ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.9

А.А. Акбергенов

ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

The study highlights one class of systems of nonlinear difference equations with the continuous argument. We study the issue of existence of periodic solutions for such equations. We also obtain sufficient conditions for the existence of continuous N – periodic solutions (N is a positive integer) and propose the method for constructing such solutions. By employing the method of invariant manifolds, we prove the existence of continuous solutions for a system of nonlinear difference equations in the hyperbolic case as well as describe their structure in the vicinity of periodic solution.

Вступ

Важливе значення при дослідженні багатьох практичних проблем має вивчення питань існування неперервних періодичних розв'язків систем нелінійних різницевих рівнянь. Вони стали об'єктом дослідження багатьох математиків (див. [1–6] і цитовану в них літературу). Незважаючи на це в сучасній теорії різницевих рівнянь є ряд проблем, які вивчені дуже мало. У цій статті розглянуто нові достатні умови існування неперервних періодичних розв'язків широкого класу систем нелінійних різницевих рівнянь із неперервним аргументом.

Постановка задачі

Метою статті є встановлення достатніх умов існування неперервних N-періодичних розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x(t+1) = A(t)x(t) + f_1(t, x(t),\ y(t)), \\ y(t+1) = B(t)y(t) + f_2(t, x(t),\ y(t)), \end{cases} \tag{1}$$

де $t \in R = (-\infty; +\infty)$, $f_1 : R \times R^p \times R^q \to R^p$, $f_2 : R \times R^p \times R^q \to R^q$, $A(t)$, $B(t)$ – неперервні, N-періодичні $(p \times p)$- і $(q \times q)$-матриці (N – ціле додатне число), $p + q = n$ та дослідження його властивостей.

Існування і єдиність неперервного N-періодичного розв'язку

Розглянемо систему нелінійних різницевих рівнянь (1) при таких припущеннях:

1) при всіх $t \in R$ матриці $A(t)$ і $B(t)$ задовольняють такі співвідношення:

$$\begin{gathered} |A(t+N-1)A(t+N-2)\cdot\ldots\cdot A(t)| \le \Delta_1 < 1, \\ |B^{-1}(t)B^{-1}(t+1)\cdot\ldots\cdot B^{-1}(t+N-1)| \le \Delta_2 < 1, \end{gathered} \tag{2}$$

2) вектор-функції $f_1(t, x, y)$, $f_2(t, x, y)$ є неперервними відносно всіх своїх змінних, N-періодичними по t і задовольняють умови Ліпшиця

$$\begin{gathered} |f_i(t, x', y') - f_i(t, x'', y'')| \le l_i(|x' - x''| + |y' - y''|), \\ i = 1, 2, \end{gathered} \tag{3}$$

де $0 < l_i < 1$, $x', x'' \in R^p, y', y'' \in R^q$, $t \in R$.

Безпосередньо із (1) випливає, що якщо $(x(t),\ y(t))$ є деякий неперервний N-періодичний розв'язок (1), то він задовольняє послідовність таких систем:

$$\begin{cases} x(t+2) = A(t+1)A(t)x(t) + \\ \qquad + A(t+1)f_1(t, x(t),\ y(t)) + \\ \qquad + f_1(t+1, x(t+1),\ y(t+1)), \\ y(t+2) = B(t+1)B(t)y(t) + \\ \qquad + B(t+1)f_2(t, x(t),\ y(t)) + \\ \qquad + f_2(t+1, x(t+1),\ y(t+1)), \end{cases}$$

. . . . (4)

$$\begin{cases} x(t+N) = A(t+N-1)A(t+N-2)\cdot\ldots\cdot A(t)x(t) + \\ \qquad + A(t+N-1)\cdot\ldots\cdot A(t+1)f_1(t, x(t),\ y(t)) + \\ \qquad + \ldots + A(t+N-1)\times \\ \qquad \times f_1(t+N-2, x(t+N-2),\ y(t+N-2)) + \\ \qquad + f_1(t+N-1, x(t+N-1),\ y(t+N-1)), \\ y(t+N) = B(t+N-1)B(t+N-2)\cdot\ldots\cdot B(t)y(t) + \\ \qquad + B(t+N-1)\cdot\ldots\cdot B(t+1)f_2(t, x(t),\ y(t)) + \\ \qquad + \ldots + B(t+N-1)\times \\ \qquad \times f_2(t+N-2, x(t+N-2),\ y(t+N-2)) + \\ \qquad + f_2(t+N-1, x(t+N-1),\ y(t+N-1)), \end{cases}$$

Розглянемо систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} x(t) = A(t+N-1)A(t+N-2)\cdot\ldots\cdot A(t)x(t) + \\ \quad + A(t+N-1)\cdot\ldots\cdot A(t+1)f_1(t, x(t),\ y(t)) + \\ \quad + \ldots + A(t+N-1)\times \\ \quad \times f_1(t+N-2, x(t+N-2),\ y(t+N-2)) + \\ \quad + f_1(t+N-1, x(t+N-1),\ y(t+N-1)), \\ y(t) = B(t+N-1)B(t+N-2)\cdot\ldots\cdot B(t)y(t) + \\ \quad + B(t+N-1)\cdot\ldots\cdot B(t+1)f_2(t, x(t),\ y(t)) + \\ \quad + \ldots + B(t+N-1)\times \\ \quad \times f_2(t+N-2, x(t+N-2),\ y(t+N-2)) + \\ \quad + f_2(t+N-1, x(t+N-1),\ y(t+N-1)), \end{cases} \tag{5}$$

і покажемо, що для неї має місце така теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1 і 2. Тоді система різницевих рівнянь (5) має єдиний неперервний N-періодичний розв'язок.

Доведення теореми проведемо за допомогою методу послідовних наближень, які визначимо такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} & x_0(t) = 0, y_0(t) = 0, \\ & x_m(t) = A(t+N-1)A(t+N-2)\cdot\ldots\cdot A(t)x_{m-1}(t) + \\ & \quad + A(t+N-1)\cdot\ldots\cdot A(t+1)f_1(t, x_{m-1}(t), y_{m-1}(t)) + \\ & \quad + \ldots + A(t+N-1)\times \\ & \quad \times f_1(t+N-2, x_{m-1}(t+N-2),\ y_{m-1}(t+N-2)) + \\ & \quad + f_1(t+N-1, x_{m-1}(t+N-1),\ y_{m-1}(t+N-1)), \\ & y_m(t) = B^{-1}(t)B^{-1}(t+1)\cdot\ldots\cdot B^{-1}(t+N-1)y_{m-1}(t) - \\ & \quad - B^{-1}(t)f_2(t, x_{m-1}(t),\ y_{m-1}(t)) - \ldots - \\ & \quad - B^{-1}(t)\cdot\ldots\cdot B^{-1}(t+N-2)\times \\ & \quad \times f_2(t+N-2, x_{m-1}(t+N-2),\ y_{m-1}(t+N-2)) - \\ & \quad - B^{-1}(t)\cdot\ldots\cdot B^{-1}(t+N-1)\times \\ & \quad \times f_2(t+N-1, x_{m-1}(t+N-1),\ y_{m-1}(t+N-1)). \end{aligned} \tag{6}$$

Беручи до уваги умови 1 і 2, за допомогою методу математичної індукції можна показати, що всі $x_m(t),\ y_m(t),\ m \ge 0,$ є неперервними при $t \in R$ та N-періодичними вектор-функціями.

Покажемо, що послідовності вектор-функцій $x_m(t),\ y_m(t),\ m \ge 1,$ рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $\bar{x}(t)$ та $\bar{y}(t)$. Для цього достатньо довести, що при $t \in R$ і всіх $m \ge 0$ виконуються оцінки

$$\begin{aligned} & |x_m(t) - x_{m-1}(t)| \le \bar{M}\ \bar{\Delta}^{m-1}, \\ & |y_m(t) - y_{m-1}(t)| \le \bar{M}\ \bar{\Delta}^{m-1}, \end{aligned} \tag{7}$$

де

$$\bar{M} = \max\{((N-1)\theta_1 + 1),\ ((N-1)\theta_2 + \Delta_2)\}\ M,$$

$$M = \max\{\max_t |f_1(t,0,0)|,\ \max_t |f_2(t,0,0)|\},$$

$$\theta_1 = \\ = \max\{\max_t |A(t)|, \ldots, \max_t |A(t)A(t+1)\ldots A(t+N-2)|\},$$

$$\theta_2 = \\ = \max\{\max_t |B^{-1}(t)|, \ldots, \max_t |B^{-1}(t)\cdot\ldots\cdot B^{-1}(t+N-2)|\},$$

$$\Delta < \bar{\Delta} < 1, \Delta = \max\{\Delta_1, \Delta_2\}.$$

Справді, з умов 1, 2, при $m = 1$ маємо

$$\begin{aligned} & |x_1(t) - x_0(t)| \le |A(t+N-1)\cdot\ldots\cdot A(t+1)|\ |f_1(t,0,0)| + \\ & \quad + \ldots + |A(t+N-1)|\ |f_1(t+N-2,0,0)| + \\ & \quad + |f_1(t+N-1,0,0)| \le ((N-1)\theta_1 + 1)M \le \bar{M}, \\ & |y_1(t) - y_0(t)| \le |B^{-1}(t)|\,|f_2(t,0,0)| + \ldots + \\ & \quad + |B^{-1}(t)\cdot\ldots\cdot B^{-1}(t+N-2)|\ |f_2(t+N-2,0,0)| + \\ & \quad + |B^{-1}(t)\cdot\ldots\cdot B^{-1}(t+N-1)|\ |f_2(t+N-1,0,0)| \le \\ & \quad \le ((N-1)\theta_2 + \Delta_2)M \le \bar{M}, \end{aligned} \tag{8}$$

тобто оцінки (7) виконуються при $m = 1$. Припустимо, що оцінки (7) доведені вже для деякого $m \ge 1$. Тоді безпосередньо з умов 1 і 2 та (6) отримуємо

$$\begin{aligned} & |x_{m+1}(t) - x_m(t)| \le \\ & \le |A(t+N-1)A(t+N-2)\cdot\ldots\cdot A(t)|\,|x_m(t) - x_{m-1}(t)| + \\ & + |A(t+N-1)\cdot\ldots\cdot A(t+1)|\,|f_1(t, x_m(t),\ y_m(t)) - \\ & - f_1(t, x_{m-1}(t), y_{m-1}(t))| + \ldots + |A(t+N-1)| \times \\ & \times |f_1(t+N-2, x_m(t+N-2),\ y_m(t+N-2)) - \\ & - f_1(t+N-2, x_{m-1}(t+N-2),\ y_{m-1}(t+N-2))| + \\ & + |f_1(t+N-1, x_m(t+N-1),\ y_m(t+N-1)) - \\ & - f_1(t+N-1, x_{m-1}(t+N-1), y_{m-1}(t+N-1))| \le \\ & \le \bar{M}\ \bar{\Delta}^{m-1}\Delta_1 + \bar{M}\ l_1\ \theta_1\ (\bar{\Delta}^{m-1} + \bar{\Delta}^{m-1}) + \ldots + \\ & + \bar{M}\ l_1\ \theta_1\ (\bar{\Delta}^{m-1} + \bar{\Delta}^{m-1}) + \bar{M}\ l_1\ (\bar{\Delta}^{m-1} + \bar{\Delta}^{m-1}) \le \\ & \le \bar{M}\ \bar{\Delta}^{m-1}\ (\Delta_1 + 2\ l_1\ [(N-1)\ \theta_1 + 1]), \\ & |y_{m+1}(t) - y_m(t)| \le \\ & \le |B^{-1}(t)\cdot\ldots\cdot B^{-1}(t+N-1)|\,|y_m(t) - y_{m-1}(t)| + \end{aligned}$$

$$+\,|B^{-1}(t)||f_2(t,x_m(t),y_m(t))-f_2(t,x_{m-1}(t),y_{m-1}(t))|+\ldots+$$
$$+\,|B^{-1}(t)\cdot\ldots\cdot B^{-1}(t+N-2)|\times$$
$$\times\,|f_2(t+N-2,x_m(t+N-2),y_m(t+N-2))-$$
$$-\,f_2(t+N-2,x_{m-1}(t+N-2),y_{m-1}(t+N-2))|+$$
$$+\,|B^{-1}(t)\cdot\ldots\cdot B^{-1}(t+N-1)|\times$$
$$\times\,|f_2(t+N-1,x_m(t+N-1),\,y_m(t+N-1))-$$
$$-\,f_2(t+N-1,x_{m-1}(t+N-1),y_{m-1}(t+N-1))|\le$$
$$\le \bar M\ \bar\Delta^{m-1}\Delta_2+\bar M\, l_2\,\theta_2(\bar\Delta^{m-1}+\bar\Delta^{m-1})+\ldots+$$
$$+\,\bar M\, l_2\theta_2(\bar\Delta^{m-1}+\bar\Delta^{m-1})+\bar M\, l_2\,\Delta_2(\bar\Delta^{m-1}+\bar\Delta^{m-1})\le$$
$$\le \bar M\ \bar\Delta^{m-1}(\Delta_2+2\,l_2\,[\theta_2\,(N-1)+\Delta_2]),$$

звідки при достатньо малих l_1, l_2 випливає

$$|x_m(t)-x_{m-1}(t)|\le \bar M\ \bar\Delta^{m-1},$$
$$|y_m(t)-y_{m-1}(t)|\le \bar M\ \bar\Delta^{m-1},$$

де

$$\bar\Delta=\max\{\Delta_1+2\,l_1\,[(N-1)\,\theta_1+1],$$
$$\Delta_2+2\,l_2\,[\theta_2\,(N-1)+\Delta_2]\}.$$

Таким чином, оцінки (7) виконуються при всіх $m\ge 1$. Тоді безпосередньо із (7) випливає, що послідовності неперервних N-періодичних вектор-функцій $x_m(t), y_m(t),\ \ m\ge 0,$ рівномірно збігаються до деяких неперервних, N-періодичних вектор-функцій $\bar x(t)=\lim\limits_{m\to+\infty}x_m(t),\ \ \bar y(t)=\lim\limits_{m\to+\infty}y_m(t),$ які є неперервними N-періодичними розв'язками систем рівнянь (5) (в цьому можна переконатись, якщо в (6) перейти до границі при $m\to+\infty$).

Тепер покажемо, що розв'язок $\bar z(t)=(\bar x(t), \bar y(t))$ є єдиним. Дійсно, припустимо, що існує ще один неперервний N-періодичний розв'язок $\hat z(t)=(\hat x(t),\hat y(t))$ системи (5) такий, що

$$\bar x(t)\ne\hat x(t),$$
$$\bar y(t)\ne\hat y(t).$$

Тоді з огляду на умови 1 і 2 матимемо

$$|\bar x(t)-\hat x(t)|\le$$
$$\le|A(t+N-1)A(t+N-2)\cdot\ldots\cdot A(t)||\bar x(t)-\hat x(t)|+$$
$$+\,|A(t+N-1)A(t+N-2)\cdot\ldots\cdot A(t+1)|\times$$
$$\times\, l_1(|\bar x(t)-\hat x(t)|+|\bar y(t)-\hat y(t)|)+\ldots+$$
$$+\,|A(t+N-1)|\ \ l_1(|\bar x(t+N-2)-\hat x(t+N-2)|+$$
$$+\,|\bar y(t+N-2)-\hat y(t+N-2)|)+$$
$$+\,l_1(|\bar x(t+N-1)-\hat x(t+N-1)|+$$
$$+\,|\bar y(t+N-1)-\hat y(t+N-1)|)\le$$
$$\le\Delta_1\,|\bar x(t)-\hat x(t)|+\theta_1 l_1(|\bar x(t)-\hat x(t)|+|\bar y(t)-\hat y(t)|)+$$
$$+\ldots+\theta_1\ l_1\ (|\bar x(t+N-2)-\hat x(t+N-2)|+$$
$$+\,|\bar y(t+N-2)-\hat y(t+N-2)|)+$$
$$+\,l_1(|\bar x(t+N-1)-\hat x(t+N-1)|+$$
$$+\,|\bar y(t+N-1)-\hat y(t+N-1)|)\le$$
$$\le(\Delta_1+2\,l_1\,[(N-1)\,\theta_1+1])\,\|\bar z(t)-\hat z(t)\|,$$
$$|\bar y(t)-\hat y(t)|\le$$
$$\le|B^{-1}(t)B^{-1}(t+1)\cdot\ldots\cdot B^{-1}(t+N-1)||\bar y(t)-\hat y(t)|+$$
$$+\,|B^{-1}(t)|\ \ l_2(|\bar x(t)-\hat x(t)|+|\bar y(t)-\hat y(t)|)+\ldots+$$
$$+\,|B^{-1}(t)\cdot\ldots\cdot B^{-1}(t+N-2)|\times$$
$$\times\, l_2(|\bar x(t+N-2)-\hat x(t+N-2)|+$$
$$+\,|\bar y(t+N-2)-\hat y(t+N-2)|)+$$
$$+\,|B^{-1}(t)B^{-1}(t+1)\cdot\ldots\cdot B^{-1}(t+N-1)|\times$$
$$\times\, l_2(|\bar x(t+N-1)-\hat x(t+N-1)|+$$
$$+\,|\bar y(t+N-1)-\hat y(t+N-1)|)\le$$
$$\le\Delta_2\,|\bar y(t)-\hat y(t)|+\theta_2\, l_2(|\bar x(t)-\hat x(t)|+|\bar y(t)-\hat y(t)|)+$$
$$+\ldots+\theta_2\ l_2\,(|\bar x(t+N-2)-\hat x(t+N-2)|+$$
$$+\,|\bar y(t+N-2)-\hat y(t+N-2)|)+$$
$$+\,\Delta_2\ l_2(|\bar x(t+N-1)-\hat x(t+N-1)|+$$
$$+\,|\bar y(t+N-1)-\hat y(t+N-1)|)\le$$
$$\le(\Delta_2+2\,l_2\,[\theta_2\,(N-1)+\Delta_2])\,\|\bar z(t)-\hat z(t)\|,$$

де $\|\bar z(t)-\hat z(t)\|=\max\{\max\limits_t|\bar x(t)-\hat x(t)|,\max\limits_t|\bar y(t)-\hat y(t)|\}.$

Звідси безпосередньо випливає співвідношення

$$\|\bar z(t)-\hat z(t)\|\le\bar\Delta\,\|\bar z(t)-\hat z(t)\|,$$

яке може мати місце лише тоді, коли $\bar x(t)=\hat x(t),\ \bar y(t)=\hat y(t),$ що суперечить припущенню. Таким чином, система рівнянь (5) має при $t\in R$ єдиний неперервний N-періодичний розв'язок $\bar z(t)=(\bar x(t),\bar y(t))$. Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді система рівнянь (1) має єдиний неперервний N-періодичний розв'язок.

Д о в е д е н н я. Оскільки всякий неперервний розв'язок $(x(t), y(t))$ системи (1) задовольняє систему рівнянь (5), то для доведення теореми залишається показати, що система рівнянь (1) має принаймні один неперервний N-періодичний розв'язок. Для цього побудуємо його таким чином. Покладемо

$$x(t) = \bar{x}(\tau) = \bar{x}_0(\tau), \quad \text{при} \quad \tau \in [0,1),$$

$$y(t) = \bar{y}(\tau) = \bar{y}_0(\tau), \quad \text{при} \quad \tau \in [0,1),$$

тоді безпосередньо з (1) маємо

$$x(\tau+1) = A(\tau)\bar{x}(\tau) + f_1(t, \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)) = \bar{x}_1(\tau),$$

$$y(\tau+1) = B(\tau)\bar{y}(\tau) + f_2(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)) = \bar{y}_1(\tau),$$

$$x(\tau+2) = A(\tau+1)A(\tau)\bar{x}(\tau) + A(\tau+1)\times$$
$$\times f_1(t, \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)) + f_1(\tau+1, \bar{x}(\tau+1), \bar{y}(\tau+1)) =$$
$$= \bar{x}_2(\tau),$$

$$y(\tau+2) = B(\tau+1)B(\tau)\bar{y}(\tau) + B(\tau+1)\times$$
$$\times f_2(t, \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)) + f_2(\tau+1, \bar{x}(\tau+1), \bar{y}(\tau+1)) =$$
$$= \bar{y}_2(\tau),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

$$x(\tau+N) = A(\tau+N-1)A(\tau+N-2)\cdot\ldots\cdot A(\tau)\bar{x}(\tau) +$$
$$+ A(\tau+[t]-1)\cdot\ldots\cdot A(\tau+1)f_1(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)) + \ldots +$$
$$+ A(\tau+[t]-1)f_1(\tau+N-2, \bar{x}(\tau+N-2), \bar{y}(\tau+N-2)) +$$
$$+ f_1(\tau+N-1, \bar{x}(\tau+N-1), \bar{y}(\tau+N-1)) =$$
$$= \bar{x}(\tau) = \bar{x}_0(\tau),$$

$$y(\tau+N) = B(\tau+N-1)B(\tau+N-2)\cdot\ldots\cdot B(\tau)\bar{y}(\tau) +$$
$$+ B(\tau+N-1)\cdot\ldots\cdot B(\tau+1)f_2(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)) + \ldots +$$
$$+ B(\tau+N-1)f_2(\tau+N-2, \bar{x}(\tau+N-2), \bar{y}(\tau+N-2)) +$$
$$+ f_2(\tau+N-1, \bar{x}(\tau+N-1), \bar{y}(\tau+N-1)) =$$
$$= \bar{y}(\tau) = \bar{y}_0(\tau).$$

Оскільки для довільного $t \in R^+$ маємо $[t] = iN + j$, $i = 0,1,\ldots$, $j = 0,1,\ldots,N-1$, то, поклавши

$$x(t) = x(\tau + iN + j) = \bar{x}_j(\tau),$$

$$y(t) = y(\tau + iN + j) = \bar{y}_j(\tau), \quad (10)$$

$$i = 0,1,\ldots, j = 0,1,\ldots,N-1,$$

ми побудуємо кусково-неперервний N-періодичний розв'язок (за виключенням точок $t = 1,2,\ldots$, в яких він може мати розриви 1-го роду). Зауважимо, що розв'язок системи рівнянь (1), визначений формулою (10), буде неперервним при всіх $t \in R$, якщо виконуються такі умови:

$$\bar{x}^1 = A(0)\bar{x}(0) + f_1(0, \bar{x}(0), \bar{y}(0)),$$

$$\bar{y}^1 = B(0)\bar{y}(0) + f_2(0, \bar{x}(0), \bar{y}(0)),$$

де $\bar{x}^1 = \lim\limits_{\tau\to 1-0} \bar{x}(\tau)$, $\bar{y}^1 = \lim\limits_{\tau\to 1-0} \bar{y}(\tau)$.

Теорему доведено.

Виконаємо в системі рівнянь (1) взаємно однозначну заміну змінних $x(t) = \tilde{x}(t) + \bar{x}(t)$, $y(t) = \tilde{y}(t) + \bar{y}(t)$, де $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ — неперервний N-періодичний розв'язок системи різницевих рівнянь (1). У результаті отримаємо систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \tilde{x}(t+1) = A(t)\tilde{x}(t) + \tilde{f}_1(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)), \\ \tilde{y}(t+1) = B(t)\tilde{y}(t) + \tilde{f}_2(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)), \end{cases} \quad (11)$$

де

$$\tilde{f}_1(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = f_1(t, \tilde{x}(t) + \bar{x}(t), \tilde{y}(t) + \bar{y}(t)) -$$
$$- f_1(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)),$$

$$\tilde{f}_2(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = f_2(t, \tilde{x}(t) + \bar{x}(t), \tilde{y}(t) + \bar{y}(t)) -$$
$$- f_2(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)).$$

Легко перевірити, що вектор-функції $\tilde{f}_i(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$, $i = 1,2$, задовольняють умови 1, 2.

Зауважимо, якщо $(x(t), y(t))$ — неперервний розв'язок системи (11), то він задовольняє таку систему різницевих рівнянь:

$$\begin{cases} \tilde{x}(t+N) = A^*(t)\tilde{x}(t) + F_1(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)), \\ \tilde{y}(t+N) = B^*(t)\tilde{y}(t) + F_2(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)), \end{cases} \quad (12)$$

де

$$A^*(t) = A(t+N-1)A(t+N-2)\cdot\ldots\cdot A(t),$$

$$B^*(t) = B(t+N-1)B(t+N-2)\cdot\ldots\cdot B(t),$$

$$F_1(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = A(t+N-1)\cdot\ldots\cdot A(t+1)\tilde{f}_1(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) +$$
$$+ A(t+N-1)\cdot\ldots\cdot A(t+2)\tilde{f}_1(t+1, \tilde{x}(t+1), \tilde{y}(t+1)) + \ldots +$$
$$+ A(t+N-1)\tilde{f}_1(t+N-2, \tilde{x}(t+N-2), \tilde{y}(t+N-2)) +$$
$$+ \tilde{f}_1(t+N-1, \tilde{x}(t+N-1), \tilde{y}(t+N-1)),$$

$$F_2(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = B(t+N-1)\cdot\ldots\cdot B(t+1)\tilde{f}_2(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) +$$
$$+ B(t+N-1)\cdot\ldots\cdot B(t+2)\tilde{f}_2(t+1, \tilde{x}(t+1), \tilde{y}(t+1)) + \ldots +$$
$$+ B(t+N-1)\tilde{f}_2(t+N-2, \tilde{x}(t+N-2), \tilde{y}(t+N-2)) +$$
$$+ \tilde{f}_2(t+N-1, \tilde{x}(t+N-1), \tilde{y}(t+N-1)).$$

Неважко перевірити, що вектор-функції $F_i(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$, $i = 1,2$, задовольняють умови 1, 2.

Для системи нелінійних різницевих рівнянь (12) має місце наступна теорема.

Теорема 3. Нехай виконуються умови 1 і 2. Тоді існує заміна змінних

$$\tilde{x}(t) = u(t), \tilde{y}(t) = v(t) + w(t, u(t)), \qquad (13)$$

де вектор-функція $w(t, u(t))$ – неперервна вектор-функція така, що $w(t, 0) \equiv 0$, яка приводить систему рівнянь (12) до вигляду

$$\begin{cases} u(t+N) = A^*(t)u(t) + \tilde{F}_1(t, u(t), v(t)), \\ v(t+N) = B^*(t)v(t) + \tilde{F}_2(t, u(t), v(t)), \end{cases} \qquad (14)$$

де вектор-функції $\tilde{F}_i(t, u(t), v(t))$, $i = 1, 2$, задовольняють умови 1, 2 та $\tilde{F}_2(t, u(t), 0) \equiv 0$.

Доведення. Після підстановки (13) у (12) отримаємо (14), де вектор-функції $\tilde{F}_i(t, u(t), v(t))$, $i = 1, 2$, визначаються таким чином:

$$\tilde{F}_1(t, u(t), v(t)) = F_1(t, u(t), v(t) + w(t, u(t))),$$

$$\tilde{F}_2(t, u(t), v(t)) = B^*(t)w(t, u(t)) + $$
$$+ F_2(t, u(t), v(t) + w(t, u(t))) -$$
$$- w(t, A^*(t)u(t) + F_1(t, u(t), v(t) + w(t, u(t)))).$$

Отже, для доведення теореми достатньо показати, що існує розв'язок $w(t, u(t))$ системи рівнянь

$$w(t, A^*(t)u(t) + F_1(t, u(t), w(t, u(t))) =$$
$$= B^*(t)w(t, u(t)) + F_2(t, u(t), w(t, u(t))), \qquad (15)$$

що задовольняє умови теореми.

Розв'язок системи рівнянь (15) побудуємо за допомогою методу послідовних наближень, які визначимо так:

$$w_0(t, u(t)) = 0,$$
$$w_m(t, u(t)) = B^{*-1}(t)w_{m-1}(t, A^*(t)u(t) +$$
$$+ F_1(t, u(t), w_{m-1}(t, u(t)))) - \qquad (16)$$
$$- B^{*-1}(t)F_2(t, u(t), w_{m-1}(t, u(t))),$$

де $B^{*-1}(t) = B^{-1}(t) \cdot \ldots \cdot B^{-1}(t + N - 1)$.

Використовуючи метод математичної індукції та беручи до уваги умови 1 і 2, легко можна довести, що всі $w_m(t, u(t))$, $m \geq 0$, є неперервними при $t \geq 0$ вектор-функціями.

Покажемо, що при всіх $m \geq 1$ вектор-функції $w_m(t, u(t))$ задовольняють умову

$$|w_m(t, u') - w_m(t, u'')| \leq l\, |u' - u''|, \qquad (17)$$

де $t \in R$, $u', u'' \in R^p$, l – деяка додатна стала.

Дійсно, використовуючи (16) та умову 2, матимемо

$$|w_1(t, u') - w_1(t, u'')| =$$
$$= |B^{*-1}(t)F_2(t, u'(t), 0) - B^{*-1}(t)F_2(t, u''(t), 0)| \leq$$
$$\leq |B^{*-1}(t)|\, l_2\, |u' - u''| \leq l\, |u' - u''|,$$

тобто умова (17) виконується для $m = 1$. Припустимо, що вона доведена вже для m–1. Тоді, використовуючи (16) та умову 2, маємо

$$|w_m(t, u') - w_m(t, u'')| \leq$$
$$\leq |B^{*-1}(t)|\, |w_{m-1}(t, A^*(t)u'(t) + F_1(t, u'(t), w_{m-1}(t, u'(t)))) -$$
$$- w_{m-1}(t, A^*(t)u''(t) + F_1(t, u''(t), w_{m-1}(t, u''(t))))| +$$
$$+ |B^{*-1}(t)|\, |F_2(t, u'(t), w_{m-1}(t, u'(t))) -$$
$$- F_2(t, u''(t), w_{m-1}(t, u''(t)))| \leq$$
$$\leq |B^{*-1}(t)|\, l\, |A^*(t)u'(t) + F_1(t, u'(t), w_{m-1}(t, u'(t))) -$$
$$- A^*(t)u''(t) - F_1(t, u''(t), w_{m-1}(t, u''(t)))| +$$
$$+ |B^{*-1}(t)|\, l_2(|u'(t) - u''(t)| + l\, |u'(t) - u''(t)|) \leq$$
$$\leq |B^{*-1}(t)|\, l\, (|A^*(t)|\, |u'(t) - u''(t)| +$$
$$+ l_1(|u'(t) - u''(t)| + l\, |u'(t) - u''(t)|)) +$$
$$+ |B^{*-1}(t)|\, l_2(1 + l)\, |u'(t) - u''(t)| \leq$$
$$\leq |B^{*-1}(t)|\, l\, |u'(t) - u''(t)|\, [|A^*(t)| + l_1(1 + l)] +$$
$$+ |B^{*-1}(t)|\, l_2(1 + l)\, |u'(t) - u''(t)| =$$
$$= |B^{*-1}(t)|(l(|A^*(t)| + l_1(1 + l)) + l_2(1 + l))|u'(t) - u''(t)| \leq$$
$$\leq l\left(|B^{*-1}(t)|\left(\left(|A^*(t)| + \frac{l_1}{l}(1 + l)\right) + \frac{l_2}{l}(1 + l)\right)\right)|u' - u''| \leq$$
$$\leq l\, |u' - u''|,$$

і, отже, при достатньо малих l_1, l_2 умова (17) виконується для всіх $m \geq 1$.

Тепер покажемо, що послідовності вектор-функцій $w_m(t, u(t))$, $m \geq 1$, рівномірно збігаються до деякої неперервної вектор-функції $w(t, u(t))$. Для цього достатньо показати, що при $t \in R$ і всіх $m \geq 1$ виконуються оцінки

$$|w_m(t, u) - w_{m-1}(t, u)| \leq M\, \bar{\Delta}^{m-1}\, |u|, \qquad (18)$$

де M – деяка додатна стала, $M \geq |B^{*-1}(t)|\, l_2$, $\bar{\Delta} = |B^{*-1}(t)|\, (|A^*(t)| + 2l_1\, l + l_2) < 1$.

Дійсно, згідно з (16) маємо

$$|w_1(t, u(t)) - w_0(t, u(t))| =$$
$$= |B^{*-1}(t)|\, |F_2(t, u(t), 0)| \leq |B^{*-1}(t)|l_2\, |u(t)| \leq M\, |u(t)|,$$

тобто оцінка (18) виконується при $m = 1$. Припустимо, що оцінки доведені вже для деякого

$m \geq 1$. Тоді безпосередньо із умов теореми та (16) отримуємо

$$|w_{m+1}(t,u) - w_m(t,u)| =$$
$$= |B^{*-1}(t) w_m(t, A^*(t)u(t) + F_1(t,u(t), w_m(t,u(t)))) -$$
$$- B^{*-1}(t) F_2(t,u(t), w_m(t,u(t))) -$$
$$- B^{*-1}(t) w_{m-1}(t, A^*(t)u(t) + F_1(t,u(t), w_m(t,u(t)))) +$$
$$+ B^{*-1}(t) w_{m-1}(t, A^*(t)u(t) + F_1(t,u(t), w_m(t,u(t)))) -$$
$$- B^{*-1}(t) w_{m-1}(t, A^*(t)u(t) + F_1(t,u(t), w_{m-1}(t,u(t)))) +$$
$$+ B^{*-1}(t) F_2(t,u(t), w_{m-1}(t,u(t)))| \leq$$
$$\leq |B^{*-1}(t)|| w_m(t, A^*(t)u(t) + F_1(t,u(t), w_m(t,u(t)))) -$$
$$- w_{m-1}(t, A^*(t)u(t) + F_1(t,u(t), w_m(t,u(t))))| +$$
$$+ | B^{*-1}(t) || w_{m-1}(t, A^*(t)u(t) + F_1(t,u(t), w_m(t,u(t)))) -$$
$$- w_{m-1}(t, A^*(t)u(t) + F_1(t,u(t), w_{m-1}(t,u(t))))| +$$
$$+ |B^{*-1}(t) || F_2(t,u(t), w_m(t,u(t))) -$$
$$- F_2(t,u(t), w_{m-1}(t,u(t)))| \leq$$
$$\leq |B^{*-1}(t)| M \bar{\Delta}^{m-1} |A^*(t)u(t) + F_1(t,u(t), w_m(t,u(t)))| +$$
$$+ |B^{*-1}(t)| l | F_1(t,u(t), w_m(t,u(t))) -$$
$$- F_1(t,u(t), w_m(t,u(t)))| +$$
$$+ |B^{*-1}(t) | l_2 | w_m(t,u(t)) - w_{m-1}(t,u(t))| \leq$$
$$\leq | B^{*-1}(t) | M \bar{\Delta}^{m-1} | A^*(t) || u(t) | +$$
$$+ |B^{*-1}(t) | M \bar{\Delta}^{m-1} | F_1(t,u(t), w_m(t,u(t)))| +$$
$$+ |B^{*-1}(t) | l\, l_1 | w_m(t,u(t)) - w_{m-1}(t,u(t))| +$$
$$+ | B^{*-1}(t) | l_2\, M \bar{\Delta}^{m-1} |u(t)| \leq$$
$$\leq |B^{*-1}(t)| M \bar{\Delta}^{m-1}(| A^*(t) | + l_1\, l + l\, l_1 + l_2) |u(t)|,$$

де $\bar{\Delta} = |B^{*-1}(t)| (|A^*(t)| + 2l_1\, l + l_2) < 1$ при достатньо малих l_1, l_2.

Таким чином, оцінки (18) виконуються при всіх $m \geq 1$. Звідси безпосередньо випливає, що послідовність неперервних вектор-функцій $w_m(t,u(t))$, $m \geq 0$, рівномірно збігаються до деякої неперервної вектор-функції $w(t,u(t)) = \lim\limits_{m\to\infty} w_m(t,u(t))$, яка є розв'язком системи рівнянь (15). Теорему доведено.

Оскільки кожний розв'язок системи рівнянь (11) задовольняє систему рівнянь (12), дослідження якої зводиться до вивчення системи (14), і $\tilde{F}_2(t,u(t),0) \equiv 0$, то, беручи до уваги умови 1 і 2, легко показати, що для побудови всіх неперервних розв'язків системи (14), що знаходяться в околі тривіального розв'язку, достатньо побудувати всі неперервні розв'язки системи рівнянь

$$u(t+N) = A(t)u(t) + \tilde{F}_1(t,u(t),0) \qquad (19)$$

в околі її тривіального розв'язку $u(t) = 0$.

Висновок

У доведених вище теоремах встановлено достатні умови існування неперервних N-періодичних (N — ціле додатне число) розв'язків систем нелінійних різницевих рівнянь вигляду (1) та, застосовуючи метод інваріантних багатовидів, описано структуру множини неперервних розв'язків системи рівнянь в околі побудованого періодичного розв'язку. Актуальним для подальшого розвитку теорії різницевих рівнянь залишається дослідження властивостей неперервних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь у загальному випадку.

1. *Пелюх Г.П.* О существовании периодических решений нелинейных разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1623–1633.
2. *Пелюх Г.П.* Исследование структуры множества непрерывных решений систем нелинейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // УМЖ. – 2007. – **59**, № 1. – С. 99–108.
3. *Пелюх Г.П.* О представлении асимптотических решений нелинейных разностных уравнений // УМЖ. – 1990. – **42**, № 7. – С. 939–944.
4. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – К.: Наук. думка, 1986. – 280 с.
5. *Agarwal R.P., Romanenko E.Yu.* Stable Periodic Solutions of Difference Equations // Appl. Math. Lett. – 1998. – **11**, N 4. – P. 81–84.
6. *Martynyk D.I., Perestyuk N.A., Khabarovskaya L.V.* Periodic Solutions of One Class Systems of Difference Equations // Mat. Phiz. – 1974. – **15**. – P. 98–104. (Russian).

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
25 лютого 2011 року