0, t_0)$. Позначимо цей простір через $D_{L_2(R^l, d^l x)}[0, t]$, а через σ_1 — топологію $\sigma_1 \equiv \sigma(L_{L_2(R^l, d^l x)}[0, t], D_{L_2(R^l, d^l x)}[0, t])$. Ця топологія є слабкою топологією в $L_{L_2(R^l, d^l x)}[0, t]$ відносно $D_{L_2(R^l, d^l x)}[0, t]$. Очевидно, що $\sigma_1 < \sigma$ — в топологічному сенсі, а отже, $\dfrac{d}{dt} \mathrm{T}_t u \in \sigma_1 - \lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{A}_{n_k} \mathrm{T}_t^{n_k} u_{n_k} \in \tilde{\mathrm{A}} \mathrm{T}_t u$. Теорему 4 доведено.

Висновки

Одержано результати щодо розв'язності квазілінійного еліптичного рівняння другого порядку з матрицею Гільберга–Серріна. Введено і досліджено новий клас нелінійних операторів, які породжені формою, що складена за лівою частиною досліджуваного рівняння. Доведено, що це рівняння однозначно розв'язне в шкалі W_1^p. Розглянуто випадок гільбертового простору W_1^2, введено звуження відповідних операторів на L_2, описано деякі можливі топологічні конструкції в $L_{L_2(R^l,d^lx)}([0,t])$, завдяки яким доведено аналог теореми Хілле–Іосіди–Філліпса [9], тобто показано, що оператори, введені у випадку еліптичного рівняння, насправді є локальними генераторами напівгруп.

У майбутньому отримані результати (після відповідного доопрацювання) можуть бути перенесені на банахові простори.

1. *Гильберг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
2. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 734 с.
3. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1964. – 538 с.
4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
5. *Семенов Ю.А.* Гладкость обобщений решений уравнения $\left(\lambda - \sum_{i,j} \nabla_i a_{ij} \nabla_j\right) u = f$ с непрерывными коэффициентами // Мат. сб. – 1982. – **118** (160), № 3 (7). – С. 399–410.
6. *Кухарчук М.М., Яременко М.І.* Про однозначну розв’язність рівняння $(\lambda - ad^2)u = f$ // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2007. – № 3. – С. 150–157.
7. *Кухарчук М.М., Яременко М.І.* Про розв’язність квазілінійного рівняння з матрицею Гільберга–Серріна в R^l // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 1. – С. 144–149.
8. *Кухарчук М.М., Яременко М.І.* Квазілінійні рівняння другого порядку з матрицею Гільберга–Серріна та нелінійні напівгрупи стиску. Ч. 1 // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 2. – С. 148–155.
9. *Кухарчук М.М., Яременко М.І.* Про розв’язність квазілінійного рівняння з матрицею Гільберга–Серріна в R^l і побудову нелінійних напівгруп стиску в $L^2(R^l, d^l x)$ // Вісн. нац. ун-ту водного господарства та природокористування: Зб. наук. праць. – Рівне, 2008. – Вип. 1 (41). – С. 435–443.
10. *Кухарчук М.М., Яременко М.І.* Квазілінійні рівняння другого порядку з матрицею Гільберга–Серріна та нелінійні напівгрупи стиску. Ч. 2 // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 3. – С. 150–158.
11. *Кухарчук М.М., Яременко М.І.* Про розв’язність одного квазілінійного еліптичного диференціального рівняння другого порядку у всьому евклідовому просторі R^l // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 4. – С. 146–151.
12. *Кухарчук М.М., Яременко М.І.* Про розв’язність одного класичного лінійного еліптичного диференціального рівняння другого порядку // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 5. – С. 137–141.
13. *Кухарчук М.М., Яременко М.І.* Розв’язність квазілінійного еліптичного рівняння з матрицею Гільберга–Серріна в просторах Соболева // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2009. – № 4. – С. 142–154.
14. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
15. *Minty G.* Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space // Duke Math. J. – 1962. – **29**. – С. 341–346.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
21 червня 2011 року