УДК 519.6

В.М. Сокуренко, В.С. Неділюк

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ СТОХАСТИЧНИХ МЕТОДІВ БЕЗПЕРЕРВНОЇ ГЛОБАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Currently global optimization becomes a widely used technique for solving complex problems in physics, engineering, biology, economy and other fields of human activity. By using the developed computer program, we examine functionality and efficiency of modern global optimization methods such as Improving Hit-and-Run, Simulated Annealing, Genetic Algorithm, Modified Differential Evolution and Electromagnetism-Like-Mechanism. Furthermore, we conduct comparative statistic investigations of these methods under identical stopping conditions over a set of 50 test functions having different complexity and dimension up to 20. Crucially, we reveal that the modified method of differential evolution developed by M. Ali and B. Zabinsky in 2009 is the most powerful and effective technique. In general, it requires minimum computation efforts to find a global optimum and has the maximum percent of correct solutions as compared to other considered methods.

Вступ

Одним із фундаментальних принципів у світі є пошук оптимального рішення. Оптимізація застосовується в науці, техніці та в багатьох інших сферах людської діяльності. Зокрема, це можуть бути задачі проектування, розподілу обмежених ресурсів, розрахунку польоту ракети тощо. Подібні задачі зустрічаються всюди, де необхідно отримати найкращий результат цільової функції на множині встановлених обмежень.

Подібний принцип має місце й у фізиці. Так, наприклад, під час повільного у часі охолодження твердих тіл їхні молекули набувають енергетично оптимальних кристалічних структур.

Зазначений принцип виходить також з біологічних міркувань про “природний відбір”, який разом із біологічною еволюцією пояснює поведінку різних видів для кращої адаптації в середовищі. Тут оптимум – це добре адаптований вид, що домінує над усіма іншими тваринами у навколишньому середовищі.

У суспільстві постійно існує бажання отримувати максимальний ступінь користі, затрачаючи на це мінімум зусиль. Так, в економіці прибуток та продажі повинні бути максимізовані, а собівартість продукту має бути зменшена наскільки це можливо.

Розв’язати багато різнопланових задач, які дослідити аналітично не можливо, допомагає глобальна оптимізація (ГО) – галузь прикладної математики та числового аналізу, спрямована на оптимізацію. Результат дії ГО – знаходження найкращого елемента $X_{\text{опт}}$ з множини можливих елементів X, що задовольняє певний критерій $F = \{f_1, f_2, .., f_n\}$. Ці критерії представляються математичними функціями та мають назву цільових функцій.

За останні роки розроблено значну кількість алгоритмів ГО як детермінованих, так і тих, що базуються на положеннях теорії ймовірностей. Серед останніх поширення набули алгоритми Монте-Карло без використання множини потенційних точок (випадкового пошуку, імітаційного відпалу, методу проб, методу табу та ін.) та еволюційні алгоритми (генетичний алгоритм, метод еволюційної стратегії, метод диференційної еволюції, метод рою бджіл, метод колонії мурашок, метод гармонічного пошуку тощо) [1, 2].

Для проведення порівняльних досліджень було відібрано п’ять алгоритмів ГО, які не потребують розрахунку похідних функції та були відзначені багатьма дослідниками як потужні та ефективні [1–3], а саме:

1. Метод проб з покращенням (Improving Hit-and-Run (IHR)).
2. Метод імітаційного відпалу (Simulated Annealing (SA)).
3. Генетичний алгоритм (Genetic Algorithm (GA)).
4. Модифікований метод диференційної еволюції (Modified Differential Evolution (MDE)).
5. Метод електромагнетизму (Electromagnetism Like Mechanism (EM)).

Незважаючи на те, що окремі алгоритми (як, наприклад, метод диференційної еволюції [4]) займали призові місця в порівняльних змаганнях на багатьох конференціях, спроби покращити їх збіжність постійно продовжуються. Про це, зокрема, свідчать такі публікації, як [5, 6].

На жаль, зазначені алгоритми були досліджені їх авторами на різних тестових функціях та з різними обмеженнями. В зв'язку з цим з методологічної точки зору існує потреба в адекватному порівнянні різних алгоритмів ГО за однакових вихідних даних та умов завершення процедури оптимізації.

Постановка задачі

Метою роботи є перевірка дієздатності сучасних методів ГО та виявлення найбільш ефективних з них з точки зору швидкодії (мінімальної кількості обчислень) і достовірності (оцінюється за відсотком знаходження хибних розв'язків).

Для досягнення поставленої мети потрібно розв'язати такі основні задачі:

- розробити комп'ютерну програму, що реалізує алгоритми зазначених вище методів;
- здійснити числове статистичне порівняння реалізованих методів і виявити найбільш ефективні з них за критеріями мінімальної кількості обчислень і відсотком хибних розв'язків.

Стислий огляд методів ГО

Поставлена задача методологічного порівняння та адекватного подання результатів стохастичних алгоритмів ГО [3] потребує вибору низки відомих функцій, на яких можуть бути протестовані алгоритми ГО, та здійснення порівняльного дослідження різних алгоритмів з однаковими вихідними даними та умовами завершення процедури пошуку.

Оскільки оптимум тестової функції є заздалегідь відомим, то критерієм завершення процедури пошуку доцільно встановити умову:

$$\frac{f(X) - f(X_{\text{опт}})}{f(X_{\text{опт}})} \le \varepsilon,$$

де $f(X)$ – значення тестової функції в знайденій точці, $f(X_{\text{опт}})$ – значення тестової функції в точці оптимуму, ε – стала, що визначає відносну похибку (наприклад, 0,01) або факт перевищення кількості викликів тестової функції, встановленої користувачем межі (в цьому випадку оптимум вважається недосягнутим).

Метод проб з покращенням. Цей метод був запропонований Б. Забінським та іншими у 2003 р. У методі спочатку вибирається випадкова точка X_k, яка може залежати від однієї або кількох попередніх точок. Алгоритм генерує довільний напрямок d_k, і вибирається довільний крок ρ_k вздовж цього напрямку для визначення наступної точки $X_{k+1} = X_k + \rho_k d_k$. Нова точка X_{k+1} приймається лише у тому випадку, якщо значення функції є кращим за те, що було визначене для за попередньої точки, тобто X_k.

Алгоритм цього методу [3] має такий вигляд.

1. Встановити параметр ітерації $k = 0$ і присвоїти $X_0 \in \Omega$, а також $f_0 = f(X_0)$.

2. Генерувати довільний напрямок вектора d_k на розподіленій рівномірній поверхні n-розмірній гіперсфері.

3. Генерувати крок ρ_k з рівномірною вибіркою у Ω вздовж напрямку вектора d_k для поточної точки X_k. Можлива така точка: $w_{k+1} = X_k + \rho_k d_k$.

4. Оновити поточну точку згідно з умовою

$$X_{k+1} = \begin{cases} X_k + \rho_k d_k, \text{ якщо } f(X_k + \rho_k d_k) < f_k, \\ X_k \text{ в іншому випадку} \end{cases}$$

та прийняти $f_{k+1} = f(X_{k+1})$.

5. Зупинитись, якщо критерій завершення процедури оптимізації задовільний. В іншому випадку збільшити k на одиницю та повернутися до кроку 2.

Метод імітаційного відпалу. Алгоритм цього методу [7] базується на імітації фізичного процесу, який проходить при кристалізації рідини, в тому числі й під час відпалу металів. Припускається, що атоми уже вишикувались у кристалічну ґратку, але ще допустимими є переходи окремих атомів з однієї комірки в іншу. Процес протікає при постійному зниженні температури. Перехід атома з одного місця в інше відбувається за деякої ймовірності, причому ймовірність зменшується зі спадом температури. Стійка кристалічна ґратка відповідає мінімуму енергії атомів, тому атом або переходить у стан з меншим рівнем енергії, або залишається на місці.

Алгоритм методу імітаційного відпалу має такий вигляд.

1. Здійснити пошук початкової точки X (можлива випадкова генерація). Вибрати високу початкову температуру $T > 0$. Задати значення параметра охолодження r (зазвичай, r = = 0,95).

2. Вибрати випадкову точку X', сусідню для X.

3. Розрахувати різницю

$$\Delta = f(X') - f(X).$$

4. Ухвалити рішення щодо прийняття нового розв'язку. Якщо $\Delta \le 0$, прийняти $X = X'$, в іншому випадку (функція в точці X' є більшою за X) прийняти $X = X'$ лише з імовірністю $e^{-\Delta/T}$.

5. Якщо умови завершення виконані, то прийняти S за кінцевий результат, в іншому випадку знизити температуру ($T = rT$) та перейти до кроку 1.

Генетичний алгоритм. Генетичний алгоритм – це евристичний алгоритм пошуку, що використовується для розв'язання задач оптимізації та моделювання через випадковий підбір, комбінування і варіації пошукових параметрів з використанням механізмів, властивих біологічній еволюції [3].

Відмінною особливістю генетичного алгоритму є використання оператора "схрещування", який здійснює операцію рекомбінації точок-претендентів, роль якої аналогічна ролі схрещування у живій природі.

Генетичний алгоритм має такий вигляд.

1. Задати початкову множину точок $S = \{X_1, X_2, ..., X_N\}$, де точки X_i, $i = 1,2,...,N$, належать Ω. Як правило, вибирають $N = 10n$, де n – розмірність задачі. Розрахувати $f(X_i)$ для кожної точки X_i. Прийняти параметр генерації $k = 0$.

2. Знайти найкращу і найгіршу точки в множині S. Визначити ці точки ($X_{\max}$, $X_{\min}$) та відповідні значення функцій $f_{\max}$, $f_{\min}$ так, що $f_{\max} = \max_{X \in S} f(X)$ і $f_{\min} = \min_{X \in S} f(X)$. Якщо виконується зазначена вище умова завершення процедури оптимізації або умова $f_{\max} - f_{\min} < \varepsilon$, то зупинитись.

3. Згенерувати m нових точок для заміщення їх у S. Для цього потрібно вибрати випадково $n+2$ точок з S як батьків, створити дві точки (потомство), використовуючи кросовер і мутацію. Повторювати крок 3 доти, доки не буде створено m точок.

4. Оновити множину S, замінивши у ній m гірших точок на нові (згенеровані) точки. Збільшити значення k на одиницю та перейти до кроку 2.

Метод диференціальної еволюції. Диференціальна еволюція – метод багатовимірної математичної оптимізації, що належить до класу стохастичних еволюційних алгоритмів оптимізації та використовує окремі ідеї генетичних алгоритмів. Він уперше був опублікований Р. Сторном і К. Прайсом у 1995 р. [4]. Як і розглянуті вище, цей метод оптимізації є прямим, тобто він вимагає від користувача можливості розрахунку значень лише цільової функції, а не її похідних.

Метод диференціальної еволюції призначений для знаходження глобального мінімуму (або максимуму) недиференційованих, нелінійних, мультимодальних (тобто тих, що мають велику кількість локальних екстремумів) функцій від багатьох змінних. Метод є простим у реалізації та використанні, оскільки містить небагато керуючих параметрів, що потребують підбору.

У базовому вигляді алгоритм можна описати так [9]. Спочатку генерується деяка множина векторів, що називається поколінням. Під векторами розуміються точки n-вимірного простору, в якому визначена цільова функція $f(X)$, що підлягає мінімізації. На кожній ітерації алгоритм генерує нове покоління векторів випадковим чином, комбінуючи вектори з попереднього покоління. Кількість векторів у кожному поколінні є однаковою.

Нове покоління векторів генерується у такий спосіб. Для кожного вектора $\mathbf{X}_i$ з попереднього покоління вибираються три різні випадкові вектори υ_1, υ_2, υ_3 (за винятком безпосередньо вектора $\mathbf{X}_i$) та генерується так званий мутантний вектор згідно з формулою [9]

$$\upsilon = \upsilon_1 + F(\upsilon_2 - \upsilon_3),$$

де F – один із параметрів методу (зазвичай, це додатна стала в інтервалі [0, 2]).

Далі над мутантним вектором υ виконується операція "схрещування", суть якої полягає у тому, що окремі координати вектора замінюються відповідними координатами із початкового вектора $\mathbf{X}_i$ (кожна координата замінюється з певною ймовірністю, значення якої також є параметром методу). Якщо після схрещування так званий пробний вектор виявляється кращим за вектор $\mathbf{X}_i$ (тобто значення цільової функції зменшилося), то в "новому" поколінні вектор $\mathbf{X}_i$ замінюється на пробний вектор, інакше – залишається $\mathbf{X}_i$.

У даній статті наведено результати дослідження однієї з останніх модифікацій цього методу, запропонованої М. Алі і Б. Забінським у 2009 р. [3].

Метод електромагнетизму. Цей евристичний метод оптимізації був вперше запропонований С. Бирбілем і С. Фангом у 2003 р. [10]. В ньому закладено ідею, що є аналогією поведінки електрично заряджених частинок, та використано механізм “тяжіння-відштовхування” для переміщення множини точок у напрямку оптимальності:

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 l^2},$$

де F_{12} — сила взаємодії заряджених частинок, q_1, q_2 — заряди частинок, l — відстань між зарядами, ε_0 — абсолютна діелектрична проникність середовища.

Сумарна сила визначається як суперпозиція сил всіх частинок (рис. 1).

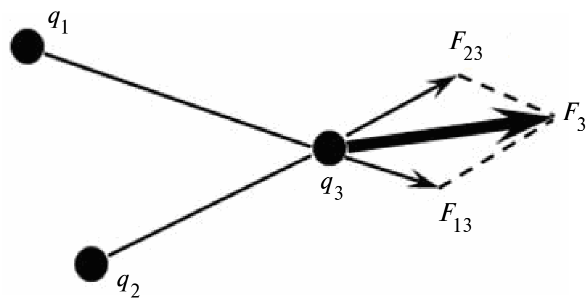

Рис. 1. Принцип суперпозиції [10]

Згідно з висновками праці [10], метод електромагнетизму показав непогані результати порівняно з іншими добре відомими методами ГО.

Порівняльні дослідження методів ГО

Для здійснення числового статистичного порівняння реалізованих методів і виявлення найбільш ефективних з них були використані відомі тестові функції [1—3]. Перелік цих функцій подано в табл. 1.

Для прикладу на рис. 2 зображено вигляд поверхні тестової функції Растригіна, яка має багато локальних мінімумів та один глобальний:

$$f(x_1, x_2) = 20 + x_1^2 + x_2^2 - 10(\cos(2\pi x_1) + \cos(2\pi x_2)),$$

де x_1, x_2 — координати простору предметів.

Для проведення числових досліджень було розроблено з єдиних методологічних позицій алгоритми поданих методів та створено відповідну комп’ютерну програму “Global Optimization”.

***Таблиця* 1.** Тестові функції, використані для досліджень

Тестова функція	Розмірність n	Назва функції
F5	2	Function № 5
ACK1	10	Ackley 1
ACK2	20	Ackley 2
AP	2	Aluffi-Pentini
BL	2	BeckerandLago
BF1	2	Bohachevsky 1
BF2	2	Bohachevsky 2
BF3	2	Bohachevsky 3
BP	2	Branin
CB3	2	CamelBack-3 ThreeHump
CB6	2	CamelBack-6 SixHump
CM	4	CosineMixture
DA	2	DekkersandAarts
EA	2	Easom
EXP1	10	Exponential
EXP2	20	Exponential
GP	2	GoldsteinandPrice
GW	10	Griewank
GRP	3	GulfResearch
H3	3	Hartman 3
H6	6	Hartman 6
HV	3	HelicalValley
HSK	2	Hosaki
KL	4	Kowalik
Levi5	2	Levi5
LM1	3	LeviandMontalvo 1
LM2	10	LeviandMontalvo 2
MC	2	McCormick
MCP	4	MieleandCantrell
ML	10	ModifiedLangerman
MRP	2	ModifiedRosenbrock
MGP	2	Multi-Gaussian
NF2	4	Neumaier 2
NF3	10	Neumaier 3
PP	10	Pavianv
PRD	2	Periodic
RG	10	Rastrigin
RB1	2	Rosenbrock 1
RB2	10	Rosenbrock 2
SF1	2	Schaffer 1
SF2	2	Schaffer 2
SBT	2	Shubert
SWF	10	Schwefel
S5	4	Shekel 5
S7	4	Shekel 7
S10	4	Shekel 10
FX	2	Shekel’sFoxholes
SIN1	10	Sinusoidal
SIN2	20	Sinusoidal
WF	4	Wood

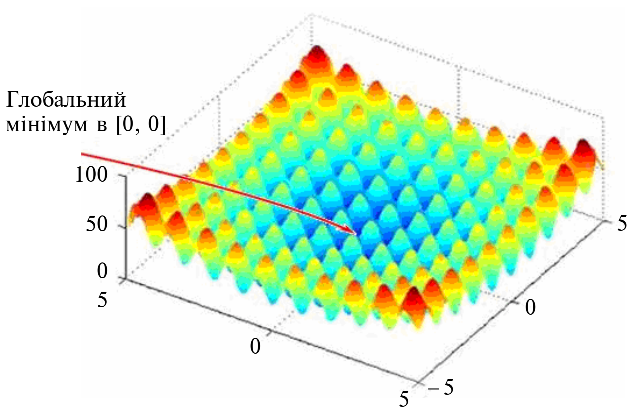

Рис. 2. Функція Растригіна

Загальними параметрами, спільними для всіх методів, встановлено такі параметри:

- кількість статистичних досліджень кожної тестової функції — 100;
- максимально допустима кількість ітерацій — 1 000 000;
- максимально допустима кількість оцінок функції — 1 000 000.
- розмір популяції — $10n$, де n — розмірність задачі.

Крім загальних параметрів, кожен метод має специфічні параметри. Їх рекомендовані значення, як правило, наводяться в літературі (див., наприклад, [1—3]). Значення специфічних параметрів, використані у даних дослідженнях, наведені на табл. 2.

Результати числових статистичних досліджень тестових функцій, отримані для вказаних вище загальних і специфічних параметрів, подано в табл. 3. За цими результатами побудовано діаграми сумарної кількості викликів (рис. 3) і сумарної кількості хибних розв'язків (рис. 4).

Наведені результати свідчать про те, що серед розглянутих методів найбільш потужним є модифікований метод диференціальної еволюції. Він має найкращі абсолютні показники як за кількістю викликів функції (0,046 мільйонів), так і за кількістю хибних розв'язків (всього 369 випадків). Крім модифікованого методу диференціальної еволюції, за сумарною кількістю викликів вдалим виявився метод імітаційного відпалу (0,073 мільйона викликів), а за кількістю хибних розв'язків — генетичний алгоритм (1232 випадки).

Таблиця 2. Використані значення специфічних параметрів методів

Метод	Параметр	Значення
SA	Кількість генерацій на одну змінну (Generations per Variable)	100
	Частка вдалих розв'язків (Success Fraction)	0,1
	Інтервал перезапуску (Reannealing Interval)	20
	Початкова температура (Initial Temperature)	100
	Коефіцієнт охолодження (Cool Factor)	0,9
	Графік зміни температури (Temperature Schedule)	Больцмана (логарифмічний)
	Функція прийняття рішення (Acceptance Function)	Метрополіса
	Функція пермутації (Permutation Function)	Гауссова
GA	Частка відбору (Selection Fraction)	0,5
	Коефіцієнт мутацій (Mutation Rate)	0,2
	Функція схрещування (Crossover Function)	Арифметична
	Функція мутації (Mutation Function)	Гауссова
MDE	Тип вагового коефіцієнта (Weighting Factor F Type)	Сталий
	Значення вагового коефіцієнта (Weighting Factor F Value)	0,5
	Тип схрещування (Crossover Type)	Сталий
	Стала схрещування (Crossover Constant)	0,5
EM	Тип локального пошуку (Local Search Type)	Всі точки
	Максимальна кількість ітерацій локального пошуку (Max Local Search Iterations)	20
	Коефіцієнт локального пошуку (Local Search Factor)	0,0001

Таблиця 3. Результати статистичних досліджень

Тестова функція	Розмірність *n*	IHR	SA	GA	MDE	EM
F5 Pract.	2	294726 (7 %)	2532 (18 %)	2819	531,1 (3 %)	21262 (90 %)
ACK1	10	–	34100 (48 %)	–	77134	–
ACK2	20	–	118416 (82 %)	–	–	–
AP	2	4416	883	367	192	672
BL	2	1377	481	240	232	302
BF1	2	468910 (31 %)	4321 (42 %)	4170	351	43006
BF2	2	384074 (28 %)	4382 (67 %)	151709 (26 %)	354	25182 (30 %)
BF3	2	15437	2097 (40 %)	23773	225	811
BP	2	6328	807	1524	344	1145
CB3	2	923	485 (2 %)	268	171 (1 %)	149
CB6	2	2418	646	242	196	528
CM	4	160735	2026	623	755	660
DA	2	2934	496	483	208	1347
EA	2	3299	519 (2 %)	386	264	861
EXP1	10	78433	4334	1881	2393	2904
EXP2	20	–	17724	917778 (99 %)	12527	19603
GP	2	8216	1456 (23 %)	1020	282 (1 %)	822
GW	10	–	–	–	57914	–
GRP	3	510	1320 (11 %)	1600	354	1591
H3	3	142	384 (7 %)	142	179	413
H6	6	9872 (17 %)	2580 (11 %)	1182 (21 %)	1592 (6 %)	4182 (10 %)
HV	3	524741 (72 %)	4753	3107	611	35176 (30 %)
HSK	2	118	186	82	84	117
KL	4	49488	4762 (78 %)	33811	1328	4654
Levi5	2	15373	987 (42 %)	11676	460 (9 %)	3642
LM1	3	12579	1201	573	430	1465
LM2	10	702705 (99 %)	8868	107063	4374	20902
MC	2	255	257	99	105	123
MCP	4	30	270	192	132	590
ML	10	–	–	–	34544 (78 %)	–
MRP	2	17109	1914 (45 %)	87823 (2 %)	353	3289
MGP	2	4403	687(50 %)	15653	277 (52 %)	1155
NF2	4	149471	2435 (92 %)	207922 (10 %)	18200	36371
NF3	10	–	30833 (18 %)	782604 (97 %)	13870	100065
PP	10	21477	4128	368952	3366	21059
PRD	2	4644	822 (3 %)	20084	467	799
RG	10	–	37309 (22 %)	–	69518	–
RB1	2	1972	613 (74 %)	16836	378	521
RB2	10	–	–	–	98673 (85 %)	–
SF1	2	13619	1454 (26 %)	13499	593	6942
SF2	2	–	–	219503 (83 %)	1059	–
SBT	2	4589	544	723	706	4229,6
SWF	10	–	12720	507591 (69 %)	15362	–
S5	4	533839 (89 %)	2625 (56 %)	15185 (64 %)	2070 (17 %)	2965 (60 %)
S7	4	567077 (84 %)	3132 (58 %)	43950 (32 %)	1642 (4 %)	3523 (30 %)
S10	4	548682 (80 %)	3387 (57 %)	18306 (27 %)	1725 (5 %)	3118 (10 %)
FX	2	3555	1014	731	442 (8 %)	7695
SIN1	10	–	7712 (55 %)	340351 (2 %)	4802	9859 (40 %)
SIN2	20	–	23470 (96 %)	–	22964	67793 (90 %)
WF	4	–	–	392383	4539	–

Примітки. У дужках вказано відсоток хибних розв'язків, якщо такі мали місце; сірим кольором виділений найкращий результат для даної тестової функції; символом "–" позначені алгоритми, що не знайшли оптимальних розв'язків для даної функції.

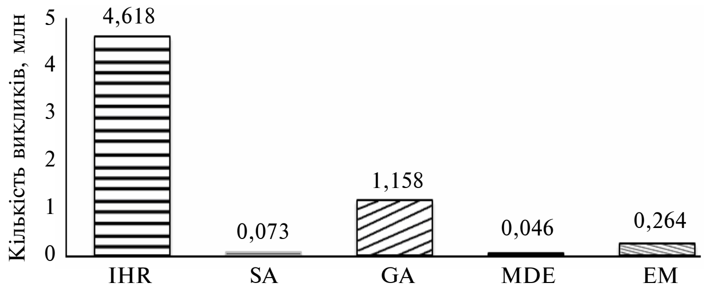

Рис. 3. Сумарна кількість викликів (серед тестів, пройдених усіма методами)

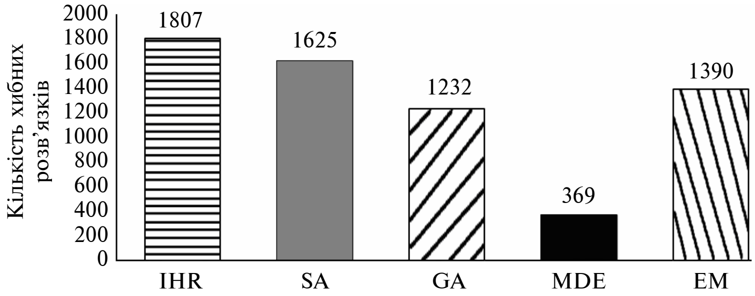

Рис. 4. Сумарна кількість хибних розв'язків (серед усіх тестів)

Висновки

Розроблено комп'ютерну програму "Global Optimization", у якій з єдиних методологічних позицій реалізовано низку запропонованих в останні роки алгоритмів безперервної глобальної оптимізації, а саме метод проб з покращенням, метод імітаційного відпалу, генетичний алгоритм, метод диференційної еволюції, метод електромагнетизму та їх різновиди. Ця програма дає можливість здійснити порівняльні статистичні дослідження ефективності алгоритмів для тестових функцій довільної складності та розмірності.

У результаті проведених статистичних досліджень реалізованих алгоритмів безперервної глобальної оптимізації на різних тестових функціях встановлено, що найбільш потужним та ефективним серед них є модифікований метод диференціальної еволюції, запропонований М. Алі і Б. Забінським у 2009 р. Цей метод має найменше значення середньої кількості викликів функції та призводить до найменшого відсотку хибних розв'язків серед розглянутих методів.

Подальші зусилля доцільно направити на дослідження наведених і нових алгоритмів та їх модифікацій на тестових функціях з кількістю незалежних змінних більше 20, що має місце в реальних інженерних застосуваннях (зокрема, під час розрахунку оптичних систем).

1. *Haupt R., Haupt S.* Practical Genetic Algorithms // Wiley-Interscience, 2004. – 254 p.
2. *Weise T.* Global Optimization Algorithms. Theory and Application. – Self-published, 2009. – 820 p. – http://www.it-weise.de/projects/book.pdf
3. *Ali M., Zabinsky B.* A numerical Evaluation of Several Stochastic Algorithms on Selected Continuous Global Optimization Test Problems // J. of Global Optimization. – 2005. – **31**. – P. 635–672.
4. *Storn R., Price K.* Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces // Ibid. – 1997. – **11**. – P. 341–359.
5. *Fan H., Lampinen J.* A Trigonometric Mutation Operation to Differential Evolution // Ibid. – 2003. – **27**. – P. 105–129.
6. *Draa A., Meshoul S.* A Quantum-Inspired Differential Evolution Algorithm for Solving the N-Queens Problem // The Int. Arab J. of Information Technology. – 2010. – **7**. – P. 21–27.
7. *Locatelli M.* Simulated Annealing Algorithms for Continuous Global Optimization: Convergence Conditions // J. of Optimization Theory and Applications. – 2000. – **104**. – P. 121–133.
8. *Dervis K.* A Simple and GO Algorithm for Engineering Problems – DE Algorithm // Turkish J. of Electrical Engineering and Computer Sciences. – 2004. – **12**. – P. 53–55.
9. *Advances* in Differential Evolution / Ed. Uday Ch. // Studies in Computational Intelligence. – Berlin: Springer, 2009. – P. 15–19.
10. *Chunjiang Zhang.* Electromagnetism-like Mechanism For Fuzzy Flow Shop Scheduling Problems Algorithm // J. of Global Optimization. – 2003. – **25**. – P. 263–282.
11. *Субботин С.А., Олейник А.А.* Сравнительный анализ методов эволюционного поиска // Искусственный интеллект. – 2008. – № 6. – С. 125–129.
12. *Aluffi-Pentini F., Parisi V., Zirilli F.* Global optimization and stochastic differential equations // J. of optimization theory and applications. – 1985. – **47**, Is. 1. – P. 1–16.

13. *Ali M., Storey C.* Application of some stochastic global optimization algorithms to practical problems // Ibid. – 2004. – P. 545–563.
14. *Тихомиров А.С.* О быстрых алгоритмах метода отжига // Вестник Новгородского гос. ун-та. – 2009. – № 9. – С. 111–113.
15. *Kaelo P., Ali M.* Differential evolution algorithms using hybrid mutation // Computational Optimization and Applications. – 2007. – **37**. – P. 231–246.
16. *Huang Z., Wang Ch.* A Robust Archived Differential Evolution Algorithm for Global Optimization Problems // J. of Computers. – 2009. – **4**. – P. 160–167.

Рекомендована Радою
приладобудівного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
27 грудня 2011 року