УДК 519.832.4

В.В. Романюк

КОНТИНУУМ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ В ЧОТИРИВУЗЛОВІЙ МОДЕЛІ РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ ЗА УМОВ ДВОХ НЕКОРЕКТНО ОЦІНЕНИХ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ І ВІДПОВІДНОГО ЗНАЧЕННЯ ГРИ

There is considered a problem of resources optimal distribution with removing uncertainties in the normed cross-section squares of the four-unit construction, where the minimax procedure is particularized for the case of the incorrectly evaluated single left and single right endpoint of segment uncertainties. The resources distribution model under these conditions is the antagonistic game on six-dimensional hyperparallelepiped of Cartesian product of the set of all possible normed loads and the set of all possible decisions of the projector. The theorem on continuum of the projector optimal decisions in the corresponding antagonistic model has been proved. Each element of this continuum may be used for the final producing of the four cross-sections.

Вступ

Розподіл ресурсів є невідворотним процесом сучасності, і проблеми раціонального чи справедливого розподілу ресурсів мають вирішуватись у міру їх виникнення. Для розподілу ресурсів в умовах невизначеності (РРУН) можна застосовувати елементи теорії прийняття рішень [1, 2] або ігрове антагоністичне моделювання [3, 4]. Однак границі невизначеностей не завжди оцінюються об'єктивно, що породжує додаткові труднощі. Зокрема, при антагоністичному моделюванні РРУН некоректна оцінка невизначеностей дає такий простір, на якому визначається ядро гри, що в деяких випадках доводиться уточнювати розв'язок, отриманий за класичними максимінним чи мінімаксним підходами [5].

Постановка задачі

Існує антагоністична модель РРУН [3, 5] для усунення невизначеностей у нормованих площах поперечного перерізу (класичної) чотиривузлової (будівельної) конструкції, де ядро гри визначене як максимум відносних перевантажень [3, 6]. У такій моделі ядро є функцією шести змінних [3, 5, 6]. Інтерес становить лише оптимальна стратегія другого гравця, яка визначається за відповідною мінімаксною процедурою [3, 5, 7]. Проте цю процедуру необхідно уточнювати за некоректних оцінок невизначеностей [8–10], що випливають на діапазон змінних ядра гри. Тому метою роботи є дослідження оптимальної поведінки другого гравця в антагоністичній моделі РРУН зазначеного типу за умов некоректно оцінених різнотипних невизначеностей.

Вихідні положення

Розглянемо відому антагоністичну модель РРУН [3, 5], що використовується для усунення невизначеностей у нормованих площах поперечного перерізу $\{y_i\}_{i=1}^{4}$ чотиривузлової конструкції, на яку діють частково невизначені нормовані навантаження $\{x_i\}_{i=1}^{4}$, де

$$x_d \in [a_d;\ b_d] \subset (0;\ 1),$$
$$y_d \in [a_d;\ b_d] \subset (0;\ 1),\ a_d < b_d \quad \forall\ d = \overline{1, 3} \tag{1}$$

і

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 1,\ \sum_{i=1}^{4} y_i = 1. \tag{2}$$

Множиною усіх можливих рішень другого гравця (проектувальника) у такій моделі є паралелепіпед

$$\boldsymbol{Y} = [a_1;\ b_1] \times [a_2;\ b_2] \times [a_3;\ b_3] =$$
$$= \prod_{d=1}^{3} [a_d;\ b_d] \subset \prod_{d=1}^{3} (0;\ 1) \subset \mathbb{R}^3 \tag{3}$$

нормованих площ поперечних перерізів (чистих стратегій) трьох із чотирьох вузлів. При цьому множина всіх можливих нормованих навантажень (чистих стратегій) на три з чотирьох вузлів теж становить паралелепіпед [3, 6]

$$\boldsymbol{X} = [a_1;\ b_1] \times [a_2;\ b_2] \times [a_3;\ b_3] =$$
$$= \prod_{d=1}^{3} [a_d;\ b_d] \subset \prod_{d=1}^{3} (0;\ 1) \subset \mathbb{R}^3. \tag{4}$$

Завданням проектувальника є визначення оптимальних рішень $\{y_d^*\}_{d=1}^3$ у векторі

$$\mathbf{Y}_* = [y_1^* \quad y_2^* \quad y_3^*] \in$$
$$= [a_1;\, b_1] \times [a_2;\, b_2] \times [a_3;\, b_3] = \boldsymbol{Y} \qquad (5)$$

як оптимальній стратегії другого гравця в опуклій грі з ядром

$$T(\mathbf{X},\, \mathbf{Y}) = T(x_1,\, x_2,\, x_3;\, y_1,\, y_2,\, y_3) =$$
$$= \max\left\{x_1 y_1^{-2},\, x_2 y_2^{-2},\, x_3 y_3^{-2},\, \frac{1 - x_1 - x_2 - x_3}{(1 - y_1 - y_2 - y_3)^2}\right\}, \qquad (6)$$

де $\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \in \boldsymbol{X}$, $\mathbf{Y} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3] \in \boldsymbol{Y}$. Такі рішення, відповідно до відомої теореми про оптимальну поведінку другого гравця в опуклій грі [6], завжди існують, проте, за умов некоректно оцінених кінців у $\{[a_d;\, b_d]\}_{d=1}^3$-невизначеностях (1) мінімаксна процедура знаходження рішень $\{y_d^*\}_{d=1}^3$ потребує уточнення [7].

Очевидно, що для проектувальника мінімізація максимізованих на паралелепіпеді (4) співвідношень у (6) полягає в розв'язуванні рівняння [6, 8]

$$v_* = b_1 (y_1^*)^{-2} = b_2 (y_2^*)^{-2} =$$
$$= b_3 (y_3^*)^{-2} = \frac{1 - a_1 - a_2 - a_3}{(1 - y_1^* - y_2^* - y_3^*)^2}. \qquad (7)$$

Утім не завжди корені $\{y_d^*\}_{d=1}^3$ рівняння (7) є такими, що виконується належність у (5). Зазвичай це трапляється через некоректну оцінку одного із шести кінців $\{a_d,\, b_d\}_{d=1}^3$ відповідних $\{[a_d;\, b_d]\}_{d=1}^3$-невизначеностей. Випадки, коли до такої ситуації призводять некоректні оцінки тільки лівих чи правих кінців, розглянуті в працях [9, 10], і є доволі тривіальними. Нетривіальним випадком є такий, коли значення a_p та b_q при $p \in \{\overline{1,\, 3}\}$ і $q \in \{\overline{1,\, 3}\}$ для $p \neq q$ дають таке:

$$\frac{\sqrt{b_p}}{\sum_{d=1}^{3} \sqrt{b_d} + \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{3} a_d}} < a_p \quad \text{при} \quad p \in \{\overline{1,\, 3}\}, \qquad (8)$$

$$\frac{\sqrt{b_q}}{\sum_{d=1}^{3} \sqrt{b_d} + \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{3} a_d}} > b_q \quad \text{при} \quad q \in \{\overline{1,\, 3}\}, \qquad (9)$$

$$\frac{\sqrt{b_k}}{\sum_{d=1}^{3} \sqrt{b_d} + \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{3} a_d}} \in [a_k;\, b_k],\ k \in \{\overline{1,\, 3}\} \backslash \{p,\, q\}, \qquad (10)$$

де $\dfrac{\sqrt{b_j}}{\sum_{d=1}^{3} \sqrt{b_d} + \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{3} a_d}}$ є j-м коренем рівності (7) відносно змінної y_j^*, $j = \overline{1, 3}$. Звісно, тут компонента

$$y_p^* > \frac{\sqrt{b_p}}{\sum_{d=1}^{3} \sqrt{b_d} + \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{3} a_d}} \qquad (11)$$

і компонента

$$y_q^* < \frac{\sqrt{b_q}}{\sum_{d=1}^{3} \sqrt{b_d} + \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{3} a_d}} \qquad (12)$$

при $p \in \{\overline{1,\, 3}\}$ і $q \in \{\overline{1,\, 3}\}$ для $p \neq q$. Крім того, потребуватиме уточнення і k-а компонента (10). Тому доведемо, що за умов (8)–(10) стосовно рівності (7) й оптимального значення гри $v_* = \dfrac{1}{b_q}$ внаслідок певного співвідношення між частинами у (7) в антагоністичній моделі з ядром (6) проектувальник володіє континуумом оптимальних рішень типу (5) як точок паралелепіпеда (3). Для цього використаємо подвійну нерівність

$$\frac{1}{b_q} > \frac{b_k}{(y_k^*)^2} > \frac{b_p}{a_p^2} \quad \text{при} \quad k \in \{\overline{1,\, 3}\} \backslash \{p,\, q\}$$
$$\text{і} \quad y_k^* = \frac{\sqrt{b_k}}{\sum_{d=1}^{3} \sqrt{b_d} + \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{3} a_d}}, \qquad (13)$$

яка безпосередньо випливає з (8), (11) та (9), (12).

Теорема про континуум оптимальних рішень проектувальника в антагоністичній моделі з ядром (6)

Теорема. В антагоністичній грі з ядром (6) за умов (8)–(10) і

$$\frac{1}{b_q} \ge \frac{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}{(1-b_q-a_p-y_k^*)^2} \quad \text{для} \quad k \in \{\overline{1,\ 3}\} \setminus \{p,\ q\}$$

$$\text{при} \quad y_k^* = \frac{\sqrt{b_k}}{\sum_{d=1}^{3}\sqrt{b_d} + \sqrt{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}} \in (a_k;\ b_k] \qquad (14)$$

другий гравець володіє континуумом оптимальних чистих стратегій (5) з компонентою

$$y_q^* = b_q, \qquad (15)$$

причому якщо

$$1 - b_q - \sqrt{b_q\left(1-\sum_{d=1}^{3} a_d\right)} \ge b_p + b_k, \qquad (16)$$

то компоненти

$$y_p^* \in [a_p;\ b_p] \qquad (17)$$

і

$$y_k^* \in \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{b_q b_k} + a_k + \left(\sqrt{b_q b_k} - a_k\right)\mathrm{sign}\left(\sqrt{b_q b_k} - a_k\right)\right);\ b_k\right], \qquad (18)$$

а якщо

$$1 - b_q - \sqrt{b_q\left(1-\sum_{d=1}^{3} a_d\right)} < b_p + b_k, \qquad (19)$$

то компоненти

$$y_p^* \in \left[a_p;\ y_p^{\langle \max \rangle}\right], \qquad (20)$$

і

$$y_k^* \in \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{b_q b_k} + a_k + \left(\sqrt{b_q b_k} - a_k\right)\mathrm{sign}\left(\sqrt{b_q b_k} - a_k\right)\right);\ y_k^{\langle \max \rangle}\right] \qquad (21)$$

за умови

$$y_p^{\langle \max \rangle} + y_k^{\langle \max \rangle} = 1 - b_q - \sqrt{b_q\left(1-\sum_{d=1}^{3} a_d\right)}, \qquad (22)$$

у якій

$$y_p^{\langle \max \rangle} \in [a_p;\ b_p], \qquad (23)$$

$$y_k^* \in \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{b_q b_k} + a_k + \left(\sqrt{b_q b_k} - a_k\right)\mathrm{sign}\left(\sqrt{b_q b_k} - a_k\right)\right);\ b_k\right]. \qquad (24)$$

Доведення. Як додаток до нерівності (13), умови (8)–(10) означають справедливість однієї з наступних нерівностей:

$$\frac{1}{b_q} > \frac{b_k}{(y_k^*)^2} > \frac{b_p}{a_p^2} \ge \frac{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}{(1-b_q-a_p-y_k^*)^2} \quad \text{для}$$

$$k \in \{\overline{1,\ 3}\} \setminus \{p,\ q\} \quad \text{й} \quad y_k^* = \frac{\sqrt{b_k}}{\sum_{d=1}^{3}\sqrt{b_d} + \sqrt{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}}, \qquad (25)$$

$$\frac{1}{b_q} > \frac{b_k}{(y_k^*)^2} \ge \frac{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}{(1-b_q-a_p-y_k^*)^2} > \frac{b_p}{a_p^2} \quad \text{для}$$

$$k \in \{\overline{1,\ 3}\} \setminus \{p,\ q\} \quad \text{й} \quad y_k^* = \frac{\sqrt{b_k}}{\sum_{d=1}^{3}\sqrt{b_d} + \sqrt{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}}, \qquad (26)$$

$$\frac{1}{b_q} \ge \frac{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}{(1-b_q-a_p-y_k^*)^2} > \frac{b_k}{(y_k^*)^2} > \frac{b_p}{a_p^2} \quad \text{для}$$

$$k \in \{\overline{1,\ 3}\} \setminus \{p,\ q\} \quad \text{й} \quad y_k^* = \frac{\sqrt{b_k}}{\sum_{d=1}^{3}\sqrt{b_d} + \sqrt{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}}, \qquad (27)$$

$$\frac{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}{(1-b_q-a_p-y_k^*)^2} > \frac{1}{b_q} > \frac{b_k}{(y_k^*)^2} > \frac{b_p}{a_p^2} \quad \text{для}$$

$$k \in \{\overline{1,\ 3}\} \setminus \{p,\ q\} \quad \text{й} \quad y_k^* = \frac{\sqrt{b_k}}{\sum_{d=1}^{3}\sqrt{b_d} + \sqrt{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}}. \qquad (28)$$

Але з обмеження (14) випливає те, що в цьому випадку виконується лише одна з нерівностей (25)–(27). Звичайно, тоді проектувальник має брати компоненту (15) для досягнення оптимального значення гри $v_* = \frac{1}{b_q}$, адже зменшення компоненти y_q^* збільшить його програш. Мінімальний програш проектувальника $v_* = \frac{1}{b_q}$ досягатиметься на таких компонентах y_p^* й y_k^* його оптимальної стратегії (5), які задовольнятимуть одночасно трьом нерівностям

$$\frac{1}{b_q} \geq \frac{b_k}{(y_k^*)^2}, \tag{29}$$

$$\frac{1}{b_q} \geq \frac{1 - \sum_{d=1}^{3} a_d}{(1 - b_q - y_p^* - y_k^*)^2}, \tag{30}$$

$$\frac{1}{b_q} \geq \frac{b_p}{(y_p^*)^2}. \tag{31}$$

Із нерівності (29) отримуємо

$$y_k^* \geq \sqrt{b_q b_k} \quad \text{при} \quad k \in \{\overline{1,\,3}\} \backslash \{p,\,q\}, \tag{32}$$

де може бути як $\sqrt{b_q b_k} \geq a_k$, так і $\sqrt{b_q b_k} < a_k$. Нерівність (30), складена відносно суми $y_p^* + y_k^*$ двох компонент, дає таке співвідношення:

$$(1 - b_q)^2 - 2(1 - b_q)(y_p^* + y_k^*) + (y_p^* + y_k^*)^2 \geq$$
$$\geq b_q \left(1 - \sum_{d=1}^{3} a_d\right), \tag{33}$$

$$(y_p^* + y_k^*)^2 - 2(1 - b_q)(y_p^* + y_k^*) +$$
$$+ (1 - b_q)^2 - b_q \left(1 - \sum_{d=1}^{3} a_d\right) \geq 0, \tag{34}$$

де дискримінантом відповідного квадратного рівняння

$$(y_p^* + y_k^*)^2 - 2(1 - b_q)(y_p^* + y_k^*) +$$
$$+ (1 - b_q)^2 - b_q(1 - a_1 - a_2 - a_3) = 0 \tag{35}$$

є

$$D = 4(1 - b_q)^2 - 4[(1 - b_q)^2 - b_q(1 - a_1 - a_2 - a_3)] =$$
$$= 4b_q(1 - a_1 - a_2 - a_3). \tag{36}$$

Коренями рівняння (35), складеного відносно невідомої суми $y_p^* + y_k^*$ двох компонент проектувальника, є значення

$$\frac{2(1 - b_q) - \sqrt{D}}{2} = \frac{2(1 - b_q) - 2\sqrt{b_q(1 - a_1 - a_2 - a_3)}}{2} =$$
$$= 1 - b_q - \sqrt{b_q(1 - a_1 - a_2 - a_3)} \tag{37}$$

або

$$\frac{2(1 - b_q) + \sqrt{D}}{2} = \frac{2(1 - b_q) + 2\sqrt{b_q(1 - a_1 - a_2 - a_3)}}{2} =$$
$$= 1 - b_q + \sqrt{b_q(1 - a_1 - a_2 - a_3)}. \tag{38}$$

Іншими словами, нерівність (30) або, що те ж саме, параболічна нерівність (34) виконується за умови

$$y_p^* + y_k^* \leq 1 - b_q - \sqrt{b_q(1 - a_1 - a_2 - a_3)} \tag{39}$$

або за умови

$$y_p^* + y_k^* \geq 1 - b_q + \sqrt{b_q(1 - a_1 - a_2 - a_3)}, \tag{40}$$

причому умова (39) випливає з умови (16). Далі, оскільки з коренем (38) буде

$$1 - b_q - y_p^* - y_k^* =$$
$$= 1 - b_q - \left(1 - b_q + \sqrt{b_q(1 - a_1 - a_2 - a_3)}\right) =$$
$$= -\sqrt{b_q(1 - a_1 - a_2 - a_3)} < 0, \tag{41}$$

то сума $y_p^* + y_k^*$ не може набувати значення (38), через (41) умова (40) є нездійсненною, і слід розглядати лише корінь (37). Тому за умови (16) буде компонента (17), що випливає з нерівності $y_p^* \geq a_p$, яка означає автоматичне виконання нерівності (31), і компонента (18), де враховано співвідношення між точками $\sqrt{b_q b_k}$ й a_k, де нерівність (32) також виконано. Якщо ж виконується (19), то згідно з (39) максимальна сума компонент y_p^* й y_k^* має дорівнювати значенню правої частини нерівності (39), задовольняючи при цьому нерівності (29). Тому в такому випадку компоненти y_p^* й y_k^* визначаються згідно з (20) і (21) відповідно за умови (22) при (23) і (24). Теорему доведено.

Висновки

Результати доведеної теореми залишаться такими самими, якщо в обмеженні (14), яке еквівалентне одній з нерівностей (25)–(27), мати на увазі, що $\dfrac{\sqrt{b_k}}{\sum_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}} \in [a_k;\, b_k]$, а в нерівності (27) не буде нестрогості. Визначивши стратегію (5) і зафіксувавши компоненти $\{y_d^*\}_{d=1}^{3}$, площу поперечного перерізу четвертого вузла знаходимо дуже легко: $y_4^* = 1 - \sum_{d=1}^{3} y_d^*$ завдяки (2). Але, згідно з доведеним, принаймні дві з чотирьох компонент $\{y_i^*\}_{i=1}^{4}$ набуватимуть континууму можливих значень у потенційно вузькому діапазоні. Тому тут залишається проблема вибору єдиноможливого оптимального рішення проектувальника, хоча, з іншого боку, у нього з континуумом оптимальних рішень типу (5) з'являється широкий спектр дій з чотирма поперечними перерізами.

Дослідження нерівності (28) становитиме окрему роботу в перспективі подальшого антагоністичного моделювання РРУН з чотирма вузлами.

1. *Трухаев Р.И.* Модели принятия решений в условиях неопределённости. – М.: Наука, 1981. – 258 с.
2. *Черноруцкий И.Г.* Методы принятия решений. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
3. *Воробьёв Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. литры, 1985. – 272 с.
4. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А.* Теория игр: Учеб. пособие для ун-тов. – М.: Высш. шк., Книжный дом "Университет", 1998. – 304 с.
5. *Романюк В.В.* Регулярна оптимальна стратегія проектувальника у моделі дії нормованого одиничного навантаження на *N*-колонну будівельну конструкцію-опору // Пробл. трибології. – 2011. – № 2. – С. 111–114.
6. *Романюк В.В.* Теорія антагоністичних ігор: Навч. посібник. – Л.: Новий Світ–2000, 2010. – 294 с.
7. *Романюк В.В.* Про особливі компоненти оптимальної стратегії проектувальника у моделі дії нормованого одиничного навантаження на триколонну будівельну конструкцію // Пробл. трибології. – 2011. – № 1. – С. 44–46.
8. *Дарков А.В., Шапошников Н.Н.* Строительная механика: Учеб. для строит. спец. вузов. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 608 с.
9. *Romanuke V.V.* Digression on the Right Off-Bound Projector Optimal Strategy in Four Props Construction Being Pressed Uncertainly // Системи обробки інформації. – 2011. – Вип. 2 (92). – С. 129–132.
10. *Романюк В.В.* Нерегулярна ліворуч оптимальна стратегія проектувальника першого степеня у моделі усунення чотирьохелементних невизначеностей як антагоністичній грі на шестивимірному гіперпаралелепіпеді для оптимізації конструювання чотирьохопорної платформи // Вісн. Хмельн. нац. ун-ту. Технічні науки. – 2011. – № 4. – С. 74–82.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
1 вересня 2011 року