

УДК 004.942.001.57

К.В. Молодецька

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ СТРИЖНЯ НА ОСНОВІ АЛГЕБРИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СПЕКТРІВ

The article exemplifies modeling of the thermal field of the rod diameter d by applying the method based on algebraic properties of differential spectra. This enabled to reduce the value of modeling errors and to improve symbolic mathematical descriptions of physical fields. To this end, forward and reverse differential spectra of physical fields of the rod are constructed. Incorrect problems of modeling occurring when coupling discrete direct and inverse spectra is resolved by regularization through incorporating initial and boundary conditions in the balance of differential spectra in a form that allows enhancing the system of equations for uncovering the unknown variables. Simulation results obtained are compared with exact solution of the problem. Hence we determine that they are consistent.

Вступ

Сучасні технічні об'єкти (ТО) є складними динамічними системами (СДС) з розподіленими параметрами, в основу функціонування яких покладено різноманітні фізичні поля, що описуються, як правило, диференціальними рівняннями в частинних похідних за відповідних початкових і граничних умов [1–7]. Більшість реальних фізичних полів і відповідні їм математичні моделі є нелінійними. З причини високої вартості натурних експериментів з метою розв'язання задач моніторингу, керування, ідентифікації, оптимізації і прогнозування в СДС виникає нагальна потреба моделювання фізичних полів. У свою чергу практика визначає особливі вимоги до високої точності моделювання та обчислювальної швидкодії. Ці вимоги можуть бути виконані використанням аналітичних і числово-аналітичних методів моделювання фізичних полів. На сьогодні аналітичні та числово-аналітичні методи розв'язання нелінійних крайових задач недостатньо розвинені і потребують подальших досліджень. Аналіз останніх досліджень і публікацій [1–7] показав, що аналітичні і числово-аналітичні методи розв'язання крайових задач ґрунтуються на інтегральних і диференціальних перетвореннях математичних моделей фізичних полів. Застосування різних методів інтегральних перетворень обмежується в основному дослідженням лінійних математичних моделей [7].

Моделювання нелінійних фізичних процесів може бути виконане в аналітичному або числово-аналітичному вигляді на основі використання одновимірних диференціальних перетворень [3–6, 8]. Недолік цих методів полягає в залежності складності аналітичного опису фізичного процесу в області зображень від величини

похибки моделювання фізичного поля в області оригіналів. Зважаючи на все сказане вище, доцільним є застосування методу моделювання фізичних процесів і полів на основі алгебричних властивостей диференціальних спектрів [3–6]. Пропонується підвищити точність моделювання фізичного поля стрижня діаметром d за допомогою використання алгебричних властивостей диференціального спектра.

Постановка задачі

Мета статті полягає в застосуванні алгебричних властивостей диференціальних спектрів для моделювання теплового поля стрижня діаметром d і зниження похибки моделювання порівняно з точним розв'язком задачі.

Застосування методу моделювання на основі алгебричних властивостей диференціальних спектрів

Розглянемо задачу моделювання теплового поля стрижня діаметром d [7]. Вона зводиться до розв'язку крайової задачі

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq d, \quad (1)$$

де a – коефіцієнт температуропровідності, u – температура стрижня, при початкових

$$u(x,0) = 0, \quad (2)$$

і граничних умовах

$$u(d,t) = u_0, \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Відомий точний аналітичний розв'язок задачі (1)–(3)

$$u(x, t) = u_0 + \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \exp(-a^2 \lambda_n^2 t) \cos \lambda_n x, \quad (4)$$

де $\lambda_n = (2n-1)\pi(2d)^{-1}$.

Переведемо теплове рівняння (1) в область зображень згідно з диференціальними перетвореннями [9]

$$U(q, t) = \frac{H_x^q}{q!} \left[\frac{\partial^q u(x, t)}{\partial t^q} \right]_{x=0}, \quad (5)$$

$$u(x, t) = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{x}{H_x} \right)^q U(q, t) \text{ при } x \in \left[0; \frac{d}{2} \right],$$

$$\bar{U}(q, t) = \frac{\bar{H}_x^q}{q!} \left[\frac{\partial^q u(x, t)}{\partial t^q} \right]_{x=\bar{H}_x=d}, \quad (6)$$

$$\bar{u}(x, t) = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\bar{H}_x} \right)^q \bar{U}(q, t) \text{ при } \bar{x} \in \left[\frac{d}{2}; d \right],$$

де q – цілочисловий аргумент, що дорівнює 0, 1, 2, ..., ∞ ; $H_x = \bar{H}_x$ – довільна додатна стала; $U(q, t)$, $\bar{U}(q, t)$ – диференціальні зображення функції $u(x, t)$.

Застосовуючи пряме диференціальне перетворення (5) до крайової задачі (1), отримаємо рекурентний вираз в області зображень для відрізка $x \in \left[0; \frac{d}{2} \right]$:

$$U(q+2, t) = \frac{H_x^2}{a^2(q+1)(q+2)} \frac{dU(q, t)}{dt}. \quad (7)$$

Побудуємо диференціальний спектр (7), використовуючи граничну умову (3):

$$U(0, t) = \varphi(t), \quad U(1, t) = 0, \quad U(2, t) = \frac{H_x^2}{2a^2} \dot{\varphi}(t),$$

$$U(4, t) = \frac{H_x^4}{4!a^4} \ddot{\varphi}(t),$$

де $\varphi(t)$ – невідома функція аргументу t , і введемо позначення $\ddot{\varphi}(t) = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}$.

Для знаходження функції $\varphi(t)$ граничну умову (3) запишемо у вигляді суми дискрет диференціального спектра

$$u(d, t) = \sum_{q=0}^{\infty} U(q, t) \Big|_{H_x=d} = \varphi(t) + \frac{d^2}{2a^2} \dot{\varphi}(t) + \frac{d^4}{4!a^4} \ddot{\varphi}(t), \quad u(d, t) = u_0. \quad (8)$$

Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку (8) має вигляд

$$\varphi(t) = u_0 + C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}, \quad (9)$$

де C_1 , C_2 – сталі інтегрування; p_1 і p_2 – корені характеристичного рівняння.

Знайдемо p_1 і p_2 із характеристичного рівняння

$$p^2 + \frac{4!}{2} \left(\frac{a}{d} \right)^2 p + 4! \left(\frac{a}{d} \right)^4 = 0,$$

$$p_{1,2} = -3! \left(\frac{a}{d} \right)^2 \pm \left(\frac{a}{d} \right)^2 \sqrt{36 - 24} = -(6 \pm 2\sqrt{3}) \left(\frac{a}{d} \right)^2.$$

Виконаємо диференціювання виразу (9) для підстановки в (6):

$$\dot{\varphi}(t) = C_1 p_1 e^{p_1 t} + C_2 p_2 e^{p_2 t}, \quad (10)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = C_1 p_1^2 e^{p_1 t} + C_2 p_2^2 e^{p_2 t}. \quad (11)$$

Запишемо зворотне диференціальне перетворення (6):

$$u(x, t) = \varphi(t) + \frac{x^2}{2a^2} \dot{\varphi}(t) + \frac{x^4}{4!a^4} \ddot{\varphi}(t). \quad (12)$$

Підставляючи в (12) вирази (10), (11), отримаємо розв'язок задачі (1) в області оригіналів:

$$u(x, t) = u_0 + C_1 e^{p_1 t} \left[1 + \frac{x^2}{2a^2} p_1 + \frac{x^4}{4!a^4} p_1^2 \right] + C_2 e^{p_2 t} \left[1 + \frac{x^2}{2a^2} p_2 + \frac{x^4}{4!a^4} p_2^2 \right]. \quad (13)$$

У квадратних дужках виразу (13) записано розклад у ряд косинусоїдальної функції, тому його можна подати у вигляді

$$u(x, t) = u_0 + C_1 e^{p_1 t} \cos \frac{\sqrt{|p_1|}}{a} x + C_2 e^{p_2 t} \cos \frac{\sqrt{|p_2|}}{a} x. \quad (14)$$

В отриманому розв'язку (14) необхідно визначити невідомі сталі інтегрування C_1 і C_2 , що призводить до некоректної задачі. Для її розв'язання переведемо в область зображень початкову умову (2), використовуючи вираз (5) [10]. Отримаємо такий вираз:

$$U(q, 0) = \frac{H_x^q}{q!} \left[\frac{\partial^q u(x, 0)}{\partial t^q} \right]_{x=0, t=0} = 0.$$

Надаючи q цілочислові значення 0, 1, 2, 3, ..., визначимо дискрети диференціального спектра:

$$\begin{aligned} U(0, 0) &= u_0 + C_1 + C_2 = 0, \\ U(1, 0) &= H_x \left[-C_1 \frac{\sqrt{p_1}}{a} \sin \frac{\sqrt{p_1}}{a} x - C_2 \frac{\sqrt{p_2}}{a} \sin \frac{\sqrt{p_2}}{a} x \right]_{x=0} = 0, \\ U(2, 0) &= \frac{H_x^2}{2!} \left[-C_1 \frac{p_1}{a^2} \cos \frac{\sqrt{p_1}}{a} x - C_2 \frac{p_2}{a^2} \cos \frac{\sqrt{p_2}}{a} x \right]_{x=0} = \\ &= -\frac{H_x^2}{2} \left[C_1 \frac{p_1}{a^2} + C_2 \frac{p_2}{a^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Із виразів (15) маємо

$$\begin{cases} C_2 = -u_0 - C_1, \\ C_1 p_1 + C_2 p_2 = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Підставляючи C_2 в друге рівняння системи (16), отримаємо вираз для C_1 :

$$C_1 = u_0 \frac{p_2}{p_1 - p_2}.$$

Розглянемо розв'язок рівняння (1) при $x \in \left[0; \frac{d}{2} \right]$ у координатах $u(x_1, t_1)$, де $x_1 = x$ або $\frac{x_1}{d} = \frac{x}{d}$ при $d = 5$ і $a^2 = 0,139$. Отримаємо

такі значення коренів характеристичного рівняння p_1 і p_2 :

$$\begin{aligned} p_1 &= -(6 - 2\sqrt{3}) \left(\frac{a}{d} \right)^2 = -2,536 \frac{a^2}{d^2}, \\ p_2 &= -(6 + 2\sqrt{3}) \left(\frac{a}{d} \right)^2 = -9,464 \frac{a^2}{d^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{\sqrt{|p_1|}}{a} = \frac{\sqrt{2,536}}{d} = \frac{1,59}{d} \approx \frac{\pi}{2d},$$

$$\frac{\sqrt{|p_2|}}{a} = \frac{\sqrt{9,464}}{d} = \frac{3,08}{d} \approx \pi \frac{1}{d}.$$

Тоді вираз (14) можна записати у вигляді

$$u(x, t) = u_0 + C_1 e^{p_1 t} \cos \frac{\pi x}{2d} + C_2 e^{p_2 t} \cos \pi \frac{x}{d},$$

де $C_1 = -1,366 u_0$ і $C_2 = 0,366 u_0$.

Розв'язок в координатах (x_1, t_1) запишемо як

$$\begin{aligned} u_{\text{точ}}(x_1, t_1) &= 300 \left[1 - 1,366 e^{-0,0141 t_1} \cos \frac{\pi x_1}{2 \cdot 5} + \right. \\ &\quad \left. + 0,366 e^{-0,0526 t_1} \cos \pi \frac{x_1}{5} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Виконаємо моделювання теплового поля (1) для $\bar{x} \in \left[\frac{d}{2}; d \right]$. Для цього переведемо його модель в область зображень, використовуючи вираз (6) для побудови зворотного диференціального спектра. Отримаємо рекурентний вираз

$$\bar{U}(q+2, t) = \frac{\bar{H}_x^2}{a^2(q+1)(q+2)} \frac{d\bar{u}(q, t)}{dt}.$$

Надаючи q цілочислового значення 0, 1, 2 і використовуючи граничну умову (3), побудуємо зворотний диференціальний спектр

$$\bar{U}(0, t) = u_0, \quad \bar{U}(1, t) = \bar{H}_x \psi(t), \quad \bar{U}(2, t) = 0,$$

$$\bar{U}(3, t) = \frac{\bar{H}_x^3}{3! a^2} \psi(t), \quad \bar{U}(4, t) = 0,$$

де $\psi(t)$ – невідома функція аргументу t , і введемо позначення $\psi(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$.

Для знаходження функції $\psi(t)$ граничну умову (3) запишемо у вигляді

$$\left[\frac{\partial \bar{u}(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \right]_{\bar{x}=\bar{H}_x=d} =$$

$$= \frac{1}{|\bar{H}_x|} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q (q+1) \bar{U}(q+1, t) = 0.$$

Звідси отримуємо лінійне диференціальне рівняння

$$\psi(t) + 2 \frac{a^2}{d^2} \psi(t) = 0. \quad (19)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (19) має вигляд

$$\psi(t) = C e^{pt}, \quad p = -2 \left(\frac{a}{d} \right)^2.$$

де C – стала інтегрування, p – корінь характеристичного рівняння.

Виконаємо зворотний перехід в область оригіналів граничної умови (3) із використанням виразу

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \left(\frac{\bar{x}}{\bar{H}_x} \right)^q \bar{U}(q, t).$$

Отримаємо

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = u_0 - \bar{x} C e^{pt} - \frac{\bar{x}^3}{3! a^2} C p e^{pt}.$$

Таким чином, розв'язок рівняння теплопровідності стрижня (1) в області $\bar{x} \in \left[\frac{d}{2}; d \right]$ має вигляд

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = u_0 - C e^{pt} \left(\bar{x} - \frac{\bar{x}^3}{3d^2} \right). \quad (20)$$

Невідомий параметр C визначимо з умови спряження двох розв'язків

$$u(x, t) \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \bar{u}(\bar{x}, t) \Big|_{\bar{x}=\frac{d}{2}},$$

$$u_0 + C_1 e^{p_1 t} \cos \frac{\pi}{4} = u_0 - C e^{pt} \left(\frac{d}{2} - \frac{d}{24} \right).$$

Введемо позначення $t = t_1$, тоді маємо

$$C = 0,421 u_0 e^{-0,0141 t_1}. \quad (21)$$

Із врахуванням (21) розв'язок задачі (20) можна записати у вигляді

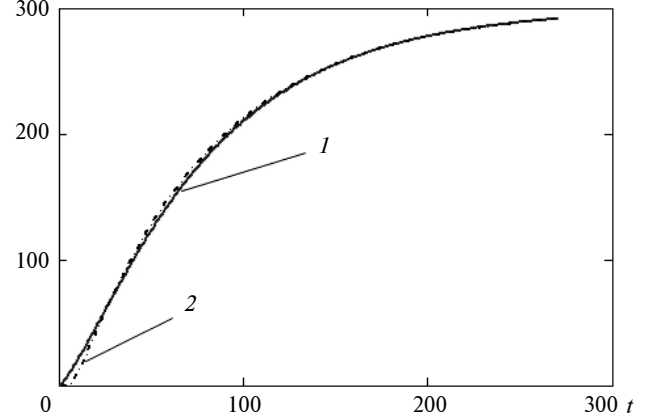
$$\bar{u}(\bar{x}, t_1) = u_0 \left[1 - 0,421 e^{-0,0141 t_1} \left(\bar{x} + \frac{\bar{x}^3}{75} \right) \right]$$

при $\bar{x} \in \left[\frac{d}{2}; d \right]. \quad (22)$

Оцінимо похибку моделювання теплового поля стрижня діаметром d в координатах (x_1, t_1) на часовому відрізку $[0; 270]$. Програмну реалізацію задачі моделювання проведено засобами пакету Mathcad, отримані результати подано на рисунку.

Таким чином, порівнюючи розв'язок (18) для області $x \in \left[0; \frac{d}{2} \right]$ і (22) для області $\bar{x} \in \left[\frac{d}{2}; d \right]$ запропонованим методом з точним розв'язком (4), отримуємо похибку розв'язку, меншу 1 %.

$u(1,5, t)$
 $u_t(1,5, t)$
300



Результати моделювання теплового поля стрижня при $x = 1,5$: 1 – моделювання запропонованим методом, 2 – точний розв'язок задачі

Висновки

Використання методу моделювання фізичних полів на основі алгебричних властивостей диференціальних спектрів дає можливість підвищити точність та ефективність символьних математичних описів фізичних полів. Для розв'язку некоректної задачі моделювання (14) було використано метод включення в баланс диференціальних спектрів початкових і граничних умов у такій формі, яка дала змогу регуляризувати некоректну задачу [10].

Предметом подальших досліджень є застосування запропонованого методу для моделювання нелінійних фізичних процесів і полів,

що описуються нелінійними крайовими задачами.

1. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г. М.* Численные методы – М.: БИНОМ, 2003. – 632 с.
2. *Поршнев С.В.* Вычислительная математика. – СПб: БХВ-Петербург, 2004. – 320 с.
3. *Баранов В.Л., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М.* Зміщені системоаналогові диференціальні перетворення для розв'язку крайових задач // Вісник Житомир. держ. технологічного ун-ту. – Житомир: ЖДТУ, 2005. – № 4 (35). – С. 42–48.
4. *Баранов В.Л., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М.* Метод моделювання фізичних процесів на основі диференціальних перетворень нелінійних крайових задач // Там же. – 2007. – № 2 (41). – С. 59–65.
5. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наук. думка, 1990. – 184 с.
6. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – К.: Наук. думка, 1986. – 158 с.
7. *Рвачев В.Л., Слесаренко А.П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. – К.: Наук. думка, 1976. – 288 с.
8. *Баранов В. Л., Баранов Г. Л., Фролова О. Г.* Порівняння методів моделювання динамічних процесів основними та зміщеними диференціальними перетвореннями // Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. пр. – К.: НАУ, 2004. – Вип. 10. – С. 72–7.
9. *Баранов В.Л., Костюченко Р.М., Молодецька К.В.* Метод моделювання фізичних полів і процесів на основі прямих і зворотних диференціальних спектрів // Вісник Житомир. держ. технологічного ун-ту. – Житомир: ЖДТУ, 2009. – № 2 (49). – С. 59–68.
10. *Баранов В.Л., Костюченко Р.М., Молодецька К.В.* Особливості моделювання фізичних полів і процесів на основі прямих і зворотних диференціальних спектрів із значною кількістю дискрет // Вісник Держ. ун-ту інформаційно-комунікаційних технологій. – К.: ДУІКТ, 2009. – № 7 (4). – С. 312–322.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
14 листопада 2011 року