

УДК 621.941.08

О.М. Яхно, С.В. Струтинський

ГІДРОДИНАМІКА СТРУМИННИХ ТЕЧІЙ У ЩІЛИНАХ РЕГУЛЬОВАНИХ ГІДРОСТАТИЧНИХ СФЕРИЧНИХ ШАРНІРІВ

In this paper, we propose the construction of hydrostatical spherical hinge with the stream system of adjusting the sphere position. Also, we consider the flow features in the flowing part of hinge. The method of calculating the hydrodynamic parameters of stream flows in cracks of hydrostatical supports enables studying the hydrostatical spherical hinges. Moreover, we determine the fields of speeds, pressures, tensors of tensions and tensors of deformation speeds in the whole volume of the crack of hydrostatical supports. We find analytical dependences for calculating the hydrodynamic parameters of flow. Through experiments conducted, we study the second vortical flows which appear in a crack at interaction with the limited stream flows. Finally, we define the quantitative characteristics of the second vortical flows and the cause of their formation.

Вступ

Регульовані гідростатичні сферичні шарніри являють собою нову і перспективну елементну базу для створення просторової системи приводів. Удосконалення сферичних шарнірів здійснюється на основі реалізації спеціальних гідродинамічних процесів, що протікають у щілинах гідростатичних опор. Тому дослідження, направлені на розв'язання задач прикладної гідродинаміки струминних течій у щілинах гідростатичних опор шарнірів, є актуальними.

Розроблення регульованих гідростатичних шарнірів потребує вдосконалення їх характеристик у напрямі підвищення ефективності роботи шарніра та точності регулювання його положення. Ця проблема вирішується різними методами, зокрема розробленням спеціальних гідростатичних опор із підвищеними енергетичними та регульованими характеристиками.

Створення високоефективних регульованих сферичних шарнірів високої точності дає можливість розробити прогресивні просторові системи приводів. Зокрема, реалізуються прогресивні конструкції маніпуляторів, промислових роботів, металорізальних верстатів, вимірювальних машин та ін.

В останніх дослідженнях наведено ряд конструктивних рішень сферичних шарнірів рідинного тертя [1, 2]. В окремих публікаціях розглянуті питання впливу конструктивних особливостей гідростатичного підшипника на характер гідродинамічних процесів [3]. Ряд публікацій [4, 5] присвячено дослідженню параметрів течії рідини в щілині гідростатичного підшипника. Результатів дослідження питань прикладної гідродинаміки струминних течій у щілинах регульованих гідростатичних сферичних шарнірів у літературних джерелах та мережі Інтернет не виявлено.

До невирішених раніше частин проблеми належать дослідження запропонованого авторами [6] способу струминного регулювання течії в щілині гідростатичної опори.

Реалізація сферичного шарніра з даним способом регулювання потребує розв'язку ряду задач прикладної гідродинаміки стосовно течії в малорозмірних щілинах.

Постановка задачі

Метою досліджень є встановлення гідродинамічних параметрів струминних течій у щілинах регульованих гідростатичних сферичних шарнірів. Для цього необхідно розв'язати такі задачі: розроблення ефективного методу струминного регулювання параметрів течії в щілинах шарніра; розрахунок поля швидкостей та гідродинамічного тиску в щілинах; знаходження тензорних гідродинамічних параметрів течії; визначення вторинних течій рідини в щілинах при струминному регулюванні.

Конструктивні особливості регульованих гідростатичних сферичних шарнірів

Розроблений гідростатичний сферичний шарнір (рис. 1) має сферу 1 із хвостовиком, навколо якої розташовані гідростатичні опори 2, розміщені в корпусі 3 шарніра.

Сфера може здійснювати просторові поперечно-кутові переміщення в напрямках ψ , θ , φ . Система струминного регулювання виконана в гідростатичних опорах 2 і дає можливість здійснювати додаткові переміщення сфери відносно корпусу в напрямках x , y , z у межах діаметрального зазору між сферою і поверхнями гідростатичних опор.

Система струминного регулювання (рис. 2) містить кілька гідростатичних опор 2, розташованих навколо сфери 1.

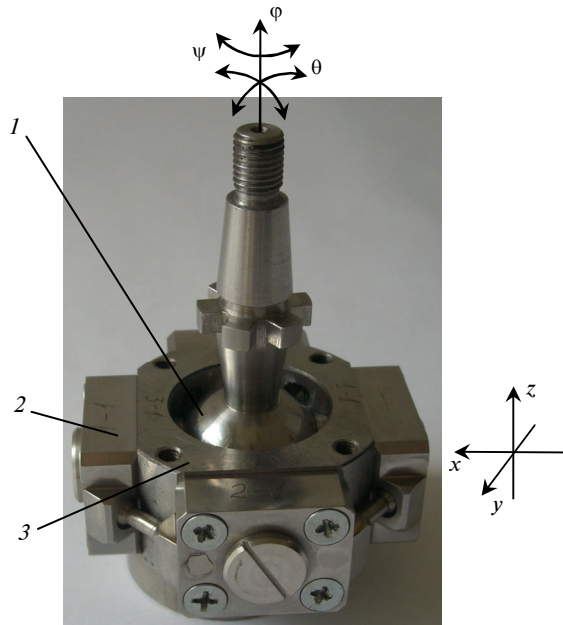


Рис. 1. Загальний вигляд розробленого регульованого гідростатичного сферичного шарніра

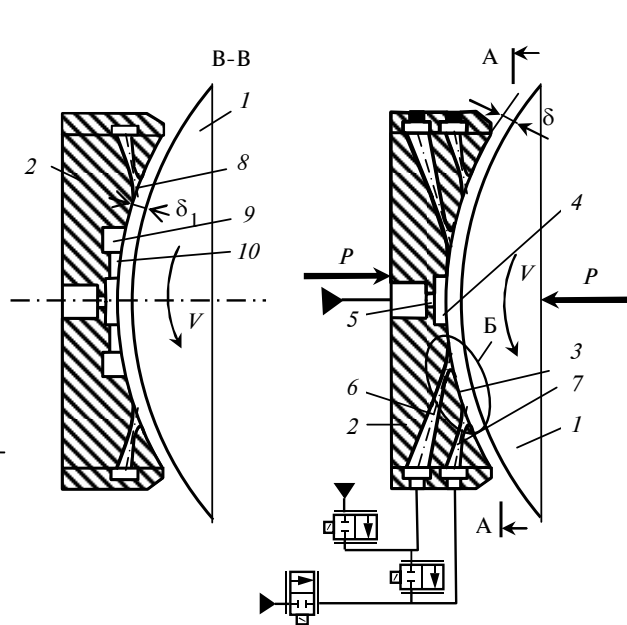


Рис. 2. Конструктивна схема струминної системи регулювання гідростатичної опори сферичного шарніра

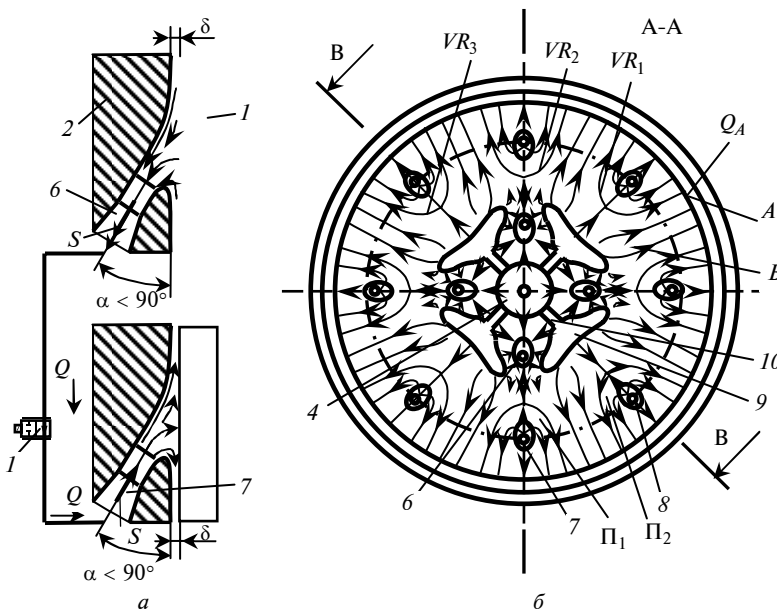


Рис. 3. Схеми з'єднання каналів сопел і лінії течії при втіканні та витіканні рідини крізь сопла (а) і траєкторії частинок рідини в щілині (б)

Поверхня опори 3 утворює з поверхнею сфери дросельні щілини, причому розміри щілини δ регулюються залежно від навантаження P , що діє на сферу. Опора має у своїй центральній частині карман 4, підключений крізь дросель 5 гідромагістралі.

По периметру центрального кармана безпосередньо в опорах виконані сопла 6–8. По-

верхні отворів сопел плавне спряжені з поверхнею опори (рис. 3).

На поверхні опори між отворами сопел першого пояса виконані додаткові кармани 9, з'єднані із центральним карманом 4 магістралями з дроселями у вигляді дросельних канавок 10 на поверхні опори.

При подачі робочого середовища крізь дросель 5 у карман 4 (див. рис. 1) і щілину опори в щілині виникає тиск рідини, який компенсує навантаження P на шарнір. Збільшення навантаження P приводить до зменшення розміру щілини δ , а відповідно, і до збільшення гідравлічного опору щілини. Внаслідок збільшення гідравлічного опору підвищується тиск в кармані 4 і в щілині, що компенсує збільшення навантаження P . При цьому вся рідина, яка подається в карман 4, витікає крізь щілину.

Для підвищення ефективності пристрою рідина із щілини втікає в сопла 6 і витікає в щілину крізь сопла 7. Течія рідини відбувається внаслідок наявності перепаду тиску в щілині між соплами. Плавне спряження отворів сопел із поверхнею опори зменшує втрати енергії та запобігає вихроутворенню в проточній частині пристрою.

Течія рідини в каналах сопел приводить до виникнення зворотних течій у щілині. Рідина, яка витікає із сопел 7 і 8, утворює зворотні потоки Π_1 , Π_2 , які направлені протилежно течії рідини в щілині (див. рис. 3, б). Зворотні потоки підвищують гідравлічний опір щілини. Тому для забезпечення необхідної несучої здатності опори необхідна менша витрата рідини із гідромагістралі, і відповідно, ефективність пристрою буде підвищено. Додаткові кармани 9 призначені для формування раціональної схеми течії в щілині. Вони забезпечують збільшення подачі рідини в сопла 6 та формування рівномірної системи зворотних потоків Π_1 , Π_2 на периферійній ділянці щілини. Наявність додаткових карманів 9, підключених крізь дросельні канавки 10 до центрального кармана 4, забезпечує вирівнювання тиску по площі щілини. Якщо внаслідок похибок геометрії розмір щілини δ по периметру кармана 9 зменшується, то відбувається збільшення гідравлічного опору на виході кармана, а відповідно, й підвищення тиску в цьому кармані. Це компенсує зниження тиску в щілині внаслідок похибок її геометрії.

Регулювання положення сфери здійснюється за допомогою регульованих дроселів (див. рис. 2). Регулювання відбувається за рахунок зміни інтенсивності потоку рідини, який подається в щілину із сопла 7. Струміння рідини в щілині змінює свій напрямок на ділянках VR_1, VR_2, VR_3 .

Активне регулювання положення вісі або вала здійснюється за рахунок підводу рідини від зовнішнього джерела.

Розрахунок поля швидкостей і параметрів поля гідродинамічного тиску в щілині

Розрахунки виконані на основі методу ламінарної аналогії [7]. Згідно з цим методом, розподіл середніх (максимальних) швидкостей при ламінарному русі рідини в щілині еквівалентний розподілу швидкостей при плоскому русі ідеальної рідини. Виконано розрахунки плоского руху ідеальної рідини, а результати перенесені на розрахунок в'язкої рідини в щілині. Функція течії плоского руху ідеальної рідини одержана у вигляді суперпозиції функцій течії n джерел (стоків) рідини [8]:

$$\psi = \sum_{k=0}^n \frac{Q_k}{2\pi} \arctg \left(\frac{y - y_k}{x - x_k} \right), \quad (1)$$

де Q_k – витрата рідини з k -го джерела (стоку); x , y – поточні координати, визначені в площині щілини; x_k , y_k – координати розміщення k -го джерела (стоку).

Розраховані значення функції течії використано для знаходження швидкостей у перетинах щілин. Швидкості знайдені символьним диференціюванням залежності (1) відповідно формул

$$V_{mx} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_{my} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

В результаті диференціювання формули (1) знайдено проекції максимальних швидкостей у перетині щілини з координатами x і y :

$$V_{mx} = \sum_{k=0}^n \frac{Q_k}{2\pi} \cdot \frac{(x - x_k)}{[(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2]}, \quad (2)$$

$$V_{my} = \sum_{k=0}^n \frac{Q_k}{2\pi} \cdot \frac{(y - y_k)}{[(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2]}.$$

В кожному перетині щілини шириною $\delta = 2h$ має місце параболічний розподіл проекцій швидкостей (рис. 4).

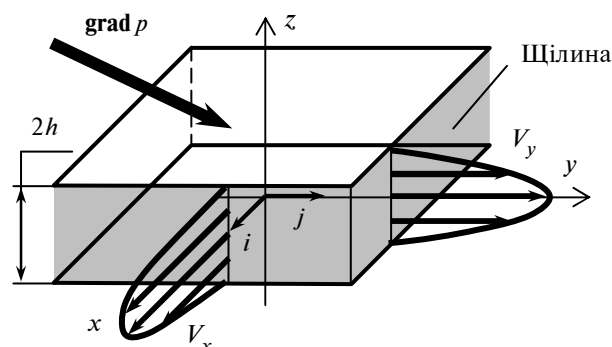


Рис. 4. Профілі проекцій швидкостей ламінарного руху рідини в перетинах щілини гідростатичної опори

Профілі проекції швидкостей у перетинах описуються параболічними залежностями

$$v_x = V_{mx} \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right], \quad v_y = V_{my} \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right], \quad (3)$$

де $h = \frac{\delta}{2}$ – півширина щілини.

Залежності (2) є основою обчислення поля максимальних швидкостей по всій площі щілини опори [9]. Векторне поле максимальних швидкостей у щілині знаходиться у вигляді

$$\mathbf{V}_m = \mathbf{i}V_{mx} + \mathbf{j}V_{my},$$

де \mathbf{i} і \mathbf{j} – орти декартової системи координат x, y .

Векторне поле максимальних швидкостей пов'язане із полем градієнта статичного тиску по площі щілини

$$\mathbf{grad} p = -\frac{2\mu}{h^2} \mathbf{V}_m,$$

де μ – динамічна в'язкість рідини.

Відповідно, проекції градієнта тиску становлять

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\mu}{h^2} V_{mx}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\mu}{h^2} V_{my}. \quad (4)$$

Підставивши значення максимальних швидкостей із залежностей (2) у формули (4), одержимо проекції градієнта тиску у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\mu}{h^2} \sum_{k=0}^n \frac{Q_k}{2\pi} \cdot \frac{(x-x_k)}{[(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2]}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\mu}{h^2} \sum_{k=0}^n \frac{Q_k}{2\pi} \cdot \frac{(y-y_k)}{[(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2]}. \end{cases} \quad (5)$$

Поле статичного тиску в щілині визначено обчисленням криволінійного інтеграла:

$$P = \int_A^B \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy,$$

де A – точка на периферії щілини Q_A , в якій значення тиску покладено нульовим (див. рис. 3, б); B – точка всередині плоскої ділянки, яка відповідає щілині гідростатичної опори.

Частинні похідні другого порядку тиску по координатах визначено диференціюванням залежностей (5).

Остаточно одержимо

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{2\mu}{h^2} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{2\pi\delta} \frac{1}{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2} - \\ - \frac{2(x-x_k)^2}{[(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2]^2}, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = -\frac{2\mu}{h^2} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{2\pi\delta} \frac{2(x-x_k)(y-y_k)}{[(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2]^2}. \end{cases} \quad (6)$$

Згідно з [10], поле статичного тиску в щілині задовольняє рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0.$$

Тому значення частинної похідної буде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (7)$$

За обчисленими значеннями частинних похідних знаходяться поля тензорів напружень і тензорів швидкостей деформацій у щілині.

Тензорні характеристики течії рідини в щілині

На основі знайдених гідродинамічних параметрів визначено тензорні поля напружень і швидкостей деформацій та скалярне поле інтенсивності дисипативних сил для всього об'єму рідини в щілині.

Нормальні напруження в рідині, які є діагональними компонентами тензора напружень, згідно з [11], дорівнюють

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} = -p - h^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right], \\ \sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} = -p - h^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right], \\ \sigma_{zz} = -p. \end{cases} \quad (8)$$

Дотичні напруження в рідині, що являють собою позадіагональні компоненти тензора напружень, становлять

$$\begin{cases} \sigma_{yx} = \sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \\ = -\frac{h^2}{2} \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \right), \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = z \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \sigma_{zx} = \sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = z \frac{\partial p}{\partial x}. \end{cases} \quad (9)$$

Компоненти тензора напружень в рідині по ширині щілини, розраховані відповідно до формул (8) і (9), в яких значення похідних тиску знайдені за формулами (5)–(7), наведено на рис. 5.

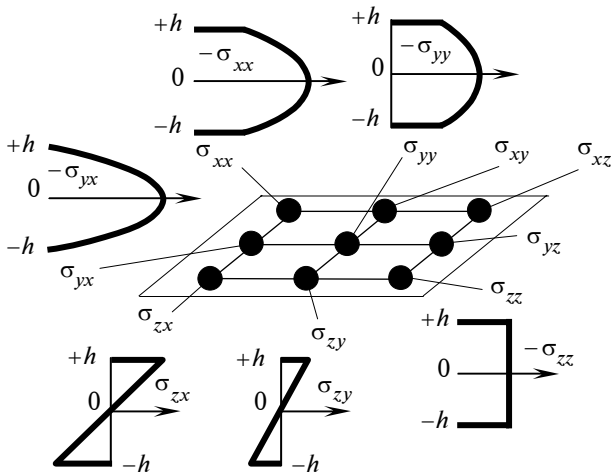


Рис. 5. Зміни компонентів тензора напружень по ширині щілини

Тензорне поле швидкостей деформацій визначається крізь проекції швидкостей.

Діагональні компоненти тензора швидкостей деформацій знайдені у вигляді

$$\begin{cases} \dot{s}_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{h^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \\ \dot{s}_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{h^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}, \\ \dot{s}_{zz} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Необхідно зазначити, що лінійний інваріант тензора швидкостей деформацій становить

$$J_1 = \dot{s}_{xx} + \dot{s}_{yy} + \dot{s}_{zz} = 0,$$

згідно з прийнятим припущенням про відсутність стиску рідини.

Компоненти тензора швидкостей деформацій, розміщені поза головною діагоналлю, визначаються за формулою

$$\begin{aligned} \dot{s}_{xy} = \dot{s}_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \\ &= -\frac{h^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial p}{\partial x \partial y} + \frac{\partial p}{\partial y \partial x} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Між компонентами тензора напружень (8), (9) і компонентами тензора швидкостей деформацій (10), (11) існує зв'язок, відповідний узагальненому закону Н'ютона–Петрова [11]

$$(\sigma_{ij}) = 2\mu(s_{ij}) + p(e_{ij}),$$

де e_{ij} – одиничний тензор другого рангу.

Скалярне поле інтенсивності дисипативних сил, які діють в рідині внаслідок в'язкості, згідно з [11], визначається за формулою

$$\begin{aligned} N_{\text{дис}} &= -\frac{h^4}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial p}{\partial x \partial y} + \frac{\partial p}{\partial y \partial x} \right)^2 \right] + \frac{2z^2}{\mu^2} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Інтегруванням інтенсивності потужності дисипативних сил по всьому об'єму щілини W знаходяться втрати енергії (тепловиділення) в щілині гідростатичної опори

$$E = \iiint_W N_{\text{дис}} dW.$$

Вторинні течії, що виникають при русі рідини в щілині

Рідина в щілині гідростатичної опори рухається по криволінійних траєкторіях (див. рис. 3, б). При цьому на рідину діють відцентрові сили, які спричиняють специфічні вторинні течії. Вторинні течії мають вигляд регулярної вихрової пелени, яка виникає на ділянках, де струмінь рідини в щілині змінює свій напрямок (ділянки VR_1, VR_2, VR_3 на рис. 3, б).

Механізм утворення вихрової пелени при просторовому русі рідини між двома паралельними стінками вивчено експериментальними методами. При цьому використано фото візуалізованої течії рідини [9] із видимими спіральними треками газоповітряних бульбашок (рис. 6).

На фото спіралі мають різну товщину і конфігурацію. Якщо бульбашка потрапляє у сформовану частину вихору, то спіраль має правильну гвинтову форму із чітко визначеною кількістю витків при майже сталому діаметрі витка. Такими є спіралі 1–6. На фото простежуються треки бульбашок у вихорах, які формуються. Спіралі, які відповідають цим трекам (позиція 7), мають змінні по довжині діаметр і період витків. При переміщенні вздовж вихору діаметр спіралі збільшується, а відстань між витками спіралі зменшується. При зміні знака радіуса кривизни траєкторії руху частинок рідини спіральний трек 8 бульбашки зменшується в діаметрі, що свідчить про затухання вихору.

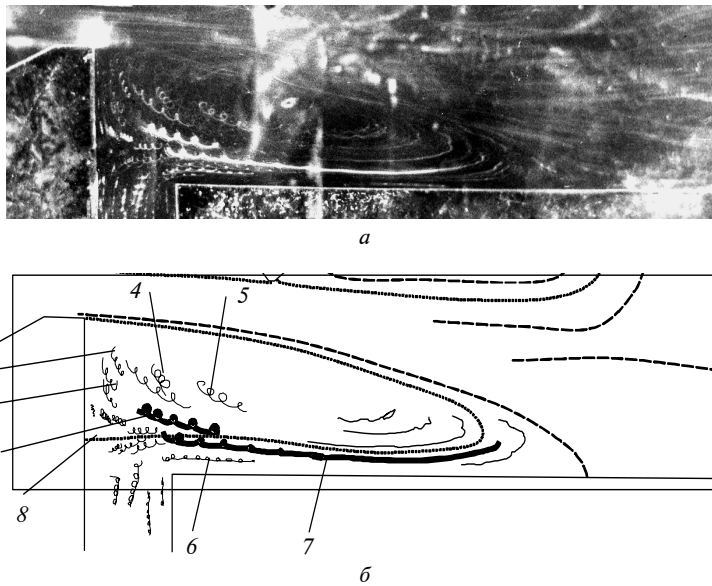


Рис. 6. Фото течії із чітко видимими спіральними треками бульбашок повітря (а) і побудовані згідно з фото траєкторії руху бульбашок повітря (б)

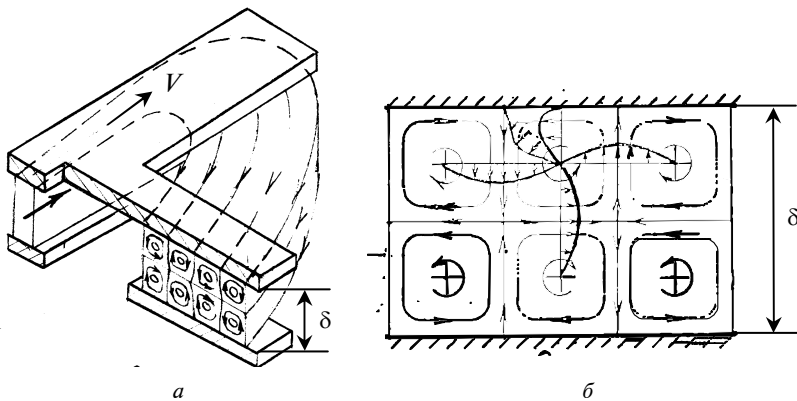


Рис. 7. Схема виникнення системи парних вихорів при криволінійному русі рідини між двома паралельними стінками (а) та схема вторинної течії й епюри швидкостей у перерізі щілини (б)

Причиною виникнення регулярної системи вихорів є відцентрові сили, які виникають при русі частинок рідини по криволінійних траєкторіях.

При русі частинок рідини по криволінійній траєкторії на них діють відцентрові сили, пропорційні квадрату швидкості частинок і обернено пропорційні радіусу кривизни траєкторії. Частинки рідини, які рухаються біля стінок щілини, гальмуються, і величина відцентрової сили, що діє на них, зменшується порівняно з силою, що діє на частинки, розміщені в середині щілини. Тому виникає нерівномірна масова сила, що діє в напрямку радіуса кривизни траєкторії руху частинки. Ця сила спричи-

няє виникнення регулярної системи парних вихорів (рис. 7).

Бульбашки, які потрапляють у вихори, рухаються по гвинтових лініях, а їхні треки набувають вигляду криволінійних спіралей. Визначені за фото розміри спіралі дають можливість знайти кількісні параметри обертового руху рідини у вихорі. Середня кутова швидкість частинок рідини у вихорі визначається за вимірним експериментально числом витків спіралі n з урахуванням часу експозиції фото τ . Кутова швидкість знаходиться за формулою

$$\omega = \frac{2\pi n}{\tau},$$

відповідно, $|\text{rot } \mathbf{V}| = 2\omega$.

У результаті вимірювань встановлено, що кутова швидкість частинок рідини у вихорах (ротор швидкості) може сягати значень порядку 10^3 рад/с. При цьому тангенціальна складова швидкості у вихорах сягає 10 м/с і вище.

Висновки

Доведено можливість ефективного регулювання положення гідростатичного сферичного шарніра за допомогою формування спеціальних струминних течій у щілинах гідростатичних опор. Струминні течії формуються за допомогою системи сопел, в які втікає і виті-

кає рідина із щілини опори. При цьому в щілині використана система карманів, яка призначена для формування спеціальної течії в щілині із системою прямих і зворотних струменів, що ефективно регулюють гідродинамічний опір щілини, а відповідно, і величину та напрямок опорної реакції.

Гідродинамічні характеристики струминних течій у щілині доцільно визначати розрахунком на основі методу ламінарної аналогії. При цьому розв'язується допоміжна задача знаходження плоского руху ідеальної рідини в ділянці, перетин якої відповідає контуру щілини. За знайденим полем швидкостей ідеальної рідини знаходяться поле максимальних швид-

костей в'язкої рідини в перетині градієнт тиску та частинні похідні тиску по просторових координатах, які є основою для розрахунку компонент тензора напружень і тензора швидкостей деформацій. Діагональні складові σ_{xx} , σ_{yy} тензора напружень, а також позадіагональна складова σ_{xy} в перетині щілини подібні параболічним профілям швидкостей і досягають мінімальних значень у середній частині щілини. Позадіагональні компоненти σ_{zx} і σ_{zy} змінюються за лінійним законом при нульовому значенні в середній частині щілини.

Встановлено, що в щілині гідростатичної опори зі струминним регулюванням виникають вторинні течії у вигляді регулярної системи вихорів з інтенсивністю завихреності (ротор швидкості) приблизно 10^3 рад/с. Причиною вихроутворення є зміна напрямку струминних течій у щілині опори.

Перспективою подальших досліджень є вивчення впливу мікрорельєфу поверхонь щілини на вид і характер струминних течій.

1. *Бушуев В.В.* Практика конструирования машин: Справочник. – М.: Машиностроение, 2006. – 448 с.
2. *Strutinsky S., Jachno O.* Technological provision of controlling the spherical aerostatic supporting knots of spatial mechanism in the quality mechatronic systems // *Hydraulika i Pneumatyka*. – 2009. – N 6. – P. 19–23.
3. *Шиманович М.А.* Бесконтактные опоры с внешним источником давления смазочной среды // *Станки и инструмент*. – 1987. – № 6. – С. 16–18.
4. *Струтинський С.В., Яхно О.М.* Реализация струйных технологий в системе регулирования положения гидростатической сферической опоры // Сб. докладов Междунар. науч.-техн. конф. “Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин”, 17–19 ноября 2010 г., БНТУ, Минск, Республика Беларусь. – Минск, 2010. – С. 262–270.
5. *Strutinsky S., Jachno O.* Development of the Managed Spherical Aerostatics Hinges for the Exact Spatial Mechanisms of Gexapod // *Proc. 10th Anniversary Int. Scientific conf. Unitech'10*, 19–20 November 2010, Gabrovo, Bulgaria. – Gabrovo, 2010. – II. – P. 385–390.
6. *Пат. України № 31194: МПК F16C32/06.* Гідростатичний-аеростатичний опорний вузол / О.М. Яхно, С.В. Струтинський. – № u200714415; Заяв. 20.12.2007; Опуб. 25.03.2008, Бюл. № 6.
7. *Струтинський С., Кропівна А.* Аналіз процесів технологічних систем: Навч. посібник. – Кіровоград: КОД, 2010. – 428 с.
8. *Повх И.Л.* Техническая гидромеханика. – Л.: Машиностроение, 1969. – 524 с.
9. *Струтинський С.В.* Теоретичні дослідження гідродинамічних процесів регульованої гідростатичної опори на основі методу ламінарної аналогії // *Промислова гідравліка і пневматика*. – 2008. – № 4 (22). – С. 61–66.
10. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
11. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с.

Рекомендована Радою
Механіко-машинобудівного інституту
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
11 листопада 2011 року