

УДК 531

С.В. Ольшанський

**РОЗРАХУНОК ВЕРТИКАЛЬНОГО РУХУ КРАПЛІ,
ЩО ВИПАРОВУЄТЬСЯ ЗГІДНО ІЗ ЗАКОНОМ СРЕЗНЕВСЬКОГО**

By employing the Airy functions, we find the solution of the nonlinear Cauchy problem describing the vertical motion of the droplet evaporating under the Sreznevsky law. Using a special variable transformation in the differential equation of motion, we find the first integral with the cylindrical functions. This transformation has increased the order of the differential equation, but it became linear with variable coefficients. We also propose an approximate solution for calculating the displacement. Moreover, we compare theoretical and experimental results: they are consistent with the physical view on the process of vertical particles motion of variable mass and comply with research results of other authors. After defining the constants of the formula model, it's possible to calculate kinematic characteristics of the droplet evaporating under specific conditions of the flight.

Вступ

Розрахунок польоту частки рідини, що випаровується, доводиться проводити при аналізі руху крапель диспергованих вогнегасних речовин [1], розпилених рідких палив [2] і фарб тощо у високотемпературному газовому середовищі. Тому дослідження особливостей руху рідких часток, маса та розміри яких зменшуються у часі, як і твердих часток, належить до актуальних задач, які розглянуто в праці [3], де силу аеродинамічного опору зовнішнього середовища брали пропорційною площі міделевого перерізу та квадрату швидкості польоту краплі. Однак модель суто квадратичного опору середовища дає прийнятні результати лише при великих швидкостях руху [4]. В області малих значень швидкості сила опору зазвичай пропорційна першому ступеню швидкості [4, 5]. Тому перехід від моделі квадратичного опору до моделі квадратично-поліноміального опору дає можливість розширити її можливості, тобто створити варіант більш універсальної теорії.

Постановка задачі

Метою статті є узагальнення результатів, отриманих у [3], введенням замість квадратичної більш загальної квадратично-поліноміальної залежності сили опору від швидкості польоту краплі. При вказаному узагальненні замість одного вводяться два коефіцієнти опору зовнішнього середовища. У рівнянні руху з'являється додатковий лінійний член і для одержання розрахункових формул доводиться розв'язувати нову задачу. Отже, побудова аналітичного розв'язку узагальненого рівняння руху становить сутність цього дослідження.

Загальні відомості

Дослідження проводимо за таких припущень. Вважаємо, що зменшення радіуса частки $r = r(t)$ у часі t за рахунок випаровування відбувається за законом Срезневського [3]

$$r = r_0 \sqrt{1 - \varepsilon t}, \quad (1)$$

де $r_0 = r(0)$, $\varepsilon > 0$ – параметр, який характеризує швидкість випаровування. Внаслідок рівномірного всебічного випаровування, як і в [3], не враховуємо дію реактивної сили, зв'язаної зі зменшенням маси краплі.

Далі обмежимося дослідженням лише вертикального руху краплі, який описується одним нелінійним диференціальним рівнянням. На практиці він трапляється, наприклад, при подаванні розпиленних вогнегасних рідин установками автоматизованого імпульсного пожежогасіння, які встановлюють над або під осередком можливого загорання [1]. У теоретичному плані розв'язання задачі вертикального руху дає змогу одержати верхню та нижню оцінки швидкості польоту. А, враховуючи невеликі розбіжності цих оцінок, зумовлені малою вагою краплі порівняно з силами опору та інерції, методом інтерполяції можна наближено розрахувати і швидкість польоту краплі, що витікає під довільним кутом до горизонту [3]. Під час розрахунку таким способом не потрібно розв'язувати систему нелінійних диференціальних рівнянь, що значно його спрощує.

Без урахування реактивної сили швидкість вертикального руху краплі $v(t)$ як матеріальної точки є розв'язком диференціального рівняння класу Ріккати

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{r_0 \sqrt{1 - \varepsilon t}} (k_1 v + k_2 v^2) = \pm g. \quad (2)$$

Тут k_1, k_2 – коефіцієнти аеродинамічного опору; g – прискорення вільного падіння.

Верхній знак “+” перед g відповідає падінню краплі [6], а нижній “-” – її вертикальному руху вгору [6, 7].

Частковий розв’язок рівняння (2) будемо будувати при початковій умові

$$v(0) = v_0, \quad (3)$$

позначивши символом v_0 стартову швидкість польоту.

Аналітичний розв’язок задачі Коші для швидкості вертикального руху краплі

Враховуючи (1), перейдемо від змінної t до нової змінної $\xi = \sqrt{1 - \varepsilon t}$. Оскільки

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\xi} \frac{dv}{d\xi},$$

рівняння руху (2) і початкова умова (3) відповідно набувають вигляду

$$\frac{dv}{d\xi} - b_1 v - b_2 v^2 = -q\xi; \quad (4)$$

$$v(1) = v_0. \quad (5)$$

Тут $b_{1,2} = \frac{2k_{1,2}}{\varepsilon r_0}$; $q = \pm \frac{2g}{\varepsilon}$.

Прийнявши

$$v_1 = v + \frac{b_1}{2b_2}, \quad (6)$$

рівняння (4) зводимо до більш компактною форми

$$\frac{dv_1}{d\xi} - b_2 v_1^2 = -q\xi - \frac{b_1^2}{4b_2}. \quad (7)$$

Виразимо v_1 через допоміжну функцію $w(\xi)$ за формулою [3]

$$v_1 = -\frac{1}{b_2} w^{-1} \frac{dw}{d\xi}. \quad (8)$$

Підставивши (8) у (7), отримаємо лінійне рівняння

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - b_2 q (\xi + \delta) w = 0, \quad (9)$$

у якому $\delta = \frac{b_1^2}{4qb_2}$.

Загальним розв’язком рівняння (9) згідно з [8] є

$$w(\xi) = c_1 Ai(\eta) + c_2 Bi(\eta). \quad (10)$$

Тут $a = (|q| b_2)^{1/3} \text{sign}(q)$; $\eta = a(\xi + \delta)$; c_1, c_2 – довільні сталі; $Ai(\eta), Bi(\eta)$ – функції Ейрі.

Враховуючи (6), (8), (10), приходимо до формули швидкості вертикального руху краплі з точністю до довільної сталої $c = -c_1 c_2^{-1}$:

$$v(\eta) = \frac{a}{b_2} \frac{c Ai'(\eta) - Bi'(\eta)}{Bi(\eta) - c Ai(\eta)} - \frac{b_1}{2b_2}. \quad (11)$$

Початкова умова (5) задовольняється, коли

$$c = \frac{v^* Bi(a_1) + Bi'(a_1)}{v^* Ai(a_1) + Ai'(a_1)}. \quad (12)$$

Тут

$$a_1 = a(1 + \delta); v^* = \frac{b_2}{a} \left(v_0 + \frac{b_1}{2b_2} \right).$$

У виразах (11) і (12) штрихи над функціями Ейрі означають їхні похідні. Ці похідні, як і самі функції, затабульовано в довіднику [8], що спрощує практичне використання запропонованих розв’язків при обчисленні швидкості польоту краплі.

Зазначимо, що при $\delta = 0$, залежно від знака q , вирази (11) і (12) переходять у відомі розв’язки, отримані для краплі, що падає донизу [3, 6], або тієї, що рухається вертикально вгору [3, 7].

У випадку польоту дрібнодисперсної краплі, яка витікає з великою початковою швидкістю, наприклад, з установок імпульсного пожежогасіння [1], обчислення $v(t)$ на початковому етапі руху можна спростити переходом від точного розв’язку (11), (12) до його наближеного подання. Нехтуючи, аналогічно [1], дією сили гравітації в рівнянні (2), знаходимо

$$v_a(t) = \frac{k_1}{k_2} \left\{ \left(1 + \frac{k_1}{k_2 v_0} \right) \exp \left[\frac{2k_1}{r_0 \varepsilon} (1 - \sqrt{1 - \varepsilon t}) \right] \right\}^{-1}. \quad (13)$$

Відзначимо, що наближення (13), яке є монотонною функцією, не описує екстремальних властивостей розв'язку (11), які виникають при малих v_0 . Якщо v_0 задовольняє нерівності

$$k_1 v_0 + k_2 v_0^2 < g r_0,$$

то при падінні краплі її швидкість має максимум, тобто до деякого моменту часу $t = t_e$ вона зростає, а при $t > t_e$ вона зменшується.

Крім того $v_a(t) > 0$, що не цілком відповідає фізиці процесу під час руху краплі вгору. За такого варіанта польоту, згідно з (11), у деякий момент часу $t = t_0$ $v(t_0) = 0$, тобто відбувається зупинка краплі [9], після чого вона починає падати донизу.

Таким чином, апроксимація (13) застосовна лише в обмеженій області значень параметрів моделі.

Наближене визначення відстані, яку пролітає крапля

Звичайно, крім швидкості, потрібно обчислити відстань S , яку пролітає крапля в заданий час. Вона подається інтегралом

$$S = \int_0^t v(t) dt. \quad (14)$$

Для підінтегральної функції (11) обчислення S доводиться проводити числовим інтегруванням, оскільки не вдається звести квадратуру до відомих затабульованих функцій.

Але на малому проміжку часу руху можна побудувати наближені формули для оцінки S , які не позбавлені практичного змісту. Наприклад, у задачах пожежогасіння [1] доводиться визначати відстань польоту, на якій не відбувається більше ніж подвійного зменшення радіуса краплі за рахунок випаровування, що зводиться до дотримання нерівності

$$\varepsilon t < 0,75. \quad (15)$$

Тому далі побудуємо формулу наближеного обчислення S при виконанні нерівності (15). Уявимо шлях (14), який пролітає крапля, сумою двох доданків

$$S(t) = S_a(t) + \Phi(t), \quad (16)$$

$$\text{де } S_a(t) = \int_0^t v_a(t) dt, \quad \Phi(t) = \int_0^t [v(t) - v_a(t)] dt.$$

Враховуючи (13), після переходу до нової змінної інтегрування перший доданок у (16) зводимо до вигляду

$$S_a(t) = A \int_0^{t_1} \frac{1 - Bx}{e^x - \omega} dx, \quad (17)$$

$$\text{де } A = \frac{r_0}{k_2 + \frac{k_1}{v_0}}; \quad B = \frac{r_0 \varepsilon}{2k_1}; \quad \omega = \frac{1}{1 + \frac{k_1}{k_2 v_0}}; \quad t_1 = \frac{1}{B} \times (1 - \sqrt{1 - \varepsilon t}).$$

Інтеграл (17) не виражається скінченною комбінацією елементарних функцій, що змушує обмежитись його наближеним обчисленням. Використовуючи відомі ряди [10]

$$\frac{1}{e^x - \omega} = \frac{1}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \omega^n e^{-nx};$$

$$\ln(1 - x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n};$$

$$\frac{1-x}{x} \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} - 1$$

і табличні інтеграли від показникової функції, приходимо до виразу

$$S_a(t) = \frac{A}{\omega} \left[\left(1 - B t_1 + B \frac{e^{t_1 - \omega}}{\omega} \right) \ln(1 - \omega e^{-t_1}) - \left(1 + B \frac{1 - \omega}{\omega} \right) \ln(1 - \omega) - B f(\omega, t_1) \right], \quad (18)$$

$$\text{в якому } f(\omega, t_1) \approx \frac{\omega}{2} \left[1 - e^{-t_1} + \frac{\omega}{6} (1 - e^{-2t_1}) + \frac{\omega^2}{18} \times (1 - e^{-3t_1}) + \frac{\omega^3}{40} (1 - e^{-4t_1}) \right].$$

Другий доданок у (16) також обчислимо наближено. Використовуючи метод трапецій, отримуємо

$$\Phi(t) \approx \frac{t}{2} [v(t) - v_a(t)]. \quad (19)$$

Таким чином, за допомогою (16), (18) і (19) можна оцінювати відстань, яку пролетить крапля протягом заданого часу, у тому числі

максимальну висоту її польоту вгору [9], якщо відомий час t_0 .

При аналізі руху краплі на коротшому проміжку часу порівняно з обмеженням (15) можливе спрощення розрахунку через перехід від апроксимації (13) до компактнішої апроксимації

$$v_{an}(t) = \frac{k_1}{k_2} \left[\left(1 + \frac{k_1}{k_2 v_0} \right) \exp\left(\frac{k_1 t}{r_0}\right) - 1 \right].$$

Для неї викладений вище метод дає

$$S(t) \approx \frac{r_0}{k_2} \ln \left\{ \frac{k_2 v_0}{k_1} \left[\left(1 + \frac{k_1}{k_2 v_0} \right) \exp\left(\frac{k_1 t}{r_0}\right) - 1 \right] \right\} + \frac{t}{2} \left[v(t) - v_{an}(t) - \frac{2k_1}{k_2} \right], \quad (20)$$

що істотно скорочує обчислення.

Результати розрахунків та їх аналіз

Розглянемо рух краплі донизу. Проведемо розрахунок $v(t)$ при $r_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ м; $\varepsilon = 1$ с⁻¹; $k_1 = 5 \cdot 10^{-1}$ м/с; $k_2 = 2,5 \cdot 10^{-1}$ і порівняємо узгодження точного розв'язку (11) з асимптотич-

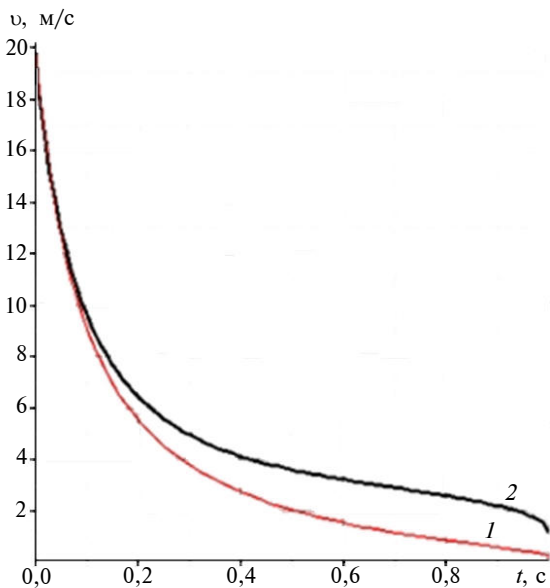


Рис. 1. Залежності швидкості від часу, отримані різними способами: 1 – за формулою (13); 2 – за формулою (11)

ним (13) при $v_0 = 20$ м/с. Графіки $v(t)$ наведено на рис. 1. Результати розрахунків підтверджують, що на початковому етапі руху асимптотичний розв'язок (13) близький до точного розв'язку (11), але зі зростанням t збільшується розбіжність результатів.

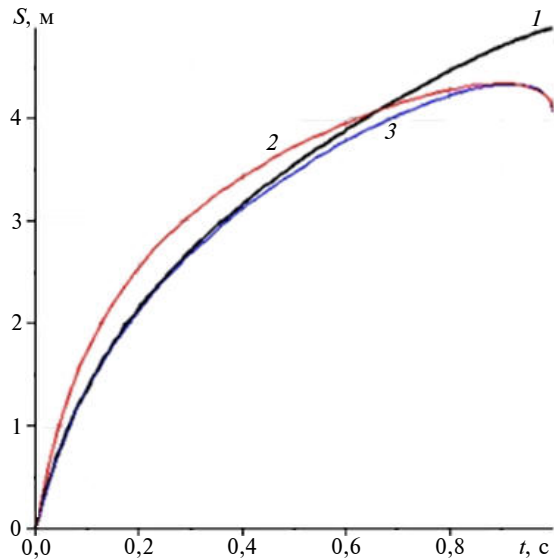


Рис. 2. Залежності відстані від часу, отримані різними способами: 1 – числове інтегрування (14); 2 – графік наближеного розв'язку (16); 3 – графік залежності (20)

Перевіримо точність запропонованих наближених формул для визначення переміщення. Для розрахунку беремо попередні вихідні дані. Результати такого порівняння наведено на рис. 2.

Як видно з одержаних результатів, формула (20) краще узгоджується з числовим розв'язком на більшій частині інтервалу руху, ніж формула (16). Таким чином, формулу (20) доцільніше використовувати в практичних розрахунках S при падінні краплі у зв'язку з її високою точністю та компактністю.

Таблиця. Розрахункові v_p й експериментальні v_e значення швидкості падіння краплі

t, c	0,03	0,07	0,14	0,20	0,25
$v_p, M/c$	67,6	46,4	28,88	21	16,47
$v_e, M/c$	67	43	30	21	18

З метою апробації викладеної теорії порівняємо результати, отримані за формулою (11), з результатами експерименту, проведеного ав-

торами [1] (таблиця). Використаємо такі вихідні дані: $r_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ м; $\varepsilon = 3$ с $^{-1}$; $k_1 = 3,12 \cdot 10^{-5}$ м/с; $v_0 = 100$ м/с; $k_2 = 3,12 \cdot 10^{-5}$.

Обчислені за формулою (11) значення швидкості $v(t) = v_p(t)$ подано у другому рядку таблиці. У третьому розташовані експериментальні значення швидкості, одержані в дослідах авторами [1]. Спостерігається достатня відповідність теорії з експериментом, яка підтверджує адекватність запропонованої моделі руху.

Висновки

Введенням нової змінної в диференціальне рівняння руху краплі, радіус якої зменшується за законом Срезневського, при квадратично-поліноміальному опорі середовища, вдалося звести його до спеціального рівняння Ріккати,

розв'язок якого виражається у функціях Ейрі. Тому, як і при суто квадратичному опорі, обчислення швидкості та дальності польоту краплі можна проводити за допомогою таблиць цих функцій.

Розрахункова апробація отриманих формул показала, що вони приводять до результатів, які узгоджуються з фізичною уявою про процес вертикального руху частки змінної маси, а також відповідають результатам експериментальних досліджень інших авторів. Тому після ідентифікації констант моделі формули можуть застосовуватися для розрахунку кінематичних характеристик краплі, що випаровується в конкретних умовах польоту.

Майбутні дослідження будуть присвячені вивченню впливу дії реактивної сили та сили Магнуса на процес руху краплі змінної маси.

1. Севриков В.В., Карпенко В.А., Севриков И.В. Автоматические быстродействующие системы пожарной защиты. – Севастополь: СевГТУ, 1996. – 260 с.
2. Лышевский А.С. Распыливание топлива в судовых двигателях. – Л.: Судостроение, 1971. – 248 с.
3. Кучеренко С.И., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В., Тищенко Л.М. Балістика крапель, які випаровуються при польоті. – Х.: ХНТУСГ, 2007. – 304 с.
4. Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики. Ч. 2. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1966. – 398 с.
5. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2. Динамика. – М.: Наука, 1991. – 640 с.
6. Ol'shanskii V.P., Ol'shanskii S.V. Vertical Motion of a Spherical Body with Decreasing Mass // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N 6. – P. 695–702.
7. Ol'shanskii V.P., Ol'shanskii S.V. Lower Estimate of the Flight Range of a Fire-Extinguishing Liquid Drop // J. of Engineering Physics and Thermophysics. – 2007. – 80, N 4. – P. 697–701.
8. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с.
9. Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. К расчёту максимальной высоты выброса капель, испаряющихся при полёте // Коммунальное хозяйство городов. – Вып. 76. – К.: Техника, 2007. – С. 412–417.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
5 листопада 2008 року