УДК 519.8

О.Є. Кірік, В.М. Клименко, $\boxed{\text{В.В. Остапенко}}$, І.Л. Якуніна

ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ З УЗАГАЛЬНЕНИМ ЗАКОНОМ ЗБЕРЕЖЕННЯ ДЛЯ КЕРУВАННЯ РОЗПОДІЛОМ ПОТОКІВ У РОЗПОДІЛЬЧИХ МЕРЕЖАХ

This paper considers general principles for constructing and investigating mathematical models of natural resources flow distribution along the energy network. Based on classical and generalized conservation laws we construct the complex of dynamic models for flow distribution in networks taking into account the ability to create reserves of energy resources and the uncertainty of information objectively inherent in large power systems. Also, we exemplify the issues of water traffic control in the channels of water irrigation systems and gas pipelines. The proposed approach is the most useful for long-term planning, but can be used in cases of the operational control of flow distribution in distribution systems subject to periodic measurement and specification of certain network parameters.

Вступ

Математичне моделювання є важливою складовою частиною системних досліджень енергетичних комплексів, які проводяться для аналізу тенденцій і закономірностей функціонування та розвитку великих систем енергетики. Розв'язуватися ці задачі можуть лише з достатньою мірою узагальнення, з урахуванням лише тих параметрів, що мають вирішальний вплив на функціонування складних розподільчих систем [1, 2].

Властивість невизначеності (неповноти, неоднозначності) інформації, що притаманна великим системам енергетики, створює істотні труднощі при керуванні ними. В більшості задач керування неповнота інформації призводить до невизначеності при прийнятті рішень, у зв'язку з чим потрібні спеціальні методи врахування цієї властивості, які становлять важливий компонент системного підходу і спеціальну галузь системних досліджень.

Облік неповноти інформації вимагає застосування спеціальних методів при проведенні досліджень і формалізованому вирішенні окремих завдань керування. Можна підвищити точність інформації, але не можна повністю усунути її невизначеність, оскільки неповнота знань про майбутнє об'єктивно неминуча. Один із шляхів подолання невизначеності – обґрунтовувати і приймати рішення якомога пізніше, безпосередньо перед початком їх реалізації. Це положення було названо в [1] принципом "прийняття рішень з мінімально допустимою завчасністю".

Інший шлях – розробка і застосування спеціальних формалізованих методів оптимізації та прийняття рішень в умовах невизначеності. Ці методи істотно залежать від характеру і змісту задачі, що розглядається.

У статті досліджуються моделі керування рухом продуктів різної природи у відповідних розподільчих системах. Як приклад розглядаються задачі керування рухом води в каналах зрошувальних систем та газу в магістральних трубопроводах. Врахування невизначеності інформації у наведеній постановці задачі розподілу потоків приводить до поняття узагальненого закону збереження та трактовки керування потоками в термінах ігрового підходу.

Основними компонентами для побудови динамічних моделей функціонування продуктопроводів вибираються такі складники:

1) хвильові рівняння руху продукту, які враховують час проходження продуктом окремих ділянок продуктопроводу;

2) рівняння, що зв'язують поточні витрати продукту, що перетікає межі ділянки, та рівень цього продукту в заданих точках продуктопроводу;

3) формалізація можливості створення резервуарів тимчасового зберігання продукту (продуктосховищ);

4) функції обліку можливого накопичення продукту чи його нестачі на окремих ділянках продуктопроводу.

При керуванні конкретними об'єктами на заданих інтервалах керування використовуються співвідношення 1, 2, 3, в кінці кожного інтервалу керування використовується модель 4.

На основі моделей 1, 2, 3, 4 можна поставити ігрову задачу динаміки, в якій гравець-спільник керує витратами продукту, що протікає по продуктопроводах. У ролі гравця-супротивника виступає група споживачів, які забирають продукт з продуктопроводу. Мета гравця-спільника – утримати рівень продукту в заданих межах у певних точках трубопроводу.

Запропоновані в статті розробки узагальнюють моделі, побудовані в працях [3, 4]. Застосовані ігрові підходи ґрунтуються на теорії диференціальних ігор, розвинутій у [5].

Постановка задачі

Мета роботи полягає в побудові комплексу динамічних моделей руху потоків у розподільчих мережах, що базуються на класичному та узагальненому законах збереження, враховують можливість створення резервів енергетичних ресурсів та наявність невизначеності інформації, об'єктивно притаманної великим системам енергетики.

Рівняння руху продукту вздовж ділянок розподільчої мережі

Розглянемо окрему ділянку продуктопроводу від точки a до точки b. Будемо вважати, що в точці a міститься джерело продукту з витратами $x_a(t)$, у точці b — стік продукту з витратами $x_b(t)+y_b(t)$, де $x_b(t)$ — продукт, що поступає у наступні ділянки продуктопроводу, $y_b(t)$ — сумарні витрати на ділянці, що розглядається. В загальному випадку споживачі можуть розміщуватися вздовж всієї ділянки. Проте якщо врахувати терміни запізнення хвилі, можна вважати, що споживання сконцентроване в кінці ділянки.

Позначимо H рівень продукту в початковий момент часу $t=0$ (під H можна розуміти середній рівень продукту на ділянці, що розглядається). Витрати $x_a(t)$ утворюють хвилю $h_a(t)$, витрати $x_b(t)$ і $y_b(t)$ разом утворюють хвилю $h_b(t)$. Хвильовий характер руху продукту задається формулою

$$h(t) = \alpha h_a(t-\tau) + h_b(t) + H \,, \qquad (1)$$

де τ — час проходження хвилею $h_a(t)$ ділянки, що розглядається, від точки a до точки b, $\alpha \le 1$ — константа, яка враховує згасання хвилі, а на практиці — можливі втрати продукту.

Загалом при моделюванні руху води використовуються рівняння Сен-Венана [6, 7] і теорія хвиль малої амплітуди. Моделі руху газу подані в [8].

Модель (1) є спрощенням зазначених моделей для води та газу (наприклад, не враховується відбивання хвиль). Тому при розв'язуванні прикладних задач формула (1) має використовуватися на деякому інтервалі $[0,T]$, де величина T вибирається з урахуванням технологічних вимог. У момент часу T допускається вимірювання нового початкового рівня H. Таким чином, виникає зворотній зв'язок, який дає змогу компенсувати неточність моделі (1).

Авторами на практиці розглядались задачі розподілу води в каналах зрошувальних систем і газу в газопроводах. За рівень продукту вибирався рівень води відносно дна каналу або тиск газу в газопроводі.

Зв'язок між рівнями продукту в певних точках мережі та його витратами

Для розподільчих мереж розглядається задача керування витратами. Але при цьому мають виконуватись обмеження, що накладені на рівні продукту в певних точках. Тому виникає необхідність у встановленні аналітичного зв'язку між поточними витратами та рівнями.

Для точки a опишемо зв'язок між $h_a(t)$ і $x_a(t)$ за допомогою формули

$$\frac{d}{dt} h_a(t) = -k h_a(t) + c x_a(t)\,, \qquad (2)$$

де k і c — додатні коефіцієнти.

З огляду на протяжність ділянки, чим вищий рівень, тим більший буде відтік від точки a до точки b. Цей факт відображає перший доданок правої частини формули (2). Другий доданок правої частини (2) відображає те, що швидкість підвищення рівня прямо пропорційна витратам продукту, що поступає на ділянку.

У точці b функції $x_b(t)$ і $y_b(t)$ описують витрати продукту, що видаляється з ділянки. Тому вони беруться з від'ємним знаком. У результаті отримуємо формулу

$$\frac{d}{dt} h_b(t) = -k h_b(t) - c\,[x_b(t) + y_b(t)]\,. \qquad (3)$$

З формул (1)–(3) отримаємо підсумковий вираз для рівня $h(t)$ в кінці ділянки, що розглядається:

$$h_b(t) = H + \int_0^t e^{-k(t-s)} c\,[x_a(s-\tau) - x_b(s) - y_b(s)]\,ds\,. \quad (4)$$

Вираз (4) отримано з (2) і (3) за допомогою формули Коші для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь [3].

Моделювання форми хвилі за допомогою формул (2)–(4) на практиці дає додаткові можливості аналізу порівняно з моделюванням хвиль у [6], оскільки враховує аналітичну залежність рівня від витрат.

Для завершення побудови моделі (4) зв'яжемо невідомі константи k і c з відомими сталими. Нехай ω — швидкість потоку продукту на ділянці, що розглядається. Витрати продукту, що поступає на дану ділянку, мають дорівнювати витратам, що переносяться сформованою хвилею. Це можна виразити формулою

$$x_a(t) = \omega h_a(t) B, \qquad (5)$$

де константа B пов'язана зі структурою перерізу продуктопроводу. Вона може залежати від ширини каналу в зрошувальних системах або радіуса трубопроводу.

Рівність (5) має виконуватись і за умови $x_a(t) \equiv \text{const}$. З рівнянь (1), (5) і формули Коші отримуємо

$$\omega Bc\int_0^t e^{-k(t-s)}ds = 1$$

або

$$\frac{k}{c} = \omega_+ B(1 + e^{-kt}).$$

За великих значень t маємо

$$\frac{k}{c} \approx \omega_+ B. \qquad (6)$$

Формула (6) використовується у практичних обчисленнях.

Задача утримання потоку в заданих межах

Розглянемо розподільчу систему, структура (топологія) якої описується орієнтовним графом $G = (V, E)$, де V — множина вершин, E — множина дуг [9]. Дуги відповідають ділянкам продуктопроводу. По дузі (j,i) $(i, j \in V)$ протікає потік $x_{ji}(t)$, величина якого відображає витрати продукту $x_{ji}(t)$ на відповідній ділянці, константи τ_{ji} описують час проходження потоком $x_{ji}(t)$ дуги (j,i), α_{ji} — коефіцієнт затухання хвилі при проходженні дуги (j,i).

У зрошувальній системі об'єктами керування є головна насосна станція, яка подає воду в зрошувальну систему, перегороджуючи споруди, які ділять канали на б'єфи (ділянки), насосні станції перекачки, які використовуються при складному рельєфі місцевості. Аналогічно в газотранспортних системах об'єктами керування є газоперекачувальні станції, які підтримують рівень тиску на ділянках. Для наведених об'єктів керування можна говорити про безпосереднє керування величинами $x_{ji}(t)$.

Кожній вершині $i \in V$ поставимо у відповідність константи c_i і k_i, які описують зв'язок між витратами та рівнями. Зауважимо, що в моделях (2)—(4) коефіцієнти c і k були прив'язані до певної ділянки. В загальному випадку у вершині $i \in V$ можуть збігатися кілька дуг $(j,i) \in E$. Тому константи c_i і k_i прив'язані до вершини i. Позначимо $h_i(t)$ — поточний, H_i — початковий рівні перед *i*-ою вершиною, $y_i(t)$ — витрати продукту, що споживається в *i*-й вершині.

Для кожної вершини $v \in V$ визначимо множини

$$N^+(v) = \{u \in V : (u, v) \in E\},$$

$$N^-(v) = \{u \in V : (v, u) \in E\}.$$

Множина $N^+(v)$ описує всі вершини, з яких виходять дуги, що входять у вершину v; множина $N^-(v)$ описує всі вершини, в які входять дуги, що виходять з вершини v.

Враховуючи (1)—(4), запишемо більш загальні вирази зв'язку між рівнем продукту та його витратами:

$$h_i(t) = H_i + \int_0^t e^{-k_i(t-s)} c_i \left[\sum_{j \in N^+(i)} \alpha_{ji} x_{ji}(s - \tau_{ji}) - \sum_{k \in N^-(i)} x_{ik}(s) - y_i(s) \right] ds,$$

$$i \in V_0. \qquad (7)$$

Крім співвідношень (7), витрати мають задовольняти обмеження

$$a_{ji} \le x_{ji}(t) \le b_{ji}, \ (j,i) \in E, \qquad (8)$$

де a_{ji}, b_{ji} — деякі технологічні сталі. У практичних задачах умови (8) найчастіше мають вигляд

$$0 \le x_{ji}(t) \le x_{ji}^{\max}, \ (j,i) \in E,$$

де $x_{ji}^{\max}$ — задані сталі.

У статті розглядається питання утримання рівнів $h_i(t)$ у заданих межах

$$H_i^- \le h_i(t) \le H_i^+ ,\ i \in V , \tag{9}$$

де H_i^-, H_i^+ – мінімальний і максимальний припустимі рівні.

Ставиться задача утримання рівнів у межах (9) за обмежень (7), (8).

Застосовуючи методологію диференціальних ігор, цю задачу можна подати у вигляді гри утримання [5], в якій гравець-союзник керує витратами $x_{ji}(t)$, гравець-супротивник (споживач) – витратами $y_i(t)$.

Системи лінійних параметричних нерівностей

Розглянемо задачу (7)–(9). З формули (7) видно, що обмеження (9) є інтегральним. Нам потрібно отримати умови на поточні витрати, з яких випливали б обмеження (9). Для цього скористаємось методом H-опуклих множин, розвинутим у працях [5, 10], звідки випливає, що для кожного $t \in [0, T]$ нерівності (9) утворюються з нерівностей

$$H_i^- - H_i \le c_i \int_0^T e^{-k_i(T-s)} ds \left[\sum_{j \in N^+(i)} a_{ji} x_{ji}(t - \tau_{ji}) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j \in N^-(i)} x_{ik}(t) - y_i(t) \right] \le H_i^+ - H_i,$$

$$i \in V. \tag{10}$$

Лінійні нерівності

$$\frac{k_i}{c_i}[H_i^- - H_i] + y_i(t) \le \sum_{j \in N^+(i)} a_{ji} x_{ji}(t - \tau_{ji}) -$$

$$- \sum_{j \in N^-(i)} x_{ik}(t) \le \frac{k_i}{c_i}[H_i^+ - H_i] + y_i(t),$$

$$k_i > 0 ,\ i \in V, \tag{11}$$

являють собою узагальнений закон збереження, який, на відміну від класичного, гарантує не точний збіг значень витрат і споживання, а утримання рівнів продукту в певних межах. Похибка невиконання таких співвідношень компенсується на практиці вимірюванням і введенням нових початкових значень рівнів H_i.

Приходимо до задачі знаходження витрат $x_{ji}(t)$, для яких виконуються обмеження

$$\sum_{j \in N^+(i)} a_{ji} x_{ji}(t - \tau_{ji}) - \sum_{j \in N^-(i)} x_{ik}(t) \in A_i(t),$$

$$i \in V, \tag{12}$$

$$x_{ji}(t) \in B_{ji} ,\ (j,i) \in E , \tag{13}$$

де $A_i(t)$ і B_{ji} – задані відрізки.

Відрізок $A_i(t)$ описаний у формулі (11), відрізок B_{ji} задає обмеження на пропускну здатність дуги (j,i).

У стаціонарному випадку аргументи часу при невідомих потоках x_{ji}, x_{ki} і відрізках A_i відсутні і маємо задачу розв'язання системи лінійних нерівностей. Для прикладних задач ця система розв'язувалась методом виключення невідомих (аналог методу Гаусса), що було пов'язано з ранжуванням об'єктів керування [3].

У загальному випадку, коли система (12), (13) залежить від часу t і враховується час добігання хвилі τ_{ji}, виникає необхідність звести аргументи при одній і тій же невідомій до одного моменту часу, потім розв'язати отримані системи лінійних нерівностей.

Модель функціонування продуктосховищ

Нехай $V_0 \subset V$ – підмножина вершин, у яких розміщені продуктосховища. Для зрошувальних систем це будуть накопичувальні басейни, для газотранспортних – газосховища.

Позначимо $z_i(t)$ потік, що втікає чи витікає з продуктосховища, яке розміщене в i-й вершині.

Включення (12) для $i \in V_0$ перепишемо у вигляді

$$\begin{gathered} \sum_{j \in N^+(i)} a_{ji} x_{ji}(t - \tau_{ji}) - \sum_{j \in N^-(i)} x_{ik}(t) \in A_i(t), \\ i \in V \backslash V_0, \\ \sum_{j \in N^+(i)} a_{ji} x_{ji}(t - \tau_{ji}) + z_i(t) - \sum_{j \in N^-(i)} x_{ki}(t) \in A_i(t), \\ i \in V_0. \end{gathered} \tag{14}$$

До обмежень (13) додамо обмеження

$$z_i(t) \in C_i . \tag{15}$$

Відрізок C_i подамо у вигляді перетину множин

$$C_i = D_i \cap D_i^T .$$

Тут відрізок D_i задає обмеження на витрати, які в кожний момент часу можуть поступити з продуктосховища або бути закачані в нього.

Відрізок D_i^T залежить від об'єму сховища $W_i^{\max}$ і залишків продукту в сховищі в початковий момент часу W_i. Як і раніше, вважатимемо, що $[0,T]$ є інтервалом керування. Будемо вважати, що D_i^T має вигляд

$$D_i^T = \gamma_i [W_i^{\max} - W_i, W_i^{\max}],$$

де $\gamma_i > 0$ — деяка константа. Як γ_i можна вибрати величину $\frac{1}{T}$.

Якщо система (12), (13) в деякий момент часу не має розв'язку, то можна перейти до нової системи (14), (15), яка враховує можливість використання продуктосховищ.

Оптимізаційна задача розподілу потоків

Задачу оптимального розподілу потоків у мережах можна подати у вигляді екстремальної задачі на графі [4]. Аналог транспортної задачі для енергетичних мереж сформулюємо в такий спосіб: знаючи потреби споживачів у вершинах графа, потрібно розподілити потоки таким чином, щоб доставити продукт споживачам оптимальним шляхом. Збалансованість моделі забезпечується збігом загальних обсягів подачі продукту в мережу і споживання у ній. Використання узагальненого закону збереження вимагає не точного збігу, а утримання потоків у певних межах з мінімізацією вартості доставки продукту.

Як приклад наведемо задачу розподілу гідроресурсів у зрошувальних системах [11]. Економне споживання води розглядається в контексті доставки її споживачам найкоротшим шляхом з найменшими витратами:

$$\sum_{(i,j)\in V} F_{ij}(x_{ij}(t)) \to \min,$$

$$\sum_{j\in N^+(i)} a_{ji} x_{ji}(t-\tau_{ji}) - \sum_{j\in N^-(i)} \alpha_{ik} x_{ik}(t) \in A_i(t), \ i \in V,$$

$$x_{ji}(t) \in B_{ji}, \ (j,i) \in E,$$

де $F_{ij}(\cdot)$ — умовна функція вартості просування продукту вздовж ділянки.

Формулювання проблеми розподілу ресурсів у вигляді оптимізаційної задачі дає можливість не тільки вирішити питання задоволення споживачів, але й мінімізувати витрати на транспортування. Вибір нелінійної функції цілі гарантує завантаженість продуктом всіх ділянок мережі. Крім того, перевагою такої математичної моделі є незалежність методу розв'язання задачі від структури графа, що дає можливість описувати системи складної структури з довільною кількістю замкнених циклів.

Врахування невизначеності інформації в дослідженні великих розподільчих систем

З точки зору математичних постановок і методів розв'язання задач виділяють такі категорії умов оптимізації та прийняття рішень [12].

1. Певні умови, коли вся початкова інформація є (або вважається) точно відомою (детермінованою).

2. Імовірнісно-визначені умови, коли, крім детермінованих вихідних даних, є випадкові величини з точно відомими імовірнісними характеристиками.

3. Умови невизначеності, коли поряд з першими двома категоріями інформації є величини, для яких неточно відомий або зовсім невідомий імовірнісний опис. Такі умови, коли наявні тільки "імовірнісно-невизначені" величини, називаються умовами часткової невизначеності.

Що стосується методів розв'язання задач, то за певних умов оптимізації можна використовувати величезний арсенал детермінованих методів математичного програмування (лінійного, нелінійного, динамічного). При розв'язанні задач у решті категорій умов оптимізації необхідно варіювати значеннями вихідних даних і для кожного конкуруючого варіанта рішення розраховувати ефект (або наслідки) при кількох їх можливих поєднаннях. При цьому виникає важливе питання про порівняння значень цільової функції або функції вартості, отриманих для різних сполучень інформації.

У ймовірнісно-визначених умовах досить добрим критерієм для такого порівняння може служити математичне сподівання. При цьому досягається єдина оцінка кожного варіанта розв'язку, що дає змогу цілком визначено вибирати найкращий варіант. Тим самим, незважаючи на неоднозначність інформації і неминучість ризику, в ймовірнісно-визначених умовах забезпечується однозначний вибір оптимального варіанта розв'язку.

При обліку наявних відомостей про ймовірності доводиться вдаватися до експертної оцінки. Такі оцінки іноді називають "суб'єктивними ймовірностями" [13, 14] або "суб'єктивними оцінками ймовірностей" [15].

Використання суб'єктивних оцінок ймовірностей можна розглядати також як один із прийомів "розкриття" невизначеності з участю людини (фахівців) за умов "повної" невизначеності (при відсутності ймовірнісного опису неоднозначних величин). Формалізоване розв'язання задач в умовах невизначеності в загальному випадку (якщо невизначеність велика) не може виявити один (єдиний) оптимальний варіант. Можна знайти лише кілька (зону) раціональних рішень, серед яких остаточний вибір має робитися інтуїтивно самою людиною (особами, що приймають рішення). При цьому використання інтуїтивних уявлень про можливості майбутніх умов (сполучень вихідної інформації) є досить корисним, тому що різко звужує зону невизначеності рішень.

Для умов "повної" невизначеності (коли зовсім відсутні відомості про ймовірності неоднозначних вихідних величин) немає і, мабуть, не може бути досить гарного критерію вибору. Запропоновано кілька критеріїв — Вальда, Лапласа, Севіджа, Гурвіца та інші, кожен з яких має свої переваги і недоліки [14]. Вони дають можливість формалізувати аналіз невизначених ситуацій і вибирати "раціональні" рішення, які є гарними з тієї чи іншої точки зору.

Враховуючи недоліки зазначених критеріїв, не можна застосовувати якийсь один із них для остаточного вибору рішення. У загальному випадку (коли рекомендації різних критеріїв не збігаються) є неоднозначність вибору, тобто не вдається знайти єдиний оптимальний варіант. Це слід вважати природним — невизначеність інформації призводить у кінцевому підсумку до невизначеності рішення. Остаточний вибір серед отриманих раціональних варіантів неминуче має здійснюватися з участю людини — з використанням досвіду та інтуїції фахівців, відповідальних за ухвалення рішення. Це важливе положення слід враховувати при розробці та застосуванні методів розв'язання оптимізаційних задач в умовах невизначеності.

Висновки

У статті описано методи побудови динамічних моделей керування потоками в мережах з узагальненим законом збереження, що, на відміну від класичного закону, вимагає задоволення певної системи нерівностей. У задачах закладена можливість створення запасів продукту як додаткового засобу стабілізації функціонування мережі. Моделі загалом будуються з великою мірою узагальнення із врахуванням лише основних параметрів функціонування розподільчих систем. Практичний досвід використання такого підходу підтвердив його адекватність та корисність для довгострокового планування, а в деяких випадках і оперативного керування розподілом потоків у розподільчих мережах за умови періодичного вимірювання та уточнення певних параметрів мережі.

Додаткові можливості врахування невизначеностей при аналізі процесу розподілу ресурсів у мережах дає застосування ігрового підходу, оскільки використання теоретико-ігрових моделей дає змогу надавати управлінські рекомендації в умовах невизначеності, коли інформація про дії замовників має лише імовірнісний характер. У подальшому планується продовження досліджень функціонування енергетичних систем із застосуванням системного аналізу, зокрема врахуванням у процесі керування експертних оцінок.

1. *Теоретические* основы системных исследований в энергетике / Отв. ред. Л.С. Беляев и Ю.Н. Руденко. — Новосибирск: Наука, 1986. — 336 с.
2. *Мелентьев Л.А.* Системные исследования в энергетике. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1983. — 456 с.
3. *Остапенко В.В., Скопецький В.В., Фінін Г.С.* Розподіл ресурсів у просторі та часі. — К.: Наук. думка, 2003. — 322 с.
4. *Пшеничний Б.Н., Кирик Е.Е.* Методы нелинейного программирования и потоки в сетях // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 6. — С. 67—77.
5. *Остапенко В.В., Амиргалиева С.Н., Остапенко Е.В.* Выпуклый анализ и дифференциальные игры. — Алматы: Гылым, 2005. — 392 с.
6. *Чугаев Р.Р.* Гидравлика. — Л.: Энергия, 1971. — 552 с.
7. *Картвелишвили Н.А.* Потоки в недеформированных руслах. — Л.: Гидрометеоиздат, 1978. — 280 с.
8. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1973. — 848 с.
9. *Емеличев В.А., Мельников О.И.,Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990. — 384 с.

10. *Ostapenko V.V.* Convexity in Differential Games // Pareto Optimality, Game theory and Equilibrium. – New York: Springer, 2008. – N 17. – P. 307–348.
11. *Кірік О.Є., Остапенко В.В.* Оптимальний розподіл гідроресурсів у зрошувальних системах мережевої структури // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2010. – № 4. – С. 79–90.
12. *Льюс Р.Д., Райфа Х.* Игры и решения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 642 с.
13. *Беляев Л.С., Крумм Л.А.* О целесообразных областях применения вероятностных методов при изучении больших систем энергетики. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1982. – 52 с.
14. *Райфа Х.* Анализ решений. Введение в проблему выбора в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977. – 408 с.
15. *Мелентьев Л.А.* Оптимизация развития и управления больших систем энергетики. – М.: Высш. школа, 1982. – 320 с.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
16 серпня 2011 року