УДК 517.9

Н.Л. Денисенко

ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРИ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ НА $\mathbb{R}^+$ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

In this paper, we consider the structure of a set of continuously differentiable on $\mathbb{R}^+$ solutions for systems of linear inhomogeneous differential-functional equations with the linearly transformed argument. Crucially, we focus on equations with the delay. We utilize basic methods of the theory of ordinary differential and differential-functional equations as well as the method of successive approximations. Furthermore, we obtain new sufficient conditions of the existence of continuously differentiable on $\mathbb{R}^+$ solutions for systems of linear differential-functional equations with the linearly transformed argument and develop the method for constructing such solutions.

Вступ

Різні частинні випадки систем диференціально-функціональних рівнянь із лінійними відхиленнями аргументу досліджувались багатьма математиками, і на сьогодні ряд питань їх теорії досить добре вивчений (див. [1—7] і наведену там бібліогр.). Так, наприклад, в [1] досить повно досліджено асимптотичні властивості розв'язків лінійного скалярного рівняння; в [2] одержані достатні умови існування та єдиності обмеженого на всій дійсній осі розв'язку системи нелінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу; в [3] досліджено питання існування неперервних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків лінійних систем рівнянь з лінійно перетвореним аргументом; у [4] встановлено достатні умови існування неперервно диференційовних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків нелінійних систем диференціально-функціональних рівнянь з лінійно перетвореним аргументом.

Постановка задачі

Метою статті є дослідження питання існування неперервних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків системи диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} B_i(t)x(\lambda_i t) + f(t), \qquad (1)$$

де $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1,2,\ldots$; $t \in \mathbb{R}^+ = [0,+\infty)$; $A(t)$, $B_i(t)$, $i = 1,2,\ldots$, — дійсні матричні функції розмірності $n \times n$; $f(t)$ — вектор-функція розмірності n.

Основні результати

Для системи рівнянь (1) має місце така теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

1) всі елементи матриць $A(t)$, $B_i(t)$, $i = 1,2,\ldots$, і вектора $f(t)$ є неперервними обмеженими при $t \in \mathbb{R}^+$ функціями, і

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |A(t)| \le a < +\infty,$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |B_i(t)| \le b_i < +\infty, \; i = 1,2,\ldots,$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |f(t)| \le f^* < +\infty,$$

де $|A(t)| = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)|$;

2) числовий ряд $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} b_i$ збігається.

Тоді система рівнянь (1) має принаймні один неперервно диференційовний при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язок $\tilde{x}(t)$.

Доведення. Розв'язок системи рівнянь (1) шукатимемо у вигляді ряду

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t), \qquad (2)$$

де $x_k(t)$, $k = 0,1,2,\ldots$, — деякі, поки що невідомі, функції. Дійсно, підставляючи (2) в (1), одержуємо

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x'_k(t) = A(t)\sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} B_i(t)\sum_{k=0}^{+\infty} x_k(\lambda_i t) + f(t).$$

Зрозуміло, якщо $x_k(t)$ вибрати такими, що

$$x'_0(t) = f(t),$$

$$x'_k(t) = A(t)x_{k-1}(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} B_i(t)x_{k-1}(\lambda_i t), \; k = 1,2,\ldots, \qquad (3)$$

то ряд (2) буде формальним розв'язком системи рівнянь (1).

Безпосередньою підстановкою в (3) можна переконатися, що векторні функції

$$x_0(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau,$$

$$x_k(t) = \int_0^t (A(\tau)x_{k-1}(\tau) + \sum_{i=1}^{+\infty} B_i(\tau)x_{k-1}(\lambda_i\tau))\,d\tau, \quad (4)$$

$$k = 1, 2, \ldots,$$

є неперервними при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язками відповідних рівнянь системи (3).

Доведемо, що ряд (2), члени якого визначено формулами (4), рівномірно збігається для довільного $t \in \mathbb{R}^+$. Для цього достатньо показати, що при всіх $k = 0,1,2,\ldots$, $t \in \mathbb{R}^+$ виконуються оцінки

$$|x_k(t)| \le f^* \frac{\theta^k t^{k+1}}{(k+1)!}, \quad (5)$$

де

$$\theta := a + \sum_{i=1}^{+\infty} b_i.$$

Справді, в силу умови 1 теореми 1 маємо

$$|x_0(t)| = f^* t,$$

тобто при $k = 0$ оцінка (5) має місце. Розмірковуючи індуктивно, припустимо, що оцінка (5) уже доведена для деякого $k \ge 0$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від k до $k+1$. Дійсно, беручи до уваги умови теореми, з (4) одержуємо

$$|x_{k+1}(t)| \le \int_0^t (|A(\tau)\|x_k(\tau)| + \sum_{i=1}^{+\infty} |B_i(\tau)\|x_k(\lambda_i\tau)|)\,d\tau \le$$

$$\le \int_0^t \left(a f^* \frac{\theta^k \tau^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{i=1}^{+\infty} b_i f^* \frac{\theta^k (\lambda_i \tau)^{k+1}}{(k+1)!} \right) d\tau =$$

$$= \frac{f^* \theta^k}{(k+1)!} \left(a + \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \lambda_i^{k+1} \right) \frac{t^{k+2}}{k+2} \le$$

$$\le \frac{f^* \theta^k}{(k+2)!} \left(a + \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \right) t^{k+2} = f^* \frac{\theta^{k+1} t^{k+2}}{(k+2)!}.$$

Цим самим доведено, що оцінка (5) має місце для довільного $k \ge 0$.

Із врахуванням того, що на будь-якому відрізку $[0,T] \subset \mathbb{R}^+$ маємо

$$|x_k(t)| \le f^* \frac{\theta^k T^{k+1}}{(k+1)!}, \; k = 0,1,2,\ldots,$$

і легко бачити, що числовий ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k T^{k+1}}{(k+1)!}$ збігається, то ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k t^{k+1}}{(k+1)!}$ рівномірно збігається на $[0,T] \subset \mathbb{R}^+$. Тоді, внаслідок (5), ряд (2) також рівномірно збігається на будь-якому відрізку $[0,T] \subset \mathbb{R}^+$ до деякої неперервної вектор-функції $\tilde{x}(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (1). Це легко показати, якщо в (4) перейти до границі при $k \to +\infty$.

Покажемо, що побудований таким чином розв'язок $\tilde{x}(t)$ системи рівнянь (1) є неперервно диференційовним. Дійсно, беручи до уваги умови теореми, зі співвідношень (3) (зважаючи на (5)) отримуємо

$$|x_0'(t)| \le f^*,$$

$$|x_k'(t)| \le |A(t)\| x_{k-1}(t)| + \sum_{i=1}^{+\infty} |B_i(t)\| x_{k-1}(\lambda_i t)| \le$$

$$\le a f^* \frac{\theta^{k-1} t^k}{k!} + \sum_{i=1}^{+\infty} b_i f^* \frac{\theta^{k-1} \lambda_i^k t^k}{k!} \le$$

$$\le f^* \frac{\theta^{k-1} t^k}{k!} \left(a + \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \right) = f^* \frac{\theta^k t^k}{k!}, \; k = 1,2,\ldots$$

Оскільки на будь-якому відрізку $[0,T] \subset \mathbb{R}^+$ маємо

$$|x_k'(t)| \le f^* \frac{\theta^k T^k}{k!}, \; k = 0,1,2,\ldots,$$

і числовий ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k T^k}{k!}$ збігається, то ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k'(t)$ рівномірно збігається на будь-якому відрізку $[0,T] \subset \mathbb{R}^+$ до деякої неперервної вектор-функції. Тим самим доведено існування неперервно диференційовного при $t \in \mathbb{R}^+$ (в силу довільності T) розв'язку $\tilde{x}(t)$ системи рівнянь (1). Теорему 1 доведено.

Продовжуючи дослідження існування інших неперервно диференційовних розв'язків системи рівнянь (1), виконаємо взаємно однозначну заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \tilde{x}(t), \quad (6)$$

де $\tilde{x}(t)$ — частинний розв'язок цієї системи рівнянь, який визначений співвідношеннями (2), (4). Тоді дослідження системи рівнянь (1) зводиться до дослідження однорідної системи диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} B_i(t)y(\lambda_i t), \qquad (7)$$

для якої має місце така теорема.

Теорема 2. Нехай виконуються умови:

1) всі елементи матриць $A(t)$, $B_i(t)$, $i = 1,2,\ldots$, є неперервними обмеженими при $t \in \mathbb{R}^+$ функціями і

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |A(t)| \le a < +\infty,$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |B_i(t)| \le b_i < +\infty, \ i = 1,2,\ldots;$$

2) числовий ряд $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i$ збігається.

Тоді система рівнянь (7) має сім'ю неперервно диференційовних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $\bar{y}(t) = \bar{y}(t,c)$, де $c = (c_1,\ldots,c_n)$, c_i, $i = \overline{1,n}$, — довільні сталі.

Доведення. Шукатимемо розв'язок системи рівнянь (7) у вигляді ряду

$$\bar{y}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k(t), \qquad (8)$$

де $y_k(t)$, $k = 0,1,2,\ldots$, — деякі, поки що невідомі, функції. Підставивши (8) у (7), отримаємо

$$\sum_{k=0}^{+\infty} y'_k(t) = A(t)\sum_{k=0}^{+\infty} y_k(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} B_i(t)\sum_{k=0}^{+\infty} y_k(\lambda_i t).$$

Звідси випливає, що якщо $y_k(t)$ вибрати такими, що

$$y'_0(t) = 0,$$

$$y'_k(t) = A(t)y_{k-1}(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} B_i(t)y_{k-1}(\lambda_i t), \ k = 1,2,\ldots, \qquad (9)$$

то ряд (8) буде формальним розв'язком системи рівнянь (7).

Можна послідовно показати, що векторні функції

$$y_0(t) = c,$$

де $c = (c_1,\ldots,c_n)$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$,

$$y_k(t) = \int_0^t (A(\tau)y_{k-1}(\tau) + \sum_{i=1}^{+\infty} B_i(\tau)y_{k-1}(\lambda_i\tau))\,d\tau,$$

$$k = 1,2,\ldots, \qquad (10)$$

є неперервно диференційовними при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язками відповідних систем рівнянь (9).

Доведемо, що ряд (8), члени якого визначено формулами (10), рівномірно збігається для довільного $t \in \mathbb{R}^+$. Розмірковуючи індуктивно, можна показати, що для функцій $y_k(t)$ виконуються оцінки

$$|y_k(t)| \le |c|\frac{\theta^k t^k}{k!}, \ k = 0,1,2,\ldots, \qquad (11)$$

де

$$\theta := a + \sum_{i=1}^{+\infty} b_i.$$

Із врахуванням того, що на будь-якому відрізку $[0,T] \subset \mathbb{R}^+$ маємо

$$|y_k(t)| \le |c|\frac{\theta^k T^k}{k!}, \ k = 0,1,2,\ldots,$$

і очевидно, що числовий ряд $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\theta^k T^k}{k!}$ збігається, то ряд $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\theta^k t^k}{k!}$ рівномірно збігається на $[0,T] \subset \mathbb{R}^+$. Тоді в силу (11) ряд (8) також рівномірно збігається на будь-якому відрізку $[0,T] \subset \mathbb{R}^+$, $|c| \le c^*$ (c^* — додатна стала) до деякої неперервної вектор-функції $\bar{y}(t,c)$, яка є розв'язком системи рівнянь (7). Це легко показати, якщо в (10) перейти до границі при $k \to +\infty$.

Доведемо, що побудований таким чином розв'язок $\bar{y}(t,c)$ є неперервно диференційовним. Дійсно, беручи до уваги умови теореми, зі співвідношень (9) (зважаючи на (11)) отримуємо

$$|y'_0(t)| = 0,$$

$$|y'_k(t)| \le |A(t)||y_{k-1}(t)| + \sum_{i=1}^{+\infty}|B_i(t)||y_{k-1}(\lambda_i t)| \le$$

$$\le a|c|\frac{\theta^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{i=1}^{+\infty} b_i|c|\frac{\theta^{k-1}\lambda_i^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} \le$$

$$\le |c|\frac{\theta^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}\left(a + \sum_{i=1}^{+\infty} b_i\right) = |c|\frac{\theta^k t^{k-1}}{(k-1)!}, \ k = 1,2,\ldots$$

Оскільки на будь-якому відрізку $[0,T] \subset \mathbb{R}^+$ маємо

$$|y'_k(t)| \le |c| \frac{\theta^k T^{k-1}}{(k-1)!},\ k = 1,2,\ldots,$$

і числовий ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\theta^k T^{k-1}}{(k-1)!}$ збігається, то, відповідно, ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} y'_k(t)$ рівномірно збігається на $[0,T] \subset \mathbb{R}^+$ до деякої неперервної вектор-функції. Тим самим ми довели існування сім'ї неперервно диференційовних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $\bar{y}(t) = \bar{y}(t,c)$ системи рівнянь (7). Теорему 2 доведено.

Таким чином, із теорем 1, 2 на підставі (6) випливає наступна теорема.

Теорема 3. Якщо виконуються всі умови теореми 1, то система рівнянь (1) має сім'ю неперервно диференційовних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $x(t) = \bar{y}(t,c) + \tilde{x}(t)$, де $c = (c_1,\ldots,c_n)$, c_i, $i = \overline{1,n}$, – довільні сталі, $\bar{y}(t,c)$ визначено співвідношеннями (8), (10), $\tilde{x}(t)$ – співвідношеннями (2), (4).

Аналогічні результати можна отримати і для більш загальних систем диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} B_i(t)x(\varphi_i(t)) + f(t), \qquad (12)$$

де $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1,2,\ldots$; $t \in \mathbb{R}^+$; $A(t)$, $B_i(t)$, $i = 1,2,\ldots$, – дійсні матричні функції розмірності $n \times n$; $f(t)$ – вектор-функція розмірності n; $\varphi_i(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Зокрема, має місце така теорема.

Теорема 4. Якщо виконуються всі умови теореми 1, а $\varphi_i(t)$, $i = 1,2,\ldots$, є неперервними при $t \in \mathbb{R}^+$ функціями, такими, що $0 \le \varphi_i(t) \le \le t$, то система рівнянь (12) має сім'ю неперервно диференційовних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $x(t) = x(t,c)$, де $c = (c_1,\ldots,c_n)$, c_i, $i = \overline{1,n}$, – довільні сталі.

Доведення теореми виконується аналогічно тому, як були доведені теореми 1, 2.

Висновки

У статті встановлено нові достатні умови існування неперервно диференційовних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків систем диференціально-функціональних рівнянь із лінійними відхиленнями аргументу вигляду (1) і розроблено метод їх побудови. Оскільки такі рівняння відіграють важливу роль у теорії диференціальних рівнянь і широко використовуються при дослідженні багатьох задач науки й техніки, то є всі підстави сподіватись, що ці результати також знайдуть своє застосування при вивченні важливих практичних задач. Розроблена в роботі методика побудови неперервно диференційовних розв'язків дає можливість в майбутньому довести існування періодичних розв'язків і дослідити їхні властивості.

1. *Kato T., McLeod J.B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – **77**. – P. 891–937.
2. *Самойленко А.М., Пелюх Г.П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 737–747.
3. *Денисенко Н.Л.* Про неперервно диференційовні на $\mathbb{R}^+$ розв'язки систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійно перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 3. – С. 322–327.
4. *Денисенко Н.Л.* Про існування неперервних на $\mathbb{R}^+$ розв'язків систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь // Доповіді НАН України. – 2008. – № 7. – С. 10–14.
5. *Kwapisz M.* On the existence and uniqueness of solutions of a certain integral-differential equation // Ann. pol. math. – 1975. – **31**, N 1. – P. 23–41.
6. *Митропольський Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. – К.: Наук. думка, 1985. – 216 с.
7. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 422 с.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
1 червня 2011 року