УДК 530.145

О.О. Вишенський, С.В. Сірик

ВИБІР ФАЗОВИХ ОПЕРАТОРІВ У КВАНТОВІЙ МЕХАНІЦІ

The paper considers the problem of choosing phase operators corresponding to cosine and sine of the angle of harmonic waves in the classical approximation. According to the principle of correspondence of classical evolution equations for variable phase sine and cosine to their quantum analogues, we introduce phase operators. This definition is quite ambiguous, because there is a whole class of operators classically equivalent to phase variables, but essentially different in a quantum area. We show that a set of operators can be reduced to the unique pair of operators under general physical requirements. We also demonstrate that operators are unambiguously defined by the density of phase variable distribution in the vacuum state. We also specify the method for constructing the phase operator by using moments of the density distribution of the phase variable in the vacuum state. This method provides a convenient tool for calculating some phase characteristics. We show that the infinite sequence of the moments of density uniquely defines the phase operator. Additionally, we obtain matrices of phase operators in the basis of occupation numbers. We also find explicit expressions for calculating arbitrary moments of the operators and analyze their behavior.

Вступ

Один із найбільш зручних і перспективних методів строгого опису фазових співвідношень у квантовій механіці ґрунтується на введенні коректно визначених фазових операторів C та S, що відповідають у класичному наближенні косинусу та синусу кута гармонічного коливання [1—3]. Розглядувані оператори вводяться відповідно до принципу відповідності, який визначає порядок процедури визначення оператора C чи S. Іншими словами, класичні рівняння руху для змінних $\cos\varphi$ та $\sin\varphi$ (косинуса та синуса кута гармонічного коливання) замінюються їх квантовими аналогами. Проте відомо [2, 4], що таке визначення неоднозначне в квантовій області, хоча введення фазових операторів доцільне саме в ній. Тому природно виникає бажання виділити єдину пару операторів, коректну з фізичної точки зору, на основі якої провести розгляд їх фазових властивостей у квантовій області.

Постановка задачі

Метою роботи є знаходження фазових операторів, що відповідають рівномірному розподілу фази у вакуумному стані, та одержання співвідношень для обчислення моментів операторів.

Вихідні положення

Згідно з принципом відповідності [1], класичні рівняння еволюції для змінних $\cos\varphi$ та $\sin\varphi$

$$\{\cos\varphi, H\} = \omega\sin\varphi, \quad \{\sin\varphi, H\} = -\omega\cos\varphi,$$

де $\{\cdot,\cdot\}$ — класична дужка Пуассона; H — гамільтоніан, замінюються їх квантовими аналогами

$$\frac{1}{i\hbar}[C, H] = \omega S, \quad \frac{1}{i\hbar}[S, H] = -\omega C, \qquad (1)$$

які розглядаються як операторні рівняння відносно відповідних операторів C та S. Тут $[\cdot,\cdot]$ — комутатор двох операторів.

Як було вперше відзначено Е. Лернером [4], таке визначення неоднозначне, в результаті чого існує цілий клас операторів, еквівалентних фазовій змінній у класичному наближенні, проте, суттєво відмінних один від одного в квантовій області. Відомо [1, 4], що загальний розв'язок операторних рівнянь (1) має вигляд

$$C = \frac{1}{2}(T + T^{+}), \; S = \frac{1}{2i}(T - T^{+}), \qquad (2)$$
$$T\,|n\rangle = f(n)\,|n-1\rangle,$$

де $|n\rangle$ — власний вектор оператора числа частинок N; T^{+} — оператор, спряжений до оператора T, а функція $f(n)$ задовольняє деякі вимоги, що випливають із необхідного обмеження спектра фазових операторів проміжком $[-1;1]$ [4, 5]. Неважко довести [3—5], що на станах, близьких до вакуумного, фазові розподіли істотно залежать від вибору конкретної функції $f(n)$. Оскільки введення фазових операторів доцільне саме в області $\langle n\rangle \le 1$, де квазікласичний підхід незастосовний, то потрібно виділити одну пару операторів, на основі якої і досліджувати фазові властивості польових осциляторів у цій області. Можна відзначити два шляхи розв'язку цієї задачі. Перший – це пошук такого оператора, який буде в деякому сенсі найпростішим. Власне кажучи, саме так і були вперше введені оператори C та S [1], які в загальній схемі (2) відповідають вибору $f(n) = 1 - \delta_{n,0}$, де δ – символ Кронекера. Ця модель детально досліджена в низці праць [6–8]. Значним недоліком такого підходу є його фізична необґрунтованість. У зв'язку з цим більш прийнятним здається інший підхід, який базується на ідеї обмеження набору (2) до єдиної пари операторів на основі загальних фізичних вимог. Вперше його застосували в [9], проте, отримані там результати сумнівні через відсутність фізичного обґрунтування використаної для побудови процедури симетризації. Більш глибоко проблема вибору фазових операторів розглядається в праці [3], однак, розвинений там підхід проблематично застосувати до розрахунків деяких важливих величин, пов'язаних із фазовими операторами (наприклад, характеристичних функцій чи моментів операторів на заданих квантових станах).

У цій праці клас операторів (2) обмежується до єдиної пари операторів накладанням деяких умов у квантовій області, коректних із фізичної точки зору.

Розподіл фазових змінних у вакуумному стані

Згідно з працею [10], визначимо щільність розподілу фазової змінної $\lambda = \cos\varphi$ для чистого стану $|u\rangle$ одномодового електромагнітного поля:

$$p(\lambda \mid u) = \tilde{u}^*(\lambda)\,\tilde{u}(\lambda) g(\lambda), \tag{3}$$

де $\tilde{u}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n Q_n(\lambda)$ – перетворення Фур'є вектора $|u\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n |n\rangle$; $\tilde{u}^*(\lambda)$ – комплексне спряження перетворення; $\{Q_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ – коефіцієнти розкладу власного вектора $|\lambda\rangle$ оператора C по n-квантовим станам; $g(\lambda)$ – вагова функція, відносно якої ортогональні на відрізку $[-1;1]$ поліноми $Q_n(\lambda)$. Для вакуумного стану $|0\rangle$ отримаємо

$$p(\lambda \mid 0) = g(\lambda), \tag{4}$$

тобто вагова функція $g(\lambda)$ являє собою густину ймовірності величини λ у вакуумному стані.

З іншої сторони, із фізичних міркувань природно очікувати, що фазові змінні, яким би способом вони не були визначені, у вакуумному стані повинні мати розподіли, що відповідають рівномірній щільності фазового кута в класичному розумінні [3]. В нашому випадку це означає, що розподіл $\lambda = \cos\varphi$ на вакуумному стані має такий вигляд [11]:

$$p(\lambda \mid 0) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\lambda^2}}. \tag{5}$$

Із (4) випливає, що вагова функція $g(\lambda)$ задається у вигляді формули (5). Наведені вище викладки аналогічним чином можуть бути проведені й для оператора S синуса фази [3, 7].

Покажемо тепер, що вибір конкретного вигляду $g(\lambda)$ (розподілу фазової змінної λ на вакуумному стані) є достатньою умовою для обмеження множини операторів (2) до єдиної пари операторів. Для цього визначимо процедуру побудови фазових операторів по заданій функції $g(\lambda)$.

Побудова фазових операторів та обчислення їхніх характеристик

Як показано в [10], задача на власні вектори для оператора C в загальному вигляді веде до рекурентного співвідношення

$$\frac{1}{2} f(n) Q_{n-1}(\lambda) + \frac{1}{2} f(n+1) Q_{n+1}(\lambda) = \lambda\, Q_n(\lambda), \quad n = 0,1,2,\ldots;\ f(0) = 0,\ \ Q_0 = 1, \tag{6}$$

що визначає систему ортогональних на відрізку $[-1;1]$ поліномів. Добре відомо [12], що для ортогональних поліномів властива формула $Q_{n+1}(\lambda) = (A_n\lambda + B_n) Q_n(\lambda) - C_n Q_{n-1}(\lambda)$, яка зв'язує три сусідні поліноми між собою. Тоді в нашому випадку відповідні коефіцієнти мають такі значення:

$$A_n = \frac{2}{f(n+1)},\ B_n = 0,\ C_n = \frac{f(n)}{f(n+1)}. \tag{6*}$$

Система (6) визначена однозначно з точністю до постійного множника для кожної визначеної невід'ємної вагової функції $g(\lambda)$. Додатково вводячи умову нормування $\int_{-1}^{1} Q_m(\lambda)Q_n(\lambda)g(\lambda)d\lambda = \delta_{m,n}$, можна привести поліноми $Q_n(\lambda)$ до однієї із стандартних форм і отримати їх в явному вигляді, застосовуючи відому процедуру ортогоналізації Шмідта [12] до послідовності функцій $\Psi_n(\lambda) = \lambda^n$.

Для визначення функції $f(n)$ помножимо скалярно рівність (6) на $Q_{n-1}(\lambda)$ та проінтегруємо по відрізку $[-1;1]$ відносно міри $g(\lambda)d\lambda$. Виконавши ці дії, отримаємо:

$$f(n) = 2\int_{-1}^{1} \lambda\, Q_n(\lambda)Q_{n-1}(\lambda)g(\lambda)d\lambda. \tag{7}$$

Таким чином, вибір конкретного вигляду вагової функції $g(\lambda)$ дає змогу однозначно визначити послідовність $\{Q_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ та функцію $f(n)$, а значить, і оператори C та S. Зокрема, для $g(\lambda)$, що визначається співвідношенням (5), $Q_n(\lambda)$ є стандартним класичним поліномом Чебишева першого роду [12], тобто

$$Q_0(\lambda) = 1,\ \ Q_n(\lambda) = \sqrt{2}\cos(n\arccos\lambda), \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{8}$$

Використовуючи для цього випадку (7), знаходимо

$$f(1) = \sqrt{2}, \quad f(n) = 1, \quad n = 2,3,\ldots, \tag{9}$$

звідки оператор $C = \{C_{m,n}\}_{m,n=0}^{\infty}$ у матричній формі набуває вигляду

$$C_{m,n} \equiv \langle m | C | n\rangle = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

Із отриманого виразу (8) для оператора C випливає, що він відрізняється від вивченого в [1, 6–8] (для якого, як вже було зазначено, $f(n) = 1-\delta_{n,0}$ у схемі (2)) тільки матричними елементами $\langle 0 | C | 1\rangle$ та $\langle 1 | C | 0\rangle$, тому значних змін зазнають лише фазові характеристики станів, близьких до вакуумного. Знання густини ймовірності (5) дає можливість застосувати до задачі (6) теорію розвинення самоспряжених операторів по узагальнених власних векторах [13] та обчислити середнє від довільної функції оператора C. Так, обчислюючи середнє характеристичної функції $\mathrm{X}(x) \equiv \langle e^{ixC}\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{ix\lambda}\frac{Q_n^2(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}}d\lambda$ оператора та використовуючи співвідношення $\langle C^k\rangle = \frac{1}{i^k}\left.\frac{d^k \mathrm{X}(x)}{dx^k}\right|_{x=0}$, знаходимо моменти $M_k \equiv \langle C^k\rangle$ для отриманого оператора C на n-му квантовому стані:

$$\begin{gathered} \mathrm{X}(x) = J_0(x) + (-1)^n J_{2n}(x), \quad n \ge 1, \\ \mathrm{X}(x) = J_0(x), \quad n = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

$$M_{2m} = \begin{cases} \dfrac{(2m)!}{(m!)^2 2^{2m}}\left(1 + \dfrac{(m!)^2}{(m-n)!(m+n)!}\right), & n \ge 1,\ m \ge n, \\ \dfrac{(2m)!}{(m!)^2 2^{2m}}, & n \ge 1,\ m < n, \\ \dfrac{(2m)!}{(m!)^2 2^{2m}}, & n = 0,\ m \ge 0, \end{cases} \tag{12}$$

$$M_{2m+1} = 0, \quad \forall m \ge 0,$$

де J_n – функція Бесселя першого роду цілого порядку n.

Як і для найпростішого випадку оператора C (введеного в [1], в загальній схемі (2) відповідає вибору $f(n) = 1-\delta_{n,0}$), вирази (11) та (12) переходять у відповідні класичні формули при $n >> 1$. В області $n \approx 1$ поведінка відповідних квантових щільностей істотно відрізняється: якщо для найпростішого оператора найбільше відхилення від рівномірної щільності спостерігається при $n = 0$ і монотонно зменшується при зростанні n, то для оператора C, отриманого вище (10), відхилення від рівномірного розподілу досягає максимального значення при деякому проміжному значенні $0 < n < \infty$. Також слід зазначити, що ці відхилення у функції густини ймовірності від відповідного класичного аналога мають різний характер для розглядуваної пари операторів. Так, якщо для найпростішого оператора C квантове трактування веде до зменшення моментів M_{2m} [8], тобто до ефективного "звуження" кривої розподілу, то для отриманого нами оператора (10) моменти збільшуються порівняно з класичними, тобто крива розподілу "розширюється".

Примітка. Вище було розглянуто задачу на власні значення для оператора C. Для оператора S задача на власні значення в загальному вигляді веде до рекурентного співвідношення

$$2i\mu V_n(\mu) = f(n)V_{n-1}(\mu) - f(n+1)V_{n+1}(\mu),$$
$$n = 0,1,2,\ldots; \quad f(0) = 0, \quad V_0 = i,$$

що визначає систему ортогональних на відрізку $[-1;1]$ поліномів. Аналогічно розглянутому випадку оператора C можна обчислити характеристики оператора S та знайдене його матричне подання $S = \{S_{m,n}\}_{m,n=0}^{\infty}$ в базисі чисел заповнення. Воно має такий вигляд:

$$S_{m,n} = \left\| \begin{matrix} 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{-i}{2} & 0 & \frac{i}{2} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|.$$

Характеристична функція оператора S на n-му квантовому стані подається у вигляді $\mathrm{X}(x) \equiv \langle e^{ixS} \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{ix\mu} \frac{V_n^2(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} d\mu$, моменти $\langle S^k \rangle = \frac{1}{i^k} \frac{d^k \mathrm{X}(x)}{dx^k}\Big|_{x=0}$.

Побудова фазових операторів за моментами щільності

Варто зазначити, що подібна побудова фазових операторів C та S визначеного виду може бути здійснена і в тому разі, коли щільність розподілу фазової змінної у вакуумному стані $|0\rangle$ задається своїми моментами $\tilde{M}_n \equiv \int_{-1}^{1} x^n g(x) dx$. Дійсно, утворюючи в цьому випадку визначник Грама

$$G_n = \begin{vmatrix} \tilde{M}_0 & \tilde{M}_1 & \ldots & \tilde{M}_n \\ \tilde{M}_1 & \tilde{M}_2 & \ldots & \tilde{M}_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{M}_n & \tilde{M}_{n+1} & \ldots & \tilde{M}_{2n} \end{vmatrix}, \qquad (13)$$

і користуючись відомою формулою [12] $A_n = \frac{G_n}{\sqrt{G_{n+1}G_{n-1}}}$, із (6*) отримаємо

$$A_n = \frac{2}{f(n+1)} = \frac{G_n}{\sqrt{G_{n+1}G_{n-1}}}. \qquad (14)$$

Звідки знаходимо в явному вигляді значення функції $f(\cdot)$:

$$f(n+1) = \frac{2\sqrt{G_{n+1}G_{n-1}}}{G_n}, \; n \ge 1. \qquad (15)$$

Формула (15) справедлива також і для $n = 0$, якщо вважати, що $G_{-1} = 1$.

Оскільки знання функції $f(n)$ дає змогу повністю визначити в явному вигляді оператори C та S, то нескінченна послідовність моментів $\{\tilde{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ однозначно розв'язує поставлену задачу знаходження фазових операторів. Цей метод побудови фазових операторів (через моменти розподілу фазової змінної) може бути зручнішим порівняно із раніше викладеним методом, оскільки він дає деякі переваги при апроксимації фазових операторів у квантовій області. Дійсно, обмежуючись усіченою послідовністю $\{\tilde{M}_n\}_{n=0}^{2N}$, ми тим самим відповідно до (13)–(15) визначимо значення функції $f(n)$ для $0 \le n \le N$. Оскільки $f(n)$ у свою чергу визначає дію оператора C на n-квантові стани (3), то усічена послідовність $\{f(n)\}_{n=0}^{N}$ є достатньою для обчислення фазових характеристик на довільних станах $|u\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n |n\rangle$, для яких вкладом коефіцієнтів b_n розкладу при всіх $n \ge N$ можна знехтувати.

Висновки

Було одержано подання фазових операторів у базисі чисел заповнення та виведено формули обчислення моментів операторів для довільних чистих станів. Отримані результати можуть бути застосовані для дослідження фазових співвідношень та апроксимації фазових операторів у квантових областях.

Надалі планується розроблення загальних підходів до вибору фазових операторів та застосування теорії спектральних розвинень самоспряжених операторів по узагальнених власних функціях до дослідження отримуваних задач.

1. *Susskind L., Glogower J.* Quantum Mechanical Phase and Time Operator // Physics. – 1964. – N 1. – P. 49–61.
2. *Nieto M.M.* Quantum Phase and Quantum Phase Operators: Some Physics and Some History // Physica Scripta. – 1993. – N 48. – P. 5–12.
3. *Appl T., Schiller D.H.* Cosine and Sine Operators Related to Orthogonal Polynomial Sets on the Interval [–1, 1] // J. of Physics A: Mathematical and General. – 2005. – **38**, N 29. – P. 6485–6504.
4. *Lerner E.C.* Harmonic-Oscillator Phase Operators // Nuovo Cimento. – 1968. – **56B**. – P. 183–186.
5. *Lerner E.C., Huang H.W., Walters G.E.* Some Mathematical Properties of Oscillator Phase Operators // J. Math. Phys. – 1970. – N 11. – P. 1679–1684.
6. *Carruthers P., Nieto M.* Phase and Angle Variables in Quantum Mechanics // Rev. of Modern Physics. – 1968. – N 40. – P. 411–440.
7. *Дерюгин И.А., Вишенский А.А., Курашов В.Н.* Некоторые свойства фазовых операторов в квантовой оптике // Изв. вузов. Физика. – 1972. – № 12. – С. 44–48.
8. *Deryugin I.A., Vishensky A.A., Kurashov V.N.* Statistical Characteristics of Phase Variables in Quantum Optics // Physics Letters A. – 1972. – **38**, N 2. – P. 97–98.
9. *Tsilimigras P., Papaloucas L.* Some Remarks on the Quantum Mechanical Oscillator Phase Problem // Physics Letters A. – 1971. – **34**, N 7. – P. 355–356.
10. *Дерюгин И.А., Вишенский А.А., Курашов В.Н.* Фазовые переменные в квантовой оптике // Квантовая электроника. – 1973. – № 7. – С. 152–167.
11. *Давенпорт В., Рут В.* Введение в теорию случайных сигналов и шумов. – М.: ИЛ., 1960. – 468 с.
12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. л-ры, 1966. – 296 с.
13. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наук. думка, 1965. – 798 с.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
11 листопада 2010 року