УДК 519.6

В.П. Денисюк, Л.В. Рибачук

ПОЛІНОМІАЛЬНІ ВЕЙВЛЕТИ З ФІНІТНИМ НОСІЄМ

We construct polynomial wavelets with compact support based on differentiating the proposed one-parametric basic finite polynomial wavelet of class C^m $(m = 0, 1, \ldots)$. We show that derivatives of this basic wavelet of the order k, $1 \le k < 2(m+1)$ in many cases are also wavelets, and the derivatives of the order $2(m+1)$ are nonreduced Haar functions. Some of the constructed wavelets are orthogonal bases, and in case of nonorthogonality they are Riesz bases.

Вступ

Термін "вейвлет" (дослівний переклад — "маленька хвилька") з'явився порівняно недавно — його ввели Гроссман і Морле в середині 80-х років у контексті аналізу властивостей сейсмічних і акустичних сигналів. На сьогодні вейвлет-аналізатори широко застосовуються в задачах розпізнавання образів, при обробці і синтезі різноманітних сигналів і зображень тощо [1—5].

Вейвлет-перетворення одновимірного сигналу полягає в його розкладі за базисом, сконструйованим з певної солітоноподібної функції (вейвлету) за допомогою масштабних змін і переносів. Кожна з функцій цього базису характеризує як певну просторову частоту, так і її локалізацію у фізичному просторі.

Таким чином, вейвлет-перетворення забезпечує двовимірну розгортку досліджуваного сигналу. При цьому частота і координата розглядаються як незалежні змінні. Результатом такого аналізу є можливість досліджувати властивості сигналу одночасно у фізичному (час, координата) і частотному просторах.

Дійсні вейвлети часто конструюються на базі похідних функції Гаусса. На основі функції Гаусса будуються також добре відомі DOG-вейвлет, вейвлет Морле тощо [1, 3].

Певним недоліком вейвлетів, побудованих на базі похідних функції Гаусса, є те, що вони мають необмежений носій.

Природним є питання, чи існують функції з фінітним носієм, похідні яких являють собою вейвлети. Відповідь на це питання є ствердною. Один із класів таких функцій розглядається в даній статті.

Постановка задачі

Метою статті є побудова поліноміальної функції з фінітним носієм, похідні якої являють собою вейвлети, а також дослідження цих вейвлетів.

Вихідні положення

Як відомо [2], будь-яку функцію $\varphi(t) \in L^2(R)$, $\|\varphi\|_{L^2} = 1$, яка задовольняє умову

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\varphi}(a)|^2}{|a|} da = C_\varphi < \infty, \qquad (1)$$

де $\hat{\varphi}(a)$ — перетворення Фур'є функції $\varphi(t)$, називають вейвлетом.

Зауважимо, що умову (1) можна подати в еквівалентній формі, а саме

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt < \infty \ \text{ або } \ \hat{\varphi}(0) = 0\,. \qquad (2)$$

Всі вейвлети, що трапляються на практиці, належать також і простору $L^1(R)$. Більшість із них неперервні, деякі диференційовні, а найбільш уживані вейвлети мають ще й фінітний носій. Надалі простори $L^1(R)$ і $L^2(R)$ будемо позначати L^1 і L^2 відповідно.

Дійсні вейвлети часто конструюються на базі похідних функції Гаусса

$$\psi_m(t) = (-1)^m \frac{d^m}{dt^m}\left[\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right],$$

перетворення Фур'є яких має вигляд

$$\tilde{\psi}_m(t) = m(-ik)^m \left[\exp\left(-\frac{k^2}{2}\right)\right].$$

Основні результати і їх обговорення

1. Розглянемо функцію

$$\varphi(m, x) = \begin{cases} \operatorname{sign}(-x)\, C_m (x^2 - |x|)^{m+1}, & |x| \le 1; \\ 0, \ |x| > 1, m = 0, 1, \ldots \end{cases} \qquad (3)$$

Легко бачити, що функція $\varphi(m,x)$ є фінітною з носієм $\operatorname{supp}\varphi(m,x)=[-1,1]$ і $\varphi(m,x)\in$ $\in C^{m}_{(-\infty,\infty)}$. Перевіримо, чи може ця функція використовуватися як базовий вейвлет.

Зрозуміло, що $\varphi(m,x)\in L^1\cap L^2$ при будь-яких m, оскільки вона обмежена і має фінітний носій. Норма цієї функції в просторі L^2 визначається сталою C_m, значення якої завжди може бути вибране таким, що $\|\varphi(m,x)\|_{L^2}=1$. Також очевидно, що вираз $|t|^q|\varphi(m,x)|$ є інтегровним на всій осі при будь-яких m, q ($m,q=0,1,\ldots$), тобто він належить простору L^1. Отже, функція $\varphi(m,x)$ має моменти будь-якого порядку q ($q=0,1,\ldots$). Далі, функція $\varphi(m,x)$ є непарною при будь-якому m. Отже, значення її перетворення Фур'є $\widehat{\varphi}(m,\,0)=0$.

Перелічені властивості дають підстави стверджувати, що функція $\varphi(m,x)$ може використовуватися як базовий вейвлет [1].

Наведемо графіки функції $\varphi(m,x)$ при $m=0,\,1,\,2,3$ (рис. 1). Значення сталих C_m покладалося рівним $C_m=4^{m+1}$.

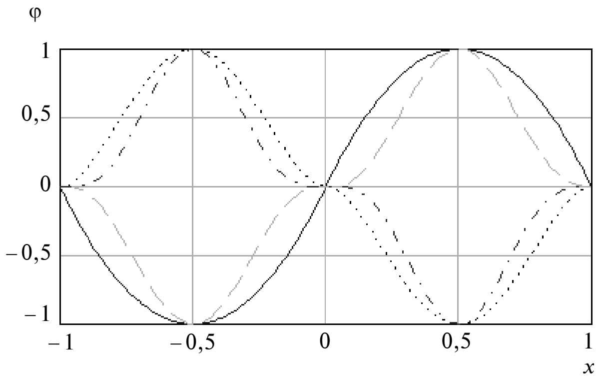

Рис. 1. Графіки функції $\varphi(m,x)$: ——— – $\varphi(0,x)$; ·········· – $\varphi(1,x)$; – – – – $\varphi(2,x)$; —·— – $\varphi(3,x)$

Лінійною заміною змінних $t=2x-1$ відобразимо функції $\varphi_{01}(m,x)$ на відрізок $[0,1]$. Проте і надалі замість аргументу t використовуватимемо аргумент x.

Використовуючи базовий вейвлет $\varphi(m,x)$, виберемо системи вейвлетів $\varphi_{ab}(m,x)$ таким чином:

$$\varphi_{ab}(m,x)=\frac{1}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{\|\varphi(m,x)\|}}\varphi\left(m,\frac{x-b}{a}\right),$$

де $\|\varphi(0,x)\|=\frac{3\cdot5}{2^3}$; $\|\varphi(1,x)\|=\frac{5\cdot7\cdot9}{2^7}$; $\|\varphi(2,x)\|=$ $=\frac{3\cdot7\cdot11\cdot13}{2^{10}}$; $\|\varphi(3,x)\|\approx0{,}2995384$. Нескладно обчислити норми $\varphi(m,x)$ і при інших значеннях m.

2. Функція $\varphi(m,x)$, отримана за допомогою формули (3), задана на відрізку $[0,1]$. Ця функція має цікаву особливість: її похідні порядку $2(m+1)$ являють собою незведену функцію Хаара, що визначається як

$$H_\alpha(x)=\begin{cases}\alpha, & 0\le x<0{,}5;\\ -\alpha, & 0{,}5\le x\le 1;\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases}$$

Зауважимо, що функція Хаара має вигляд

$$H(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<0{,}5;\\ -1, & 0{,}5\le x\le 1;\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases}$$

Зрозуміло, що

$$H(x)=\frac{1}{\alpha}H_\alpha(x).$$

Інакше кажучи, функція $\frac{d^{2(m+1)}}{dx^{2(m+1)}}\varphi(m,x)$ в свою чергу є добре відомим вейвлетом. Виникає питання: чи є вейвлетами похідні порядків n, $n=1,2,\ldots,2m+1$, цієї функції. Розглянемо це питання більш докладно. При цьому, не втрачаючи загальності, обмежимося розглядом випадку $m=1$.

Покладаючи в (3) $m=1$, $C_1=16$ і обчислюючи похідну, отримаємо

$$\frac{d}{dx}\varphi(1,x)=\begin{cases}16(4x^3+6x^2+2x), & -1\le x<0;\\ -16(4x^3-6x^2+2x), & 0\le x\le 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}\qquad(4)$$

Графік цієї функції на відрізку $[0,1]$ подано на рис. 2.

Нескладно перевірити, що функція $\frac{d}{dx}\varphi(1,x)$ задовольняє всі умови, які накладаються на вейвлети. Отже, ця функція може виступати як базисний вейвлет.

Обчислюючи похідну від (4), отримаємо

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(1,x)=\begin{cases}16(12x^2+12x+2), & -1\le x<0;\\ -16(12x^2-12x+2), & 0\le x\le 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases} \quad (5)$$

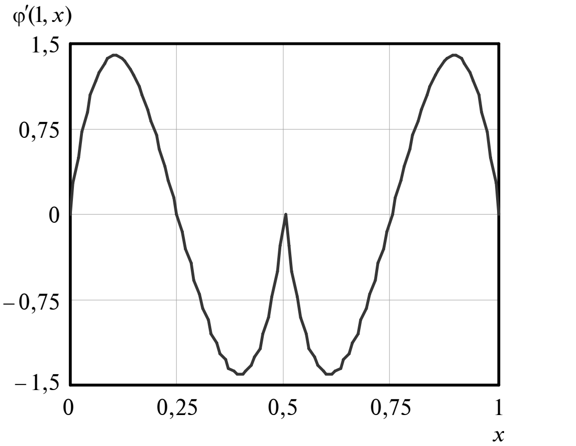

Рис. 2. Графік першої похідної базисного вейвлета $\frac{d}{dx}\varphi(1,x)$

Графік цієї функції на відрізку $[0,1]$ подано на рис 3.

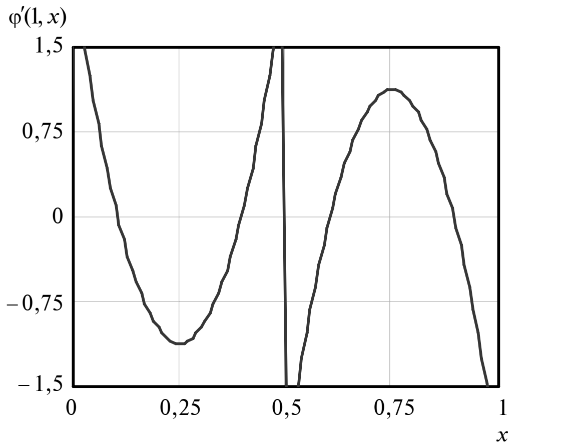

Рис. 3. Графік другої похідної базисного вейвлета $\frac{d^2}{dx^2}\varphi(1,x)$

Функція $\frac{d^2}{dx^2}\varphi(1,x)$ є розривною. Проте нескладно перевірити, що і ця функція задовольняє всі умови, які накладаються на вейвлети. Отже, функція $\frac{d^2}{dx^2}\varphi(1,x)$ може виступати як базисний вейвлет.

Обчислюючи похідну від (5), отримаємо

$$\frac{d^3}{dx^3}\varphi(1,x)=\begin{cases}16\cdot 12(2x+1), & -1\le x<0;\\ -16\cdot 12(2x-1), & 0\le x\le 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

Функція $\frac{d^3}{dx^3}\varphi(1,x)$ є розривною. Проте нескладно перевірити, що ця функція задовольняє всі умови, які накладаються на вейвлети. Отже, функція $\frac{d^3}{dx^4}\varphi(1,x)$ може виступати як базисний вейвлет.

Нарешті, обчислюючи похідну четвертого порядку, отримаємо

$$\frac{d^3}{dx^3}\varphi(1,x)=384H(x),$$

де $H(x)$ – функція Хаара, що, як відомо, є вейвлетом.

Таким чином, всі чотири похідні функції $\varphi(1,\ x)$ задовольняють умови, що накладаються на базисні вейвлети. Той факт, що похідні другого і третього порядку цієї функції є розривними, не суттєвий, оскільки і функція Хаара також є розривною.

Аналогічна ситуація має місце і при $m=0,2,3$. Так, зокрема, похідні першого і другого порядку функції $\varphi(0,x)$ є ортогональними вейвлетами. Інакше кажучи, функція $\varphi(0,x)$ породжує один неперервний неортогональний і два розривних ортогональних вейвлети, один з яких є вейвлетом Хаара.

Як було показано, функція $\varphi(1,x)$ та її похідні до четвертого порядку включно утворюють п’ять базисних вейвлетів, два з яких ($\varphi(1,x)$ і $\varphi'(1,x)$) є неперервними неортогональними, а три ($\varphi''(1,x)$, $\varphi^{(3)}(1,x)$ і $\varphi^{(4)}(1,x)$) – розривними ортогональними.

Функція $\varphi(2,x)$ та її похідні до шостого порядку включно утворюють сім базисних вейвлетів, три з яких ($\varphi(2,x)$, $\varphi'(2,x)$ і $\varphi^{(2)}(2,x)$) – неперервні неортогональні, три (($\varphi^{(3)}(2,x)$, $\varphi^{(5)}(2,x)$ і $\varphi^{(6)}(2,x)$)) – розривні ортогональні. Функція ж $\varphi^{(4)}(2,x)$ являє собою розривний неортогональний вейвлет.

Проте не завжди похідні функції $\varphi(m,x)$ взагалі утворюють базисні вейвлети. Так, наприклад, при $m=3$ сама функція та її похідні до восьмого порядку включно утворюють лише вісім базисних вейвлетів, чотири з яких ($\varphi(3,x)$, $\varphi'(3,x)$, $\varphi^{(2)}(3,x)$ і $\varphi^{(3)}(3,x)$)) – неперервні неортогональні, інші чотири ($\varphi^{(4)}(3,x)$, $\varphi^{(5)}(3,x)$, $\varphi^{(6)}(3,x)$ і $\varphi^{(8)}(3,x)$) – розривні ортогональні. Похідна ж $\varphi^{(7)}(3,x)$ не є базисним вейвлетом, оскільки не виконується умова (2) (її нульовий момент відмінний від нуля). Зсуваючи цю похідну певним чином по вісі OY, нескладно отримати функцію, в якої нульовий момент буде дорівнювати нулю. Отже, з цієї функції можна утворити базисний вейвлет. Отримані результати наведено в таблиці.

Слід зауважити, що з ростом степеня багаточлена, який використовується як базисний вейвлет, зростає кількість коливань похідних середніх порядків цього вейвлета. З урахуванням цього та з міркувань складності обчислень, на нашу думку, доцільно як базисні вейвлети використовувати багаточлени невеликих степенів, що, як відомо, потребують для своєї реалізації найменшої кількості обчислень порівняно з функціями інших класів.

3. Одним із основних у теорії вейвлет-перетворень є питання про можливість відтворення (реконструкції) сигналу за його двовимірними вейвлет-коефіцієнтами. Розглянемо це питання детальніше, наслідуючи працю [2].

Вейвлет-коефіцієнти функції $f \in L^2$ по системі вейвлетів $\varphi_{ab}(m,x)$ визначаються формулою

$$[Wf](a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi\left(m,\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi_{ab}(m,x)\,dx.$$

Найпростішим є випадок, коли вейвлети $\varphi_{kl}(m,x)$, отримані з базисного вейвлета $\varphi(m,x)$ дискретною зміною масштабу і зсуву, є ортогональними в просторі L^2. В цьому випадку вейвлети утворюють ортогональний ба-

Таблиця. Поліноміальні вейвлети, породжені функцією $\varphi(m,x)$ та її похідними

Значення параметра m	$\varphi(m,x)$	$\varphi^{(1)}(m,x)$	$\varphi^{(2)}(m,x)$	$\varphi^{(3)}(m,x)$	$\varphi^{(4)}(m,x)$	$\varphi^{(5)}(m,x)$	$\varphi^{(6)}(m,x)$	$\varphi^{(7)}(m,x)$	$\varphi^{(8)}(m,x)$
$m=0$	Вейвлет неортогональний неперервний	Вейвлет ортогональний розривний	Вейвлет Хаара ортогональний	–	–	–	–	–	–
$m=1$	Вейвлет неортогональний неперервний	Вейвлет неортогональний неперервний	Вейвлет ортогональний розривний	Вейвлет ортогональний розривний	Вейвлет Хаара ортогональний	–	–	–	–
$m=2$	Вейвлет неортогональний неперервний	Вейвлет неортогональний неперервний	Вейвлет неортогональний неперервний	Вейвлет ортогональний розривний	Вейвлет неортогональний розривний	Вейвлет ортогональний розривний	Вейвлет Хаара ортогональний	–	–
$m=3$	Вейвлет неортогональний неперервний	Вейвлет неортогональний неперервний	Вейвлет неортогональний неперервний	Вейвлет неортогональний неперервний	Вейвлет ортогональний розривний	Вейвлет неортогональний розривний	Вейвлет неортогональний розривний	Не вейвлет	Вейвлет Хаара ортогональний

Примітки. 1. Вейвлет $\varphi^{(4)}(2,x)$ можна зробити ортогональним, якщо змінити значення сталої 1 на 5/6.

2. Функція $\varphi^{(7)}(3,x)$ не є вейвлетом, оскільки її момент нульового порядку відмінний від нуля. Зсувом функції по вісі OY її можна зробити вейвлетом.

зис у вказаному просторі і відтворення сигналу, згідно із загальною теорією, відбувається за формулою

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [Wf](k,l)\,\varphi_{kl}(m,x).$$

Якщо ж вейвлети $\varphi_{ab}(m,x)$, отримані з базисного вейвлета $\varphi(m,x)$, не є ортогональними в просторі L^2, то питання є дещо складнішим. Так, зокрема, у випадку, коли ці вейвлети є базисом Рісса і базисний вейвлет є R-функцією, то існує двійник вейвлетів $\varphi^{(kl)}(m,x)$, з допомогою якого можна побудувати обернену реконструкційну формулу, яка має вигляд

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [Wf](k,l)\,\varphi^{(kl)}(m,x).$$

Розглядаючи з цієї точки зору запропоновані вище вейвлети, перш за все зауважимо, що вейвлети $\varphi_{kl}(m,x)$ при будь-яких m $(m = 0,1,\ ...)$ є базисами Ріса. Отже, базисні вейвлети $\varphi(m,x)$ є R-функціями. Їх похідні $\varphi_{kl}^{(n)}(m,x)$ $(n = 1,2,\ ...\ ,2m+1)$ також є базисами Ріса. Нарешті, похідні функції $\varphi(m,x)$ порядку $2(m+1)$ являють собою ортогональні базиси Хаара.

Треба зазначити, що аналогічні результати можна було б отримати послідовним інтегруванням функції Хаара. Проте враховуючи, що вейвлети часто конструюються на базі похідних функції Гаусса, ми вибрали варіант, за якого вейвлети конструюються на базі похідних функції $\varphi(m,x)$, що подається формулою (3).

Висновки

У статті розглянуто підхід до побудови поліноміальних фінітних вейвлетів диференціюванням запропонованого однопараметричного базисного фінітного поліноміального вейвлету класу C^m $(m = 0,1,\ ...)$. Досліджено випадки $m = 0,1,\ 2,3$. Показано, що похідні цього базисного вейвлету порядку $k\,(1 \le k < 2(m+1))$ у багатьох випадках також є вейвлетами або можуть бути зроблені вейвлетами, а похідні порядку $2(m+1)$ являють собою незведені функції Хаара. Побудовані вейвлети є розривними ортогональними або неперервними неортогональними. В останньому випадку вони утворюють базиси Ріса.

Безумовно, цікавими є подальші дослідження побудованих вейвлетів як у теоретичному напрямі (наприклад, з точки зору їх збіжності), так і в напрямі їх застосування для вирішення практичних задач (наприклад, з погляду заощадження часу для їх реалізації).

1. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физ. наук. – 1996. – **166**, № 11. – С. 1145–1170.
2. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2004. – 280 с.
3. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 464 с.
4. *Малла С.* Вейвлеты в обработке сигналов / Пер. с англ. – М.: Мир, 2005. – 672 с.
5. *Чуи И.* Введение в вейвлеты / Пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 412 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
6 вересня 2011 року