УДК 62-50

В.Д. Романенко, Ю.Л. Мілявський

МЕТОД АДАПТИВНОГО ПРОГНОЗУВАННЯ МАКСИМАЛЬНИХ УМОВНИХ ДИСПЕРСІЙ СПІВВІДНОШЕНЬ ВИХІДНИХ КООРДИНАТ ПРОЦЕСУ З РІЗНОТЕМПОВОЮ ДИСКРЕТИЗАЦІЄЮ

The paper proposes the concept of maximal conditional sample variance of ratio's discrepancy. We consider the GARCH model design method for forecasting these variances in case of multivariate heteroskedastic processes with a small sample period for input disturbances and a large period for outputs. The dynamics of processes in stochastic environment is described with polynomial matrix models with multirate sampling. Furthermore, the adaptive tuning of GARCH model coefficients is based on the recursive least squares method. Additionally, we provide the research results.

Вступ

Останнім часом у теорії та на практиці часто виникає потреба в керуванні та прогнозуванні співвідношень між різними параметрами складних систем [1, 2]. У зв'язку з цим необхідно розробляти нові методи й алгоритми керування, прогнозування та аналізу систем, що називаються координуючими. Зокрема, координуючі системи використовуються в хімічній промисловості, будівництві, системах синхронного керування технічними пристроями або їх частинами, а також в екології, біології, медицині, економіці тощо. Одночасно з розвитком методів керування співвідношеннями необхідно розробляти також методи оцінки якості координуючого керування, а також прогнозування співвідношень.

У класичній теорії стохастичних систем однією з найпоширеніших мір якості керування, а також і однією з часто прогнозованих величин є умовна дисперсія вихідної координати. В [3, 4] введено нове поняття — максимальна умовна вибіркова дисперсія вихідних координат об'єкта, і показано доцільність її застосування для прогнозування волатильності різних процесів. У контексті розвитку теорії координуючих систем у даній статті вводиться аналогічне поняття — максимальна дисперсія нев'язки співвідношення, що є мірою волатильності не окремої координати, а співвідношення координат.

Постановка задачі

Ставиться задача обчислення та дослідження максимальних умовних вибіркових дисперсій нев'язок співвідношень між координатами багатовимірного об'єкта в стохастичному середовищі. Модель динаміки системи задається у вигляді матрично-поліноміального багатовимірного рівняння з різнотемповою дискретизацією [5]. Зовнішнє збурення задається процесом авторегресії першого порядку з гауссовим білим шумом. Додатково ставиться задача адаптивного оцінювання параметрів цієї моделі.

Визначення максимальних вибіркових умовних дисперсій співвідношень координат багатовимірних процесів з різнотемповою дискретизацією

Багатовимірна модель динаміки об'єкта з різнотемповою дискретизацією подана у вигляді [6]

$$\begin{bmatrix} A_1(z_1^{-1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2(z_1^{-1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & A_n(z_1^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1\left(\left[\frac{k}{m}\right]h\right) \\ y_2\left(\left[\frac{k}{m}\right]h\right) \\ \vdots \\ y_n\left(\left[\frac{k}{m}\right]h\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & C_{12}(z^{-1}) & \dots & C_{1n}(z^{-1}) \\ C_{22}(z^{-1}) & C_{22}(z^{-1}) & \dots & C_{2n}(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1}(z^{-1}) & C_{n2}(z^{-1}) & \dots & C_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \xi_2(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{0_1} \\ a_{0_2} \\ \vdots \\ a_{0n} \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

При цьому співвідношення періодів квантування для дискретних відліків вихідних координат буде

$$h = mT_0 , \tag{2}$$

де m — ціле число, більше за одиницю. Тоді визначимо співвідношення операторів зворотного зсуву:

$$z_1^{-1} = z^{-m} ,$$

де z^{-1} — оператор зворотного зсуву на один період квантування T_0, z_1^{-1} — оператор зворотного зсуву на один період h. Структура поліномів у моделі (1) має вигляд

$$A_i(z_1^{-1}) = 1 + a_{1_i} z_1^{-1} + \ldots + a_{s_i} z_1^{-s} ,$$

$$C_{ij}(z^{-1}) = c_{0_{ij}} + c_{1_{ij}} z^{-1} + \ldots + c_{q_{ij}} z^{-q} , \tag{3}$$

$i = 1,2,\ldots,n;$ $j = 1,2,\ldots,n$. При цьому a_{0_i} — зміщення i-ої вихідної координати.

Нехай задано множину співвідношень між вихідними координатами об'єкта у вигляді

$$\mathbf{SY}\left(\left[\frac{k}{m}\right]h\right) = b, \tag{4}$$

де $\mathbf{Y} = (y_1, \ \ldots, \ y_n)^T$ — вектор вихідних координат, $\mathbf{S}$ — матриця розмірності $l \times n, l < n,$ $\operatorname{rang}(\mathbf{S}) = l$, $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ \ldots \\ S_l \end{pmatrix}$, $S_1,\ldots,S_l$ — вектор-рядки, що її формують, $\mathbf{b}$ — вектор-стовпчик розмірності l. Лінійні співвідношення (4) мають виконуватись у кожний момент часу, але у стохастичному середовищі це недосяжно, тому введемо вектор нев'язок співвідношень $\mathbf{e}\left(\left[\frac{k}{m}\right]h\right) = \mathbf{SY}\left(\left[\frac{k}{m}\right]h\right) - \mathbf{b}$. В такому разі дисперсії координат вектора $\mathbf{e}$ є мірами якості керування співвідношеннями, оскільки чим менша дисперсія i-ої координати нев'язки $e_i (i = 1,\ldots,l)$, тим з більшою точністю виконується i-те співвідношення $S_i \mathbf{Y} = b_i$.

Умовне математичне сподівання нев'язки співвідношень дорівнює $M_{j-1}[e(jh)] = M_{j-1}[\mathbf{SY}(jh) - b] = \mathbf{S}[M_{j-1}\mathbf{Y}(jh)] - \mathbf{b}$ для довільного моменту часу jh, тому необхідно спочатку обчислити умовне математичне сподівання вектора вихідних координат. Оскільки $M_{j-1}[\mathbf{Y}(jh)] = (M_{j-1}[y_1(jh)], \ldots, M_{j-1}[y_n(jh)])^T$, достатньо знайти умовне математичне сподівання кожної вихідної координати. Для цього різнотемпову модель (1) треба подати у різницевій формі для i-ої вихідної координати:

$$\begin{aligned} y_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] &= -a_{1_i} y_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right] - \ldots - \\ &- a_{s_i} y_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-s\right)h\right] + c_{0_{i1}}\xi_1\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] + \\ &+ c_{1_{i1}}\xi_1\left[\left[\frac{k}{m}\right]h - T_0\right] + \ldots + c_{m_{i1}}\xi_1\left[\left[\frac{k}{m}\right]h - mT_0\right] + \ldots + \\ &+ c_{q_{i1}}\xi_1\left[\left[\frac{k}{m}\right]h - qT_0\right] + c_{0_{i2}}\xi_2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] + \\ &+ c_{1_{i2}}\xi_2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h - T_0\right] + \ldots + c_{m_{i2}}\xi_2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h - mT_0\right] + \ldots + \\ &+ c_{q_{i2}}\xi_2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h - qT_0\right] + \ldots + c_{0_{in}}\xi_n\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] + \\ &+ c_{1_{in}}\xi_n\left[\left[\frac{k}{m}\right]h - T_0\right] + \ldots + c_{m_{in}}\xi_n\left[\left[\frac{k}{m}\right]h - mT_0\right] + \ldots + \\ &+ c_{q_{in}}\xi_n\left[\left[\frac{k}{m}\right]h - qT_0\right] + a_{0_i}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$i = 1,2,\ldots,n .$$

Досі природа збурення не бралась до уваги. У даній статті пропонується розглянути поширений на практиці і досить загальний випадок, коли збурення є процесом авторегресії першого порядку [7], що можна подати у вигляді

$$\xi(kT_0) = g\xi((k-1)T_0) + v(kT_0) , \tag{6}$$

де $v(kT_0)$ — векторний незалежний гауссів дискретний білий шум, $g \approx 0{,}8{-}0{,}9$ — відомий скалярний коефіцієнт.

Для подальших обчислень корисно знайти умовне математичне сподівання $\xi(kT_0)$ відносно інформації, наявної на момент часу $(k-i)T_0$, тобто $M_{k-i}\xi(kT_0)$. Запишемо

$$\xi(kT_0) = g\xi((k-1)T_0) + v(kT_0) = g(g\xi((k-2)T_0) +$$
$$+ v((k-1)T_0)) + v(kT_0) = g(g(g\xi((k-3)T_0) +$$
$$+ v((k-2)T_0)) + v((k-1)T_0)) + v(kT_0) = \ldots =$$
$$= g(g(\ldots(g\xi((k-i)T_0) + v((k-i+1)T_0)) +$$
$$+ v((k-i+2)T_0)) + \ldots + v((k-1)T_0)) + v(kT_0),$$

тоді, враховуючи $M_{k-i}v((k-i+1)T_0) = M_{k-i}v((k-i+2)T_0) = \ldots = M_{k-i}v(kT_0) = 0$, отримаємо $M_{k-i}\xi(kT_0) = g^i\xi((k-i)T_0)$, що і треба було знайти.

З урахуванням цього та формули (5) знайдемо умовне математичне сподівання вихідної координати $y_i(jh)$ для довільного j та кожного $i = 1,\ldots,n$:

$$M_{j-1}y_i(jh) = -a_{1_i}y_i[(j-1)h] - \ldots - a_{s_i}y_i[(j-s)h] +$$
$$+ (c_{0_{i1}}g^m + c_{1_{i1}}g^{m-1} + \ldots + c_{m-1_{i1}}g + c_{m_{i1}})\,\xi_1[jh - mT_0] +$$
$$+ c_{m+1_{i1}}\xi_1[jh-(m+1)T_0] + \ldots + c_{q_{i1}}\xi_1[jh - qT_0] +$$
$$+ (c_{0_{i2}}g^m + c_{1_{i2}}g^{m-1} + \ldots + c_{m-1_{i2}}g + c_{m_{i2}})\xi_2[jh - mT_0] +$$
$$+ c_{m+1_{i2}}\xi_2[jh-(m+1)T_0] + \ldots + c_{q_{i2}}\xi_2[jh - qT_0] + \ldots +$$
$$+ (c_{0_{in}}g^m + c_{1_{in}}g^{m-1} + \ldots + c_{m-1_{in}}g + c_{m_{in}}) \times$$
$$\times \xi_n[jh - mT_0] + c_{m+1_{in}}\xi_n[jh-(m+1)T_0] +$$
$$+ \ldots + c_{q_{in}}\xi_n[jh - qT_0] + a_{0_i}\,. \quad (7)$$

Визначимо вибіркове умовне математичне сподівання нев'язки співвідношення e_i протягом "вікна" ph:

$$\frac{1}{p}\sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} M_{j-1}\{e_i(jh)\} =$$
$$= \frac{1}{p}\left(\sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} S_i M_{j-1}\{\mathbf{Y}(jh)\} - pb_i\right) =$$
$$= \frac{1}{p}S_i\sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} M_{j-1}\{\mathbf{Y}(jh)\} - b_i,$$

де $M_{j-1}\{\mathbf{Y}(jh)\}$ – вектор-стовпчик, що складається з умовних математичних сподівань вихідних координат, розрахованих згідно з (7). Визначимо вибіркову умовну дисперсію на інтервалі ph для $\left\{e_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\right\}$, $i = 1,2,\ldots,l$:

$$\mathrm{var}_p\left\{e_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\right\} =$$
$$\frac{1}{p}\sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]}\left\{e_i(jh) - \frac{1}{p}\sum_{u=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} M_{u-1}\{e_i(uh)\}\right\}^2 =$$
$$= \frac{1}{p}\sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]}\left\{S_i\mathbf{Y}(jh) - \right.$$
$$\left. - b_i - \frac{1}{p}S_i\sum_{u=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} M_{u-1}\{\mathbf{Y}(uh)\} + b_i\right\}^2 = \frac{1}{p}\times$$
$$\times\sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]}\left\{S_i\left[\mathbf{Y}(jh) - \frac{1}{p}\sum_{u=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} M_{u-1}\{\mathbf{Y}(uh)\}\right]\right\}^2. \quad (8)$$

Визначимо максимальну вибіркову умовну дисперсію при зміні p в інтервалі $1 \le p \le p_{\max}$ на основі виразів (7), (8):

$$\overline{\overline{\xi}}{}^2_{i_{\max}}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \max_{1\le p\le p_{\max}} \mathrm{var}_p\left\{e_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\right\}, \quad (9)$$

де $p_{\max}$ встановлюється залежно від інерційності процесу, $i = 1,2,\ldots,l$.

Прогнозування максимальних дисперсій нев'язок співвідношень на основі моделей GARCH

Для прогнозування та аналізу динаміки максимальних вибіркових умовних дисперсій побудуємо узагальнену авторегресійну умовно гетероскедастичну модель (GARCH) для кожної нев'язки e_i [4]:

$$\overline{\overline{\xi}}{}^2_{i_{\max}}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \lambda_i + \sigma_{1i}\overline{\overline{\xi}}{}^2_{i_{\max}}\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right] +$$

$$+\sigma_{2i}\bar{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-2\right)h\right]+\ldots+\sigma_{r_i i}\bar{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-r_i\right)h\right]+$$

$$+w_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]+\rho_{1i}w_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right]+\ldots+$$

$$+\rho_{t_i i}w_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-t_i\right)h\right], \qquad (10)$$

де w_i — процеси дискретного білого шуму з нульовим середнім, r_i, t_i – порядки моделі (знаходяться емпірично, якщо $t_i = 0$, то отримуємо модель ARCH), $\lambda_i, \sigma_{1i}, \ldots, \sigma_{r_i i}, \rho_{1i}, \ldots, \rho_{t_i i}$ – коефіцієнти моделі, які необхідно оцінити (методика розробляється нижче).

На основі рівняння (10) виконаємо прогнозування максимальної вибіркової умовної дисперсії (9) на один великий період квантування $h = mT_0$:

$$\hat{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]+1\right)h\right]=\lambda_i+\sigma_{1i}\bar{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]+$$

$$+\sigma_{2i}\bar{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right]+\ldots+\sigma_{r_i i}\times$$

$$\times\bar{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-r_i+1\right)h\right]+$$

$$+\rho_{1i}w_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]+\rho_{2i}w_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right]+\ldots+$$

$$+\rho_{t_i i}w_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-t_i+1\right)h\right]. \qquad (11)$$

Для прогнозування згідно з (11) необхідно виконувати адаптивну настройку коефіцієнтів моделі GARCH (10) відповідно до умови мінімізації критерію оптимальності

$$I_{N_i}=\sum_{\left[\frac{k}{m}\right]=1}^{N}\left\{\bar{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]-\hat{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\right\}^2, \qquad (12)$$

де $\bar{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}$ – обчислене значення максимальної вибіркової умовної дисперсії i-го співвідношення на основі (9), $\hat{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}$ – прогнозована дисперсія, що визначається згідно з (11).

Запишемо критерій (12) у формі

$$I_{N_i}=$$

$$=\sum_{\left[\frac{k}{m}\right]=1}^{N}\left\{\hat{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]-\mathbf{X}_i^T\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\cdot\hat{\theta}_i\right\}^2\to\min, \qquad (13)$$

де вектор оцінюваних коефіцієнтів $\hat{\theta}_i$ згідно з моделлю (10) буде дорівнювати

$$\hat{\theta}_i=[\sigma_{1i},\ldots,\sigma_{r_i i},\rho_{1i},\ldots,\rho_{t_i i},\lambda_i]^T, \qquad (14)$$

а вектор обчислюваних координат становитиме

$$\mathbf{X}_i^T\left[\left[\frac{k}{m_i}\right]h_i\right]=$$

$$=[\bar{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right],\ldots,\bar{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-r_i\right)h\right],$$

$$w_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right],\ldots,w_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-t_i\right)h\right],1],$$

при цьому для всіх j виконується

$$w_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-j\right)h\right]=$$

$$=\bar{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-j\right)h\right]-\hat{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-j\right)h\right].$$

Для оцінювання невідомих оптимальних коефіцієнтів $\hat{\theta}_i$, при яких мінімізується критерій (13), застосовується рекурентний метод найменших квадратів [8]:

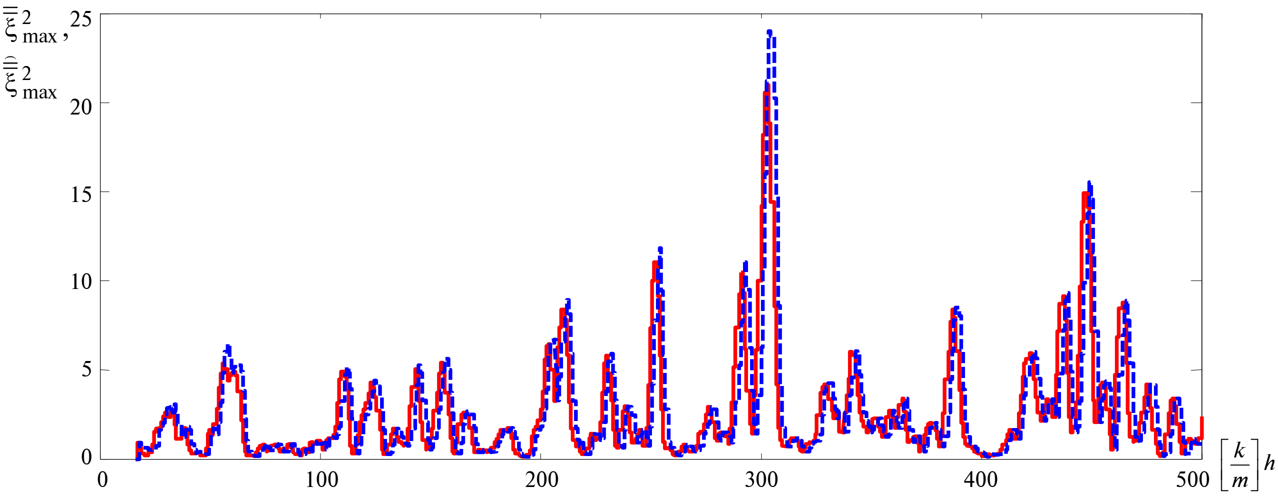
$$\hat{\theta}_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]=\hat{\theta}_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right]+K_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\times$$

$$\times\left\{\bar{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]-\mathbf{X}_i^T\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\cdot\hat{\theta}_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right]\right\}, \qquad (15)$$

$$K_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]=P_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right]\cdot\mathbf{X}_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\cdot\left\{1+\right.$$

$$\left.+\mathbf{X}_i^T\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\cdot P_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right]\mathbf{X}_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\right\}^{-1}, \qquad (16)$$

$$P_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]=P_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right]-P_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right]\times$$



Прогнозування волатильності нев'язки співвідношення: ——— – максимальні умовні вибіркові дисперсії співвідношення, – – – – прогнозні значення

$$\times \mathbf{X}_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\cdot\left\{1+\mathbf{X}_i^T\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\cdot P_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right]\times\right.$$

$$\left.\times \mathbf{X}_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\right\}^{-1}\cdot \mathbf{X}_i^T\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\cdot P_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right], \quad (17)$$

$i=1,2,\ldots,l$, $P_i(0)=p_0 I, p_0$ – деяке велике додатне число, $\hat{\theta}_i(0)$ – початкове наближення вектора коефіцієнтів.

Таким чином, процедура (15)—(17) повторюється на кожному кроці l разів для оцінки коефіцієнтів $\hat{\theta}_i$ моделей динаміки нев'язок кожного співвідношення.

Приклад

Нехай задано двовимірний об'єкт з різнотемповою дискретизацією типу (1) такого вигляду [6]:

$$A(z_1^{-1}) = I - A_1 z_1^{-1} - A_2 z_1^{-2},$$

$$C(z^{-1}) = I + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + C_3 z^{-3} + C_4 z^{-4},$$

$$h = 2T_0,$$

$$A_1=\begin{pmatrix}1,01045 & 0\\ 0 & 0,78855\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}-0,11838 & 0\\ 0 & -0,11844\end{pmatrix},$$

$$C_1=\begin{pmatrix}1,4333 & 2,1333\\ 0,55526 & 1,00526\end{pmatrix}, C_2=\begin{pmatrix}0,3455 & 1,5798\\ -0,36112 & -0,01905\end{pmatrix},$$

$$C_3=\begin{pmatrix}-0,17417 & 0,48627\\ -0,10947 & -0,2035\end{pmatrix}, C_4=\begin{pmatrix}-0,0578 & 0,05298\\ 0,0333 & 0,03716\end{pmatrix}.$$

Будемо подавати на вхід процес типу (6) із g = 0,9 і дисперсією v = 0,01. Нехай необхідно відстежувати дисперсію одного співвідношення $Y_1(r)-2Y_2(r)=1$, тобто в (4) маємо $\mathbf{S}=(1\ \ -2)$, $b=1$, $l=1$. Експериментально встановлено, що динаміка максимальної (при $p_{1_{\max}}=8$) вибіркової умовної дисперсії нев'язки цього співвідношення задовільно описується адаптивною моделлю типу ARCH (1), тобто $r_1=1, t_1=0$. Моделювання проводилось протягом N = 500 великих періодів дискретизації. У рівняннях (15)—(17) покладається $\hat{\theta}_1(0)=[0\ 0]^T$, $P_1(0)=\begin{pmatrix}1000 & 0\\ 0 & 1000\end{pmatrix}$.

Результати комп'ютерного моделювання показано на рисунку. Можна бачити, що якість прогнозування досить висока.

Висновки

Визначене в статті поняття максимальної вибіркової умовної дисперсії нев'язки співвідношення є оцінкою волатильності нев'язки заданого співвідношення між вихідними координатами багатовимірного стохастичного динамічного об'єкта з різнотемповою дискретизацією. Запропонований метод синтезу моделей GARCH дав можливість спрогнозувати дисперсію похибки співвідношення на один великий період дискретизації вперед. Як показали експериментальні дослідження, прогнозування цієї дисперсії на основі запропонованого алгоритму є досить точним і ефективним.

У подальших дослідженнях планується докладніше вивчити математичні та експериментальні властивості запропонованої в даній статті величини.

1. *Игнатьев М.Б.* Голономные автоматические системы. – Л.: Изд-во АН СССР, 1963. – 158 с.
2. *Бойчук Л.М.* Синтез координирующих систем автоматического управления. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 160 с.
3. *Романенко В.Д.* Прогнозирование и минимизация дисперсий гетероскедастических процессов на основе моделей с разнотемповой дискретизацией // Системні дослідження та інформ. технології. – 2007. – № 2. – С. 115–130.
4. *Романенко В.Д., Милявский Ю.Л.* Прогнозирование максимальных условных дисперсий многомерных процессов с разнотемповой дискретизацией на основе адаптивных моделей GARCH // Там же. – 2009. – № 4. – С. 92–108.
5. *Романенко В.Д.* Методи автоматизації прогресивних технологій: Підручник. – К.: Вища шк., 1995. – 520 с.
6. *Романенко В.Д.* Синтез и адаптивная настройка функций прогнозирования динамических процессов в приращениях переменных для моделей с разнотемповой дискретизацией // Системні дослідження та інформ. технології. – 2007. – № 4. – С. 15–25.
7. *Бокс Д., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов, прогноз и управление. – М.: Мир, 1974. – Вып. 1. – 406 с.
8. *Изерман Р.* Цифровые системы управления. – М.: Мир, 1984. – 542 с.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
30 травня 2011 року