УДК 530.182; 538.9

І.В. Герасимчук

ЛОКАЛІЗАЦІЯ СВІТЛОВОГО ПУЧКА В СИСТЕМІ ДВОХ НЕЛІНІЙНИХ ОПТИЧНИХ ХВИЛЕВОДІВ

Theoretically, we investigate the character of localization of nonlinear stationary waves propagating along an array of two identical nonlinear optical waveguides in a linear medium. The Kerr nonlinearity is taken into account in the waveguides, and the medium between the waveguides is considered to be optically linear. We investigate the solutions of the corresponding equation for the bypass nonlinear monochromatic wave at the presence of two delta-function perturbations. We also study the stationary localized states of light beams propagating in systems of two plane-parallel nonlinear optical waveguides. In addition, we show that the problem can be reduced to the model of coupled anharmonic oscillators. Moreover, all characteristics of such system are found. We calculate a total number of excitations in the wave and the total energy of the system for all three types of possible stationary states: the in-phase symmetric state with the same intensity of light fluxes in both waveguides, the antisymmetric state with the same flux density in the waveguides, but with the opposite wave phases in them, and the inhomogeneous state with the same phases but different densities of light flux in the waveguides.

Вступ

Дослідження розповсюдження та характеру локалізації нелінійних хвиль у періодичних і модульованих структурах завжди було однією з основних задач нелінійної хвилевої динаміки. Значну увагу останніми роками було приділено дослідженням просторової локалізації світлових пучків, зокрема, локалізації світлового потоку в напрямі, перпендикулярному напряму його розповсюдження, внаслідок нелінійного ефекту Керра [1–6]. У працях [3, 6] було теоретично показано, що в системі плоскопаралельних хвилеводів при врахуванні керрівської нелінійності можлива локалізація пучка на кількох сусідніх хвилеводах (утворення просторового суперсолітона). Така суперлокалізація світлового потоку спостерігалася експериментально в працях [4, 5], а результати порівнювалися з феноменологічною дискретною моделлю з [3]. У [7] було розглянуто розповсюдження хвилевого потоку в системі двох плоскопаралельних дефектних шарів (зв'язаних плоскопаралельних хвилеводів) у нелінійному оптичному середовищі. У припущенні, що хвилеводи й навколишнє середовище відрізняються лише лінійним показником заломлення, було знайдено взаємодію світлових пучків у хвилеводах і одержано систему дискретних нелінійних рівнянь. На прикладі двох зв'язаних хвилеводів було продемонстровано можливість локалізації світла в одному з хвилеводів.

Оскільки в разі слабкого зв'язку хвилеводів амплітуда поля в них істотно перевершує середню амплітуду навколо, можна враховувати нелінійні керрівські доданки лише в областях простору всередині самих хвилеводів. Відзначимо, що, наприклад, у системах із квадратичною нелінійністю нелінійні доданки мають враховуватися лише в області хвилеводів. Аналогічна ситуація виникає в тому випадку, коли оптичні хвилеводи перебувають у вакуумі й середовище навколо них є лінійним.

Вказана задача має і методичний інтерес. При вивченні хвилеводів у нелінійному середовищі задача аналітичного описування є дуже громіздкою й одержати відповідь вдається лише у випадку слабкого зв'язку між хвилеводами.

Постановка задачі

Мета роботи – дослідити характер локалізації нелінійних стаціонарних хвиль, що розповсюджуються вздовж системи двох ідентичних нелінійних оптичних хвилеводів. Керрівська нелінійність враховується лише в області хвилеводів, а середовище між хвилеводами вважається оптично лінійним.

Локалізовані стани в системі двох нелінійних оптичних хвилеводів

Досліджується випадок лінійного середовища з двома нелінійними хвилеводами, що знаходяться на відстані $2a$ один від одного. У запропонованій системі рівняння для обвідної нелінійної монохроматичної хвилі $u(z,t)$ (x – координата вздовж напряму розповсюдження хвилі, а z – напрям, перпендикулярний площинам двох паралельних хвилеводів, розташованих у точках з координатами $z = \mp a$) має такий вигляд:

$$i\,\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2\sigma\,[\delta(z+a) + \delta(z-a)]\,|u|^2\,u, \quad (1)$$

де характеристика хвилеводу $\sigma > 0$ (хвилеводи "притягують" хвилі).

Запишемо густину функції Лагранжа, яка відповідає рівнянню руху (1):

$$L = \frac{i}{2}\left(u^*\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u^*}{\partial t}\right) - \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2 +$$

$$+\,\sigma[\delta(z+a) + \delta(z-a)]\,|u|^4.$$

У випадку одного хвилеводу рівняння (1) матиме вигляд

$$i\,\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2\sigma\cdot\delta(z)\cdot|u|^2\,u. \quad (2)$$

Розв'язком рівняння (2) для стаціонарного локалізованого пучка, що розповсюджується, є функція

$$u = u_0 \cdot \exp(-\,\varepsilon|z| - i\,\omega t),$$

де $\varepsilon = \sqrt{-\omega}$ і $u_0 = \sqrt{\varepsilon/\sigma}$. Залежність частоти хвилі ω від її амплітуди в хвилеводі має такий вигляд: $\omega = -\sigma^2 u_0^4$ (як і залежність частоти ангармонійного осцилятора від амплітуди його коливань).

Якщо ввести повну кількість елементарних збуджень у хвилі

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2\,dz$$

та її повну енергію

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} dz\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2 - \sigma\delta(z)\,|u|^4\right\},$$

то ці величини у моделі не залежатимуть від частоти ω:

$$N = \frac{1}{\sigma},\ W = 0.$$

У випадку двох плоскопаралельних оптичних хвилеводів лінійне хвилеве рівняння

$$i\,\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

має бути доповнене граничними умовами

$$u\big|_{\mp a-0} = u\big|_{\mp a+0}, \quad (4)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\mp a+0} - \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\mp a-0} = -2\sigma\cdot|u|^2\,u\big|_{\mp a}, \quad (5)$$

а локалізований у системі хвилеводів світловий пучок описується таким розв'язком:

$$u_{1,2} = A_{1,2}\cdot e^{\pm\varepsilon z - i\omega t}, \quad (6)$$

$$u_3 = (B\cdot e^{-\varepsilon z} + C\cdot e^{\varepsilon z})\,e^{-i\omega t}, \quad (7)$$

відповідно в областях 1 ($z < -a$), 2 ($z > a$) і 3 ($-a < z < a$). Параметр ε дорівнює $\varepsilon = \sqrt{-\omega}$. Користуючись видом цього розв'язку, граничні умови (4) і (5) можна записати так:

$$\varepsilon e^{2\varepsilon a}U_i - 2\sigma\,\mathrm{sh}(2\varepsilon a)\,U_i^3 - \varepsilon U_j = 0, \quad (8)$$

де $i, j = 1, 2$, $i \neq j$ і $U_{1,2} = u(z = \mp a)$ — амплітуди хвилі у хвилеводах. Система рівнянь (8) є точною і може бути легко проаналізована по всьому інтервалу частот $\omega < 0$.

Система рівнянь (8) допускає три типи можливих стаціонарних станів: синфазний симетричний стан (S) з однаковою потужністю світлових потоків у двох хвилеводах:

$$U_1 = U_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}}\,(1 + e^{-2\varepsilon a})^{-1/2}; \quad (9)$$

антисиметричний стан (A) з однаковою густиною потоку в хвилеводах, але з протилежною фазою хвилі в них:

$$U_1 = -U_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}}\,(1 - e^{-2\varepsilon a})^{-1/2}; \quad (10)$$

і неоднорідний стан (N) з однаковою фазою, але різною густиною світлового потоку в хвилеводах:

$$U_{1,2} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\sigma}}\left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4e^{-4\varepsilon a}}}{1 - e^{-4\varepsilon a}}\right)^{1/2}. \quad (11)$$

Параметри розв'язків (6) і (7) виражаються через амплітуди поля у хвилеводах U_1 і U_2 таким чином:

$$A_1 = U_1 \cdot e^{\varepsilon a}, \quad A_2 = U_2 \cdot e^{\varepsilon a},$$

$$B = \frac{e^{\varepsilon a}(U_1 \cdot e^{2\varepsilon a} - U_2)}{e^{4\varepsilon a} - 1}, \qquad (12)$$

$$C = \frac{e^{\varepsilon a}(U_2 \cdot e^{2\varepsilon a} - U_1)}{e^{4\varepsilon a} - 1}.$$

Знаючи точний розв'язок задачі (3)–(12), легко знайти залежність повного числа елементарних збуджень у хвилі N від частоти ω (тобто від параметра ε) для всіх трьох видів хвиль:

$$N_S = \frac{2}{\sigma}\,\frac{1 + (1 + 2\,\varepsilon a)\,e^{-2\varepsilon a}}{(1 + e^{-2\varepsilon a})^3},$$

$$N_A = \frac{2}{\sigma}\,\frac{1 - (1 + 2\,\varepsilon a)\,e^{-2\varepsilon a}}{(1 - e^{-2\varepsilon a})^3}, \qquad (13)$$

$$N_N = \frac{1}{\sigma}\,\frac{1 - 3e^{-4\varepsilon a} + 2(1 + 2\varepsilon a)\,e^{-8\varepsilon a}}{(1 - e^{-4\varepsilon a})^3}.$$

Синфазний несиметричний стан (N) відщеплюється від синфазного симетричного (S) в точці біфуркації, якій відповідають значення

$$\varepsilon_b = \ln\sqrt{2}/a \quad \text{і} \quad N_b = 8\,(3 + \ln 2)\,/\,(27\sigma).$$

Симетрична мода починається при малих ε та при кінцевому N: $N = 1/(2\sigma)$, і при $\varepsilon \to \infty$ параметр N прямує до кінцевої величини: $N \to 2/\sigma$. Для антисиметричної моди $N \approx 1/(2\sigma\varepsilon a)$ при малих ε та $N \to 2/\sigma$ при $\varepsilon \to \infty$. Залежності $\varepsilon = \varepsilon(N)$ для цих двох мод перетинаються. Залежність для несиметричної моди починається в точці біфуркації, де $N_b > 1/\sigma$, і має асимптотику $N_b \to 1/\sigma$ при $\varepsilon \to \infty$. Таким чином, для сумарної потужності неоднорідного пучка існує обмеження зверху.

Відомо [8], що неоднорідне збудження двох зв'язаних ангармонійних осциляторів поблизу точки біфуркації може бути представлене у вигляді суперпозиції симетричного синфазного коливання і невеликої "добавки" антисиметричної моди. Тому хід залежності $\omega = \omega(N)$ для S-моди відображає залежність $\omega = \omega(N)$ для A-моди. У нашому випадку залежність $\omega_A = \omega_A(N)$ є незвичайною. Вона має зворотній характер. Як наслідок, зв'язок між N та ω і для неоднорідного розподілу потоку є незвичайним. Це вказує на необхідність врахування лінійних доданків в описанні хвилеводів. Вивченню цієї проблеми буде присвячена наступна праця.

Повна енергія локалізованого стану обчислюється за формулою

$$W = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \left\{ \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2 - \sigma[\delta(z + a) + \delta(z - a)]\,|u|^4 \right\},$$

і для трьох можливих локалізованих станів залежність повної енергії від частоти ω (або від параметра ε) матиме вигляд

$$W_S = -\frac{4}{\sigma}\,\frac{\varepsilon^3 a e^{-2\varepsilon a}}{(1 + e^{-2\varepsilon a})^3}, \quad W_A = \frac{4}{\sigma}\,\frac{\varepsilon^3 a e^{-2\varepsilon a}}{(1 - e^{-2\varepsilon a})^3},$$
$$W_N = -\frac{4}{\sigma}\,\frac{\varepsilon^3 a e^{-8\varepsilon a}}{(1 - e^{-4\varepsilon a})^3}. \qquad (14)$$

Беручи до уваги співвідношення (9)–(11) для амплітуд хвилі у хвилеводах для кожного із локалізованих станів та враховуючи залежності (13) для $N(\varepsilon)$, залежності (14) для $W(\varepsilon)$ можуть бути переписані у такому вигляді:

$$W_S = \omega N_S + \sigma(U_1^4 + U_2^4),$$
$$W_A = \omega N_A + \sigma(U_1^4 + U_2^4), \qquad (15)$$
$$W_N = \omega N_N + \sigma(U_1^4 + U_2^4).$$

З формул (15) випливає, що залежність для повної енергії W від параметрів N і U_i є універсальною для всіх локалізованих станів (S), (A) та (N) і може бути записана у єдиному вигляді:

$$W = \omega N + \sigma(U_1^4 + U_2^4).$$

Висновки

Під час дослідження стаціонарних локалізованих станів у системі двох ідентичних плоскопаралельних нелінійних оптичних хвилеводів спостерігається явище переходу хвилевого потоку при критичному значенні його енергії в просторово-неоднорідний стан з різним сумарним потоком у сусідніх хвилеводах. Одержано ефективні рівняння динаміки відповідної ефективної кінцевовимірної системи двох зв'язаних ангармонійних осциляторів.

Подальші дослідження будуть присвячені вивченню локалізованих станів у системі двох зв'язаних нелінійних хвилеводів, коли в описанні хвилеводів враховуватимуться лінійні доданки, та дослідженню просторової локалізації нелінійних хвиль у періодичній системі плоскопаралельних нелінійних хвилеводів.

1. *Chiao R.Y., Garmire E., Townes C.H.* Self-Trapping of Optical Beams // Phys. Rev. Lett. – 1964. – **13**, N 15. – P. 479–482.
2. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ. – 1971. – **61**, Вып. 1(7). – С. 118–134.
3. *Aceves A.B., De Angelis C., Peschel T. et al.* Discrete Self-Trapping, Soliton Interactions, and Beam Steering in Nonlinear Waveguide Arrays // Phys. Rev. E. – 1996. – **53**, N 1. – P. 1172–1189.
4. *Eisenberg H.S., Silberberg Y., Morandotti R. et al.* Discrete Spatial Optical Solitons in Waveguide Arrays // Phys. Rev. Lett. – 1998. – **81**, N 16. – P. 3383–3386.
5. *Peschel U., Morandotti R., Aitchison J.S. et al.* Nonlinearly Induced Escape from a Defect State in Waveguide Arrays // Appl. Phys. Lett. – 1999. – **75**, N 10. – P. 1348–1350.
6. *Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S.* Spatial Localization of Nonlinear Waves in Layered and Modulated Media // Pis'ma v ZhETF. – 2007. – **85**, N 10. – P. 594–598.
7. *Герасимчук И.В., Ковалев А.С.* Локализация нелинейных волн в слоистых средах // Физ. низк. темп. – 2000. – **26**, Вып. 8. – С. 799–809.
8. *Косевич А.М., Ковалев А.С.* Введение в нелинейную физическую механику. – К.: Наук. думка, 1989. – 304 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
31 травня 2011 року