УДК 504.052

В.В. Ясінський

ЗАДАЧА ПРОГНОЗУВАННЯ І КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ ЕВОЛЮЦІЇ ЗНАНЬ У СКЛАДНИХ НАВЧАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

Relying on studies of systematic approach, we investigate the issue of forecasting and control for the model describing the knowledge evolution in complex training systems. We obtain the substantial mathematical results for the proposed nonlinear evolution equation. These results depend on conditions of parameters of a non-smooth function of the reaction system that ensures saving a fixed level of knowledge, the terms of the dissipation at this level, the existence of global attractor, and the ability to approximate the optimal control process of the evolution of educational knowledge.

Вступ

Актуальною задачею, що стоїть перед вищою школою на теперішньому етапі становлення інформаційного суспільства, є системне формування концептуальних засад такої методології керування навчальним процесом, яка б дала можливість принципово по-новому вибудувати саму стратегію підготовки фахівців у вищих навчальних закладах. Мова йде про так звані резонансні, топологічно правильно організовані та своєчасні впливи в навчальному процесі на основі вивчення феноменів самоорганізації в освітньому просторі.

Труднощі, через які педагогічній науці довгий час не вдається повноцінно вписатись у загальну теорію систем, пов’язані насамперед з проблемою математичної формалізації та моделювання основних категорій педагогіки і в першу чергу такої фундаментальної категорії, як “навчальні знання” – динамічної системи, що формується в результаті навчального процесу (цілеспрямованого та організованого навчання). Незважаючи на всю складність такої системи (нелінійність, відкритість, ієрархічність тощо), її унікальність визначає в першу чергу сама людина як носій цієї системи та її пам’ять.

Аналіз науково-педагогічної літератури показує, що більшість питань, пов’язаних із системним моделюванням процесів накопичення та дисипації знань у складних навчальних системах, поки що не отримали необхідного висвітлення та вивчення.

У статті досліджується модель, що описує еволюцію знань у складній навчальній системі. Запропонована модель є принципово нелінійною і базується на загальній концепції моделювання складних ієрархічних структур, запропонованій у [1], а при її дослідженні використовуються методи нелінійного аналізу та системної математики [2–7]. Важливість такого дослідження зумовлена, зокрема, необхідністю створення науково обґрунтованих методологічних засад незалежного моніторингу якості підготовки фахівців у вищих навчальних закладах України.

Центральне місце в запропонованій моделі посідає так звана функція “реакції” системи – функція, що задає нелінійність поставленої задачі і акумулює всю відому інформацію про поведінку суб’єктів системи. Природно, що умови на таку функцію мають диктуватись властивостями навчальної системи і повинні бути якомога більш загальними з математичної точки зору. Це зумовлює необхідність розгляду негладких функцій реакції системи та вимагає застосування апарату многозначного операторного аналізу, детально розробленого в [2–7].

Оскільки означена проблема пов’язана із подальшим створенням відповідних діагностичних технологій, що спираються на специфіку масових явищ, то побудова математичної моделі еволюції знань у складних навчальних системах має ґрунтуватися на попередніх масштабних системних моніторингових дослідженнях закономірностей накопичення та зберігання навчальних знань великими групами індивидуумів [8].

У праці [9] запропоновано систему аксіом, які пов’язують між собою швидкість зміни наявного рівня знань з механізмами перерозподілу знань у навчальній системі і дають змогу записати математичну модель процесу, що є крайовою задачею відносно невідомої функції $u(x,t)$, яка характеризує рівень навчальних знань:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + f(u,x,t) + h(t,x),\ x \in (0,l), \\ t \in (0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=l} = 0, \\ u\big|_{t=0} = u_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

В [9–11] проведено аналіз системи (1) як з точки зору якісної поведінки, так і з точки зору можливості керування процесом еволюції знань.

Основні результати

Вважатимемо, що функція μ, яка характеризує інтенсивність потоку знань, задовольняє умову

$$\mu \in L^\infty(0,l),\ \mu(x) \geq \mu_0 > 0 \text{ м.с. на } (0,l). \tag{2}$$

Функція $f = f(u,x,t) : [0,+\infty)\times[0,l]\times[0,T] \mapsto$ $\mapsto (-\infty,+\infty)$, яка характеризує реакцію системи, задовольняє умови

$$\text{відображення } (t,u) \mapsto f(u,x,t) \text{ неперервне для м.в. } x \in (0,l); \tag{3}$$

$$\text{відображення } x \mapsto f(u,x,t) \text{ вимірне для всіх } (u,t) \in [0,+\infty)\times[0,T]. \tag{4}$$

$$|f(u,x,t)| \leq C_1(1+|u|^{p-1}), \tag{5}$$

$$f(u,x,t)u \leq -\alpha|u|^p + C_2, \tag{6}$$

де $p \geq 2$, $\alpha, C_1, C_2 > 0$.

Введемо простори $H := L^2(0,l)$ з нормою $\|\cdot\|$ і $V := H^1(0,l)$ з нормою $\|\cdot\|_V$.

За умов (2)–(6) аналогічно [7, 12] можна довести розв'язність задачі для довільних початкових даних $u_0 \in H$ у класі $L^p(0,T;L^p(0,l)) \cap$ $\cap L^2(0,T;V) \cap C([0,T];H)$. При цьому єдиність відповідного розв'язку не гарантується з огляду на негладку залежність f від фазової змінної u [7].

З'ясуємо, за яких умов для навчальних знань на часовому проміжку [0, T] зберігається деякий гарантований рівень $q(t) > 0$, де $q(\cdot) \in$ $\in C^1([0,T])$ – задана функція.

Теорема 1 [9, 10]. Нехай для задачі виконуються умови (2)–(6), і, крім того,

$$u_0(x) \geq q(0) \text{ для м.в. } x \in (0,l), \tag{7}$$

$$f(q(t),x,t) > q'(t) \text{ для м.в. } x \in (0,l), \text{ для всіх } t \in [0,T]. \tag{8}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall\, t,s,u,v,\ |t-s|+|u-v| < \delta$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in(0,l)} |f(u,x,t) - f(v,x,s)| < \varepsilon. \tag{9}$$

Тоді існує розв'язок $u = u(x,t)$ задачі, $u(0,x) = u_0(x)$, для якого

$$u(x,t) \geq q(t) \text{ для м.в. } x \in (0,l), \text{ для всіх } t \in [0,T]. \tag{10}$$

Таким чином, для збереження гарантованого рівня знань достатньо вимагати, щоб рівень у початковий момент часу $t = 0$ був не нижче показаного $q(0)$ (умова (7)), щоб у кожен момент $t \in [0,T]$ швидкість зміни рівня $q(t)$ визначалася реакцією системи на цей рівень (умова (8)) і щоб виконувалася умова (9), яка фактично означає, що більшість студентів однаково реагують на один і той самий рівень знань.

Однією з основних задач, що виникають при дослідженні еволюційних дисипативних нелінійних задач, є з'ясування асимптотичної поведінки розв'язків у фазовому просторі. Згідно з [3], наявність у фазовому просторі системи, що описує кількісну характеристику засвоєної в процесі навчання інформації, – глобального атрактора, може трактуватись як поява в системі якісно нової інформації за рахунок внутрішньої самоорганізації. Класична теорія глобальних атракторів нелінійних дисипативних еволюційних систем викладена в [14], її узагальнення на багатозначний випадок – у [7]. Позначимо для метричного простору X $P(X)$ – сукупність всіх непорожніх підмножин X, $\beta(X)$ – сукупність всіх непорожніх, обмежених підмножин X, $R_{+d} = \{(t,\tau) \in R_+^2 | t \geq \tau\}$.

***Означення* 1.** Відображення $U : R_{+d} \times X \mapsto$ $\mapsto P(X)$ називається многозначним напівпроцесом (МНП) на X, якщо

1) $U(\tau,\tau,x)=x \quad \forall\, x\in X$, $\forall\,\tau\ge 0$;

2) $U(t,\tau,x)\subseteq U(t,s,U(s,\tau,x)) \quad \forall\,(t,s),(s,\tau)\in R_{+d}$, $\forall\, x\in X$, де для $A\subset X$ $U(t,s,A)=\bigcup_{x\in A}U(t,s,x)$.

Розглянемо сім'ю МНП $\{U_\sigma \mid \sigma\in\Sigma\}$, де Σ — деяка множина, і означимо відображення $U_\Sigma(t,\tau,x)=\bigcup_{\sigma\in\Sigma}U_\sigma(t,\tau,x)$.

***Означення* 2.** Множина $\Theta_\Sigma\subset X$ називається рівномірним глобальним атрактором сім'ї МНП $\{U_\sigma|\sigma\in\Sigma\}$, якщо Θ_Σ є рівномірно притягувальною множиною, тобто $\forall\,\varepsilon>0$, $\tau\ge 0$ і $B\in\beta(X)$ існує $T=T(\tau,\varepsilon,B)$ таке, що

$$\operatorname{dist}(U_\Sigma(t,\tau,B),A)\to 0,\to+\infty, \tag{11}$$

і є мінімальною множиною в класі замкнених рівномірно притягувальних множин.

Перейдемо до побудови сім'ї МНП на розв'язках задачі. Клас розв'язків $u=u(x,t)$ задачі, для яких

$$u(x,t)\ge q(t) \text{ для м.в. } x\in(0,l), \text{ для всіх } t\ge\tau$$

будемо позначати $W_\tau(q)$.

Розглянемо найбільш загальні умови на функції f і h, при яких на розв'язках (1) з класу $W_\tau(q)$ вдається побудувати сім'ю МНП. При цьому важливо, що запропоновані умови будуть близькими до загальних умов глобальної розв'язності і природно вкладаються в рамки моделі.

Розглянемо простір $M=C(-\infty,+\infty;L^\infty(0,l))$ з топологією рівномірної збіжності на компактах і простір $L^{2,w}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty);L^2(0,l))$ з топологією локальної слабкої збіжності. Розглянемо множину

$$\Sigma=cl^{\{(f(t+\cdot),h(t+\cdot),q(t+\cdot)\mid t\ge 0\}}_{C([0,+\infty);M)\times L^{2,w}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty);L^2(0,l))\times C([0,+\infty))}.$$

Для довільного $\sigma=(f_\sigma,h_\sigma,q_\sigma)\in\Sigma$ розглянемо задачу $(1)_\sigma$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+f_\sigma(u,x,t)+h_\sigma(t,x),\\ x\in(0,l),\ t>\tau,\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0.\end{cases}$$

Якщо для довільних $\sigma\in\Sigma$, $\tau\ge 0$, $u_\tau(x)\ge q_\sigma(\tau)$ існує розв'язок $u=u(x,t)$ задачі $(1)_\sigma$, для якого

$$u(x,t)\ge q_\sigma(t) \text{ для м.в. } x\in(0,l), \text{ для всіх } t\ge\tau,$$

то в класі

$$X=H^+=\{\xi\in L^2(0,l)|\,\xi(x)\ge 0 \text{ для м.в. } x\in(0,l)\}$$

можна означити сім'ю відображень $\{U_\sigma: R_{+d}\times H^+\mapsto P(H^+)\}_{\sigma\in\Sigma}$:

$$U_\sigma(t,\tau,u_\tau)=\{u(t)-q_\sigma(t)\,|\,u(\cdot)\in W_\tau(q_\sigma)-\text{розв'язок } (1)_\sigma,\ u(\tau)-q_\sigma(\tau)=u_\tau\}. \tag{12}$$

Теорема 2 [9, 10]. Нехай виконані умови теореми 1 і такі:

$$\forall\,R>0,\ \forall\,\varepsilon>0\ \exists\{\Omega_i\}_{i=1}^m,\ (0,l)=\bigcup_{i=1}^m\Omega_i$$

$$\forall\,(t,r)\in Q(R),\ \forall\, i=\overline{1,m},$$

$$\begin{gathered}\inf\{c\ge 0\mid \exists\,\Phi,|\Phi|=0,\ \forall x_1,x_2\in\Omega_i\backslash\Phi\\ |f(t,x_1,r)-f(t,x_2,r)|\le c\}<\varepsilon,\end{gathered} \tag{13}$$

$$\sup_{t\ge 0}\int_t^{t+1}\int_0^l h^2(x,s)\,dx\,ds<\infty, \tag{14}$$

$$\begin{gathered}\exists\,Q>0\ \forall\,t\ge 0\,|q(t)|+|q'(t)|\le Q,\\ \forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \forall\,t,s\ge 0,\\ |t-s|<\delta\,|q'(t)-q'(s)|<\varepsilon.\end{gathered} \tag{15}$$

Тоді сім'я відображень $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, означена формулою (12), породжує сім'ю МНП, для якої у фазовому просторі H^+ існує компактний, напівінваріантний, зв'язний глобальний атрактор $\Theta_\Sigma\subset H^+$.

Зауважимо, що умова (13) в рамках моделі означає, що множина студентів може бути розбитою на скінченну кількість груп, у межах кожної з яких реакція системи в один і той самий момент часу t на один і той самий рівень знань r є фактично однаковою. Умова (14) означає, що в одиничному часовому інтервалі сумарний вплив тих компонент реакції системи, які не залежать від рівня знань, є рівномірно обмеженим.

Нехай Λ — метричний простір параметрів, $\lambda_0\in\Lambda$ — неізольована точка. Розглядається задача (1) з функціями $f(u,x,t,\lambda)$, $h(t,x,\lambda)$, $q(t,\lambda)$, що задовольняють умови теореми 2 з константами, які не залежать від λ, а також

$$\exists K > 0 \ \forall \lambda \in \Lambda \ \sup_{t\in R_+} \int_t^{t+1}\int_0^l h^2(s,x,\lambda)\,ds\,dx \le K, \quad (16)$$

для всіх $t \ge 0$, для м.в. $x \in (0,l)$ і для всіх $\lambda \in \Lambda$

$$f(q(t,\lambda),x,t,\lambda) + h(t,x,\lambda) \ge q'(t,\lambda), \quad (17)$$

для всіх $R > 0$, $\eta \in L^2_{\text{loc}}(R_+; L^2(0,l))$

$$\sup_{t\in R_+}\sup_{|v|\le R} \operatorname{ess}\sup_{x\in(0,l)} |f(v,x,t,\lambda) - f(v,x,t,\lambda_0)| \to 0, \quad \lambda \to \lambda_0,$$

$$\sup_{t\in R_+} \int_t^{t+1} (h(t,x,\lambda) - h(t,x,\lambda_0), \eta(t,x))\,dt \to 0, \quad \lambda \to \lambda_0, \quad (18)$$

$$\sup_{t\in R_+} |q(t,\lambda) - q(t,\lambda_0)| \to 0, \ \lambda \to \lambda_0.$$

Тоді сім'я відображень $\{U_\sigma : R_{+d} \times H^+ \mapsto \mapsto P(H^+)\}_{\sigma\in\Sigma(\lambda)}$, побудованих за формулою (12), задовольняє умови теореми 2, а отже, має глобальний атрактор $\Theta_{\Sigma(\lambda)} \subset H^+$.

Теорема 3 [9, 10]. За умов (16)–(18) маємо

$$\operatorname{dist}(\Theta_{\Sigma(\lambda)}, \Theta_{\Sigma(\lambda_0)}) \to 0, \lambda \to \lambda_0.$$

Оскільки в реальній освітній системі завжди існує певний керівний орган, що здійснює зовнішнє керування системою з метою забезпечити в певному сенсі оптимальний рівень знань, то швидкість зміни рівня знань визначається наявними в системі параметрами керування. Щоб врахувати можливий розривний характер функції реакції системи, перейдемо до відображення

$$f(u,x,t) = [\kappa(u,x,t), \theta(u,x,t)], \quad (19)$$

що приводить до іншого математичного об'єкта – диференціального включення. Сучасні методи дослідження нескінченновимірних включень, зокрема і в задачах керування, розвинуті в працях [2–5, 7], дають можливість при досить загальних умовах стверджувати розв'язність задачі (1) з многозначною функцією (19).

В контексті системних досліджень [2–5] у рамках моделі (1) розглядається задача про наближену формулу оптимального керування у формі оберненого зв'язку (синтезу). Для розв'язання цієї задачі будемо вважати, що

$$f(u,x,t) := \varepsilon F(u,t) + h(x),$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр,

$$F(u,t) = [\kappa(u,t), \theta(u,t)]$$

і виконані умови

1) $\forall t \ge 0$ функція $\kappa(\cdot,t)$ – напівнеперервна знизу;

2) $\forall t \ge 0$ функція $\theta(\cdot,t)$ – напівнеперервна зверху;

3) $\exists C_1, C_2 \ge 0$ $|\kappa(u,t)| + |\theta(u,t)| \le C_1 + C_2|u|$;

4) $\exists D_1, D_2 \ge 0$ $|\kappa(u,t) - \kappa(u,s)| + |\theta(u,t) - \theta(u,s)| \le (D_1 + D_2|u|)\gamma(|t-s|)$, де $\gamma(\cdot)$ – неперервна функція, така, що $\gamma(t) \to 0$, $t \to 0+$.

Розглянемо задачу оптимального керування на скінченному ($T < \infty$) або нескінченому ($T = \infty$) проміжку часу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} \in \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \varepsilon F(u,t) + h(x) + g(x)v(t), \\ x \in (0,l), t \in (0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \end{cases} \quad (20)$$

де $g(x) \in L^2(0,l)$ – задана функція, $v(t)$ – керуючий параметр. При цьому керування

$$v(\cdot) \in U = \{v \in L_2(0,T) : |v(t)| \le \xi \ \text{п.в. на} [0;T]\} \quad (21)$$

має розв'язувати задачу

$$J(u,v) \to \inf. \quad (22)$$

Нехай вже доведена розв'язність (20)–(22), $\{\hat{u}_\varepsilon, \hat{v}_\varepsilon\}$ – оптимальний процес у цій задачі, $\hat{J}_\varepsilon = J(\hat{u}_\varepsilon, \hat{v}_\varepsilon)$ – значення задачі. Нехай при $\varepsilon = 0$ задача (20)–(22) допускає синтез $\hat{v} = = v[t,\hat{u}]$, на якому реалізується значення $\hat{J}_0$ цієї задачі.

Основною метою є доведення того, що формула $v[t,u]$ дає наближений розв'язок вихідної задачі при малих $\varepsilon > 0$, тобто що задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} \in \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \varepsilon F(u,t) + h(x) + \\ + g(x)v[t,u], x \in (0,l), \ t \in (0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=l} = 0, \\ u\big|_{t=0} = u_0(x), \end{cases} \tag{23}$$

є розв'язною і для довільного її розв'язку u_ε справедлива гранична рівність

$$J(u_\varepsilon, v[t,u_\varepsilon]) - \hat{J}_\varepsilon \to 0, \ \varepsilon \to 0. \tag{24}$$

Згідно з методологією [15] побудовано формули точного синтезу при $\varepsilon = 0$ задачі (20)–(22) $\hat{v} = v[t,\hat{u}]$ в термінах коефіцієнтів Фур'є відповідної спектральної задачі для функціонала

$$J(u,v) = \left(\int_0^l q(x)(u(x,T) - z(x))\,dx\right)^2 + \gamma\int_0^T v^2(t)\,dt$$

при $T < \infty$ та для функціонала

$$J(u,v) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^1 u^2(x,t)dx + \gamma v^2(t)\right)dt$$

при $T = \infty$. На основі цих формул за виконання умов 1–4 в [11] доведено граничну рівність (24).

Висновки

На основі запропонованої системи аксіом побудовано математичну модель еволюції знань у складній навчальній системі; розв'язано задачу про збереження гарантованого рівня знань.

На знайдених розв'язках побудовано багатозначну неавтономну динамічну систему, для якої доведено існування глобального атрактора та досліджено його стійкість відносно зовнішніх збурень і збурень початкових даних.

Для многозначної функції реакції системи доведено розв'язність задачі оптимального керування рівнем знань як на скінченному, так і на нескінченному проміжку часу та обґрунтовано формулу наближеного оптимального керування у формі оберненого зв'язку.

1. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование. – М.: Физматгиз, 2005. – 320 с.
2. *Иваненко В.И., Мельник В.С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. – К.: Наук. думка, 1988. – 288 с.
3. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. – К.: Наук. думка, 1999. – 630 с.
4. *Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – К.: Наук. думка, 2004. – 588 с.
5. *Zgurovsky M.Z., Melnik V.S.* Nonlinear analysis and control of physical processes and fields. – Berlin: Springer, 2004. – 490 p.
6. *Згуровський М.З., Панкратова Н.Д.* Основи системного аналізу. – К.: Вид. група BHV, 2007. – 544 с.
7. *Kapustyan O.V., Mel'nik V.S., Valero J., Yasinsky V.V.* Global attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness. – K.: Наук. думка, 2008. – 216 p.
8. *Ясінський В.В.* Системне моделювання процесів накопичення і дисипації знань // Системні дослідження та інформ. технології. – 2007. – № 3. – С. 111–121.
9. *Ясінський В.В., Капустян О.В., Валеро Х.* Математична модель процесу формування та збереження колективних знань // Там же. – 2009. – № 2. – С. 67–78.
10. *Ясинский В.В.* Исследование процессов самоорганизации в образовательных системах на основе синергетического моделирования // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 2. – С. 161–174.
11. *Ясінський В.В., Капустян О.А.* Наближені екстремальні розв'язки для еволюційних включень субдиференціального типу // Системні дослідження та інформ. технології. – 2009. – № 4. – С. 109–116.
12. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
13. *Синергетическая* парадигма. Синергетика образования / Отв. ред. В.Г. Буданов. – М.: Процесс-традиция, 2007. – 592 с.
14. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. – М.: Наука, 1989. – 294 с.
15. *Капустян В.Е.* Оптимальная стабилизация ограниченным сосредоточенным управлением решений параболической краевой задачи // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 6. – С. 58–67.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
28 грудня 2011 року