

УДК 539.3

О.В. Гондляр

УТОЧНЕНИЙ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ КОРИСТУВАЧА ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ В ABAQUS ПРОЦЕСІВ РОЗШАРУВАННЯ БАГАТОШАРОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

Based on relations of the iterative analytical theory, we develop and numerically apply the stratified 8-nodes finite user element (USER IAT FE) in the ABAQUS environment. The final element allows effectively investigating the processes of nonlinear deformation and failure of spatial multilayer design. Finite element models constructed on the basis of the developed stratified 8-nodes finite user element have persistent rates of solutions convergence both for three-dimensional bodies, thin plates and shells. The ratio of the finite element USER IAT 3D to its length in terms of bending can reach up to 1/500 in the study of spatial structures of thin thickness. In case of stretching it can achieve 1/1000. Convergence rates remain stable for multilayer USER IAT 3D FE when stiffness layers characteristics change for six and more magnitude orders. We conclude that using the stratified 8-nodes finite user element doesn't lead to increase in the order of resolved equations systems as compared with the standard 8-nodes finite elements.

Вступ

Практика створення систем автоматизованого проектування та автоматизованих систем наукових досліджень, пов'язаних із числовим аналізом у рамках методу скінченних елементів (МСЕ) напружено-деформованого стану просторових багатошарових конструкцій з композитів, показала доцільність розроблення спеціальних скінченних елементів (СЕ) для розв'язання складних фізично і геометрично нелінійних задач. Це дає можливість ефективно проводити аналіз міцнісних властивостей товстих, середньої товщини і тонких шарів пакета.

У зв'язку з цим сучасні системи математичного забезпечення розрахунків на міцність МСЕ, як правило, комплектуються великими бібліотеками СЕ [1–3]. Відмінність цих елементів полягає не тільки в особливостях вибору математичних моделей деформування (гіпотеза прямої нормалі, прямої лінії, уточнені моделі тощо), але також у специфіці скінченно-елементної дискретизації (трикутні, чотирикутні тощо) і в різних поліноміальних законах для функцій форм (лінійні, квадратичні, кубічні і т.д.) [4, 5].

Тому для розв'язання конкретних прикладних задач використовуються СЕ різних форм і порядків апроксимуючих функцій, причому, у зв'язку з основними положеннями МСЕ, порядок апроксимації вибирається відповідно до порядку невідомих у виразі для функціонала повної енергії системи. Відомо, що застосування СЕ з високим порядком апроксимації дає змогу досягати необхідної точності розв'язання задачі при порівняно рідкій розрахунковій сітці СЕ і в разі лінійного розрахунку напружено-

деформованого стану багатошарових композитних конструкцій такий підхід виявляється доцільним [6].

Однак, як свідчить практика, застосування СЕ з високим порядком апроксимуючих функцій у разі дослідження процесів тріщиноутворення є малоефективним [7]. Пояснюється це тим, що спочатку гладкі функції переміщень і напружень у процесі утворення зон руйнування і розшарування, як правило, стають кусково-безперервними. У зв'язку з цим для числового моделювання процесів тріщиноутворення багато авторів рекомендують використовувати СЕ з полілінійними функціями апроксимації компонент вектора переміщень.

Постановка задачі

Мета роботи – на основі співвідношень ітераційно-аналітичної теорії [8] розробити уточнений восьмивузловий багатошаровий скінченний елемент з уточненим законом апроксимуючих функцій переміщень, який орієнтований на розв'язання задач міцності просторових композитних багатошарових систем.

Уточнений восьмивузловий багатошаровий скінченний елемент

Відобразимо восьмивузловий СЕ на куб, довжини сторін якого дорівнюють двом одиницям довжини, а метрика задана в місцевій системі координат x^i . Початок місцевої системи координат поєднаємо з центром ваги СЕ. При цьому осі x^1 і x^2 направимо вздовж сторін СЕ, а вісь x^3 по нормалі до його поверхні.

Як глобальну виберемо декартову систему координат x^i , в матриці якої формуються параметри навантаження і визначається вектор вузлових переміщень.

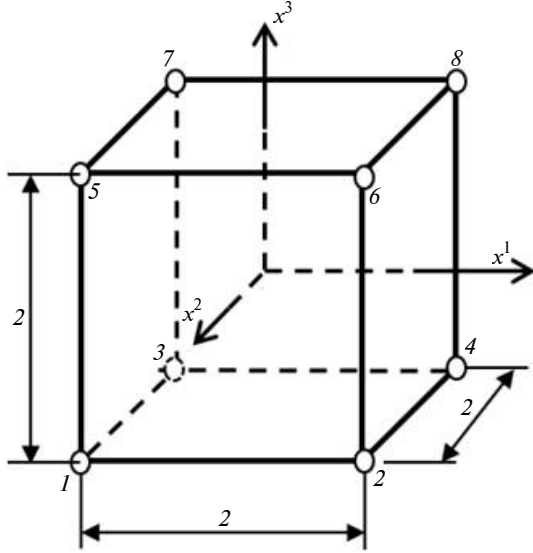


Рис. 1. Місцева система координат восьмивузлового багатошарового СЕ

Апроксимуючу функцію координат у межах СЕ наведемо в стандартному для восьми-вузлового СЕ вигляді:

$$x^{i'} = \frac{1}{4} \sum_{t=1}^8 x^{i'(t)} \prod_{r=1}^3 (1 + P_{r't} x^r), \quad (1)$$

де $x^{i'(t)}$ – декартові координати t -го вузла СЕ,

$$\begin{aligned} \{P_{1t}\}^T &= \{-1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1\}; \\ \{P_{2t}\}^T &= \{-1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1\}; \\ \{P_{3t}\}^T &= \{-1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Як узагальнені невідомі прийемо компоненти вектора переміщень вузлів СЕ $u_i^{(1)}$, $u_i^{(2)}$, $u_i^{(3)}$, ..., $u_i^{(8)}$. У цьому випадку закон розподілу компонент вектора переміщень в обсязі СЕ запишемо у вигляді

$$u_i = \frac{1}{8} \sum_{t=1}^8 u_i^{(t)} \prod_{r=1}^3 (1 + P_{r't} x^r). \quad (3)$$

Складемо сумарну функцію розподілу компонент вектора переміщень по координаті x^3 відповідно до виразу (3) уздовж грані $\alpha\beta$ місцевої системи нумерації вузлів СЕ. Шляхом елементарних перетворень одержимо

$$u_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{8} [(u_i^{(\beta)} + u_i^{(\alpha)}) + (P_{1\beta} u_i^{(\beta)} + P_{1\alpha} u_i^{(\alpha)}) x^1 +$$

$$\begin{aligned} &+ (P_{2\beta} u_i^{(\beta)} + P_{2\alpha} u_i^{(\alpha)}) x^2 + (P_{3\beta} u_i^{(\beta)} + P_{3\alpha} u_i^{(\alpha)}) x^3 + \\ &+ (P_{1\beta} P_{2\beta} u_i^{(\beta)} + P_{1\alpha} P_{2\alpha} u_i^{(\alpha)}) x^1 x^2 + \\ &+ (P_{1\beta} P_{3\beta} u_i^{(\beta)} + P_{1\alpha} P_{3\alpha} u_i^{(\alpha)}) x^1 x^3 + \\ &+ (P_{2\beta} P_{3\beta} u_i^{(\beta)} + P_{2\alpha} P_{3\alpha} u_i^{(\alpha)}) x^2 x^3 + \\ &+ (P_{1\beta} P_{2\beta} P_{3\beta} u_i^{(\beta)} + P_{1\beta} P_{2\alpha} P_{3\alpha} u_i^{(\alpha)}) x^1 x^2 x^3], \end{aligned} \quad (4)$$

де $\alpha = 1 - 4$; $\beta = \alpha + 4$.

Із врахуванням (2), можна побачити, що коефіцієнти при функціональних супроводах, що містять x^3 , визначають узагальнений зсув $\gamma_i^{\beta\alpha} = \frac{(u_i^{(\beta)} - u_i^{(\alpha)})}{2}$ між вузлами α і β , а решта коефіцієнтів визначають узагальнене середнє зміщення $v_i^{\beta\alpha} = \frac{(u_i^{(\beta)} + u_i^{(\alpha)})}{2}$ вузлів α і β . Тому рівняння (4) можна подати у такому вигляді:

$$u_i^{\beta\alpha} = \frac{1}{4} \prod_{r=1}^3 (1 + S_{r\alpha} x^r) (v_i^{\beta\alpha} + x^3 \gamma_i^{\beta\alpha}); \quad (5)$$

де $\alpha = 1 - 4$; $\beta = \alpha + 4$;

$$\begin{aligned} \{S_{1r}\}^T &= \{-1 \ 1 \ -1 \ 1\}; \\ \{S_{2r}\}^T &= \{-1 \ -1 \ 1 \ 1\}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$v_i^{\beta\alpha} = \frac{(u_i^{(\beta)} + u_i^{(\alpha)})}{2} - \quad (7)$$

узагальнене середнє зміщення вузла α відносно вузла β ;

$$\gamma_i^{\beta\alpha} = \frac{(u_i^{(\beta)} - u_i^{(\alpha)})}{2} - \quad (8)$$

узагальнений середній зсув ($i' = 1, 2$) або обтиснення ($i' = 3$) вузла α відносно вузла β .

Вираз (5) відповідає приведенню тривимірних рівнянь механіки деформованого твердого тіла до двовимірних співвідношень теорії оболонок у рамках теорії прямої лінії із врахуванням фактора лінійного обтиснення по товщині пакета шарів. Однак використання (5) не дає можливості аналізувати неоднорідний зсув, який виникає в процесі розшарування шарів пакета. Тому в працях [9, 10] для дослідження процесів розшарування багатошарових оболонок у рамках ітераційно-аналітичної теорії вводяться додаткові узагальнені невідомі $f_i(x^3)$ і

$\theta_i^{(t)}$, які характеризують неоднорідність розподілу деформацій поперечного зсуву й обтиснення по товщині пакета шарів, а саме:

$$u_i = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (v_i^{(t)} + x^3 \gamma_i^{(t)} + f_i(x^3) \theta_i^{(t)}) \prod_{\alpha=1}^2 (1 + S_{\alpha i} x^\alpha), \quad (9)$$

де $\alpha = 1 - 4$; $\beta = \alpha + 4$.

Як показали численні дослідження [10], така апроксимація забезпечує достатню точність розрахунків при дослідженні напружено-деформованого стану багат шарових систем і одночасно є ефективнішою відносно витрат часу ЕОМ порівняно з використанням СЕ з апроксимуючими функціями більш високого порядку.

Практика дослідження напруженого стану багат шарових просторових оболонкових конструкцій засвідчила доцільність використання гіпотези приведення (9) для детального опису виникнення і поширення зон розшарування в багат шарових оболонках.

Нехай компоненти вектора вузлових переміщень $u_i^{(t)}$ відповідають дійсним переміщенням розв'язку тривимірної задачі теорії пружності. В цьому випадку полілінійний закон апроксимації узагальнених невідомих має бути поповнений відповідними компонентами, які враховують неоднорідність розподілу деформацій поперечного зсуву й обтиснення.

Формально представимо компоненти \mathbf{u}_i вектора переміщень у такому вигляді:

$$\mathbf{u}_i = \sum_{s=1}^S F_s^i(x^3, t) v_i^s(x^1, x^2, t), \quad (10)$$

де v_i^s – компоненти узагальненого вектора переміщень поверхні приведення x^1, x^2 СЕ, визначені з розв'язання крайової задачі в рамках тривимірного оператора теорії пружності; F_s^i – функції приведення; t – час.

Для того, щоб вектор \mathbf{u} описував дійсний деформований стан оболонки, необхідне виконання умови стаціонарності повної енергії системи.

Сформулюємо наступну варіаційну задачу: знайти такі функції v_i^s і F_s^i , які забезпечать виконання варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського, а саме:

$$\int_{t_0}^{t_1} (W - K - A) dt = \delta \int_{v_i^s} \int_{t_0}^{t_1} (W - K - A) dt + \delta \int_{F_s^i} \int_{t_0}^{t_1} (W - K - A) dt = 0. \quad (11)$$

Тут позначення типу $\delta_{v_i^s}$ і $\delta_{F_s^i}$ означають, що варіювання функціонала проводиться по v_i^s або F_s^i відповідно.

Враховуючи (10) і умови незалежності варіацій δv_i^s і δF_s^i , на підставі (11) запишемо інтеграл, для отримання системи рівнянь, яка розв'язується:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_V A_j^r \left(v_i^s; \frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha}; \frac{\partial^2 v_i^s}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}; \ddot{v}_i^s; F_s^i; \frac{dF_s^i}{dx^3}; \frac{d^2 F_s^i}{(dx^3)^2}; \ddot{F}_s^i \right) p_j^r \delta v_j^r dV \right\} dt = 0; \quad (12)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_V B_j^r \left(v_i^s; \frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha}; \frac{\partial^2 v_i^s}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}; \ddot{v}_i^s; F_s^i; \frac{dF_s^i}{dx^3}; \frac{d^2 F_s^i}{(dx^3)^2}; \ddot{F}_s^i \right) p_j^r \delta F_j^r dV \right\} dt = 0;$$

з відповідними інтегралами для отримання рівнянь, що описують граничні умови

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_S a_j^r \left(v_i^s; \frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha}; F_s^i; \frac{dF_s^i}{dx^3}; \right) q_j^r \delta v_j^r dS \right\} dt = 0; \quad (13)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_S b_j^r \left(v_i^s; \frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha}; F_s^i; \frac{dF_s^i}{dx^3}; \right) q_j^r \delta F_j^r dS \right\} dt = 0.$$

Помітна особливість виразу (11) від відомих з літературних джерел виразів функціоналів, що використовуються для побудови математичних моделей деформування просторових конструкцій, полягає в тому, що розв'язок системи рівнянь, отриманих на основі (12), забезпечує визначення не тільки вектора узагальнених невідомих v_i^s , але також і визначення фізично обґрунтованих функцій приведення F_s^i , незалежно від фізичних процесів, що протікають у матеріалі конструкції в будь-який момент часу, таких як пластичне деформування або руйнування шарів.

Розв'язання системи рівнянь (12) прямими методами може виявитися складним. У той самий час використання ітераційних методів, які

полягають у послідовному уточненні компонент v_i^s або функцій F_s^i , виходячи з умові мінімізації вектора нев'язки тривимірного оператора теорії пружності (11), дає змогу істотно спростити отримання шуканого рішення [10].

За аналогією з (9), введемо додаткову апроксимацію компонент вектора переміщень вздовж координати x^3 як для однорідного, так і для багатошарового восьмивузлового СЕ.

Унаслідок елементарних перетворень можна побачити, що ці додаткові функції мають бути пропорційні узагальненому середньому зсуву $\gamma_i^{\beta\alpha} = (u_i^{(\beta)} - u_i^{(\alpha)})$; ($i = 1, 2$) або $\gamma_3^{\beta\alpha} = (u_3^{(\beta)} - u_3^{(\alpha)})$ обтисненню між вузлами α і β СЕ. Геометричну інтерпретацію апроксимуючих функцій між вузлами 4 і 8 уточненого восьмивузлового однорідного та багатошарового скінченного елемента в разі суцільного контакту між шарами наведено на рис. 2 і 3.

На рис. 4 наведено вид апроксимуючих функцій при порушенні умов суцільного контакту між шарами в разі розшарування із врахуванням тертя або відриву.

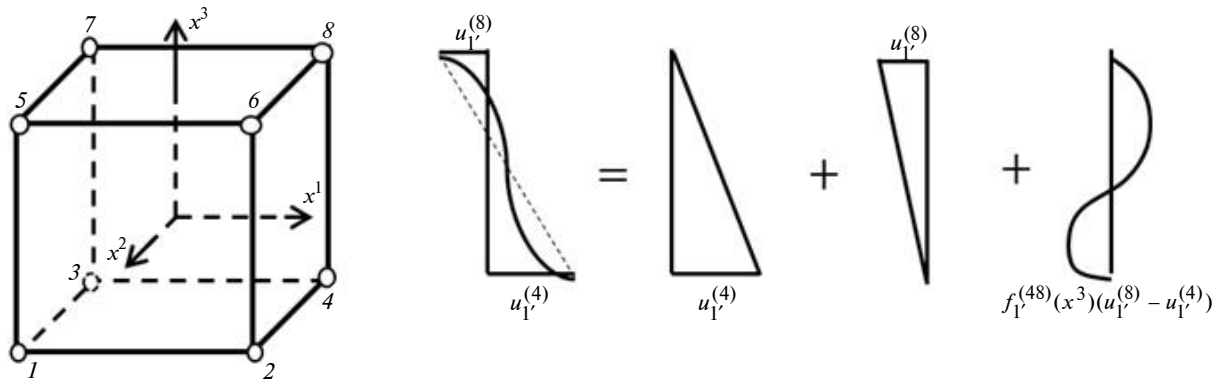


Рис. 2. Апроксимація компонент вектора переміщень однорідного по товщині уточненого восьмивузлового СЕ

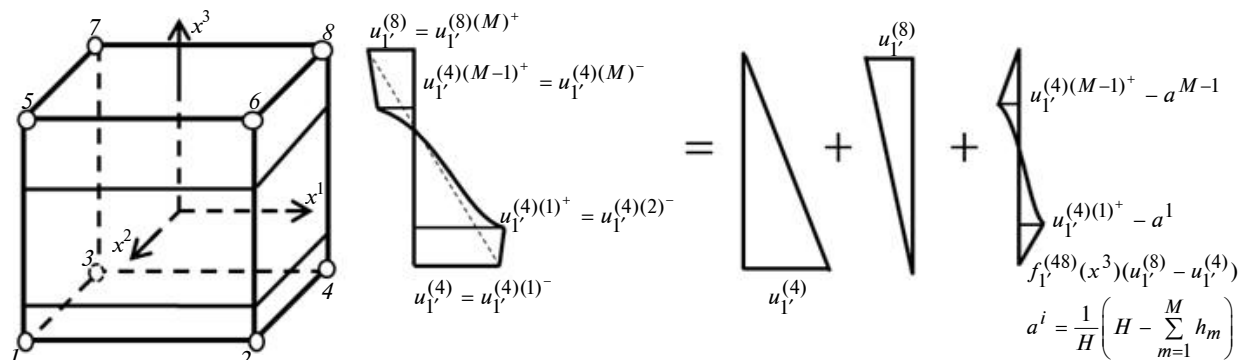


Рис. 3. Апроксимація компонент вектора переміщень багатошарового уточненого восьмивузлового СЕ; h_m – товщина m -го шару; H – загальна товщина пакета шарів

Таким чином, апроксимацію компонент вектора переміщень у межах уточненого кінцевого елемента запишемо у вигляді

$$u_i = \frac{1}{8} \sum_{t=1}^8 u_i^{(t)} \prod_{r=1}^3 (1 + P_{rt} x^r) + \frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 a_i^{(s)} f_i^{(s)}(x^3) (u_i^{(s+4)} - u_i^{(s)}) \prod_{\alpha=1}^2 (1 + S_{\alpha s} x^\alpha). \quad (20)$$

При визначенні напружено-деформованого стану просторових систем у рамках ітераційно-аналітичної теорії на ітерації n , вираз (20) набуде такого вигляду:

$$u_i^{(n)} = \frac{1}{8} \sum_{t=1}^8 u_i^{(t)(n)} \prod_{r=1}^3 (1 + P_{rt} x^r) + \frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 a_i^{(s)} f_i^{(s)(n-1)}(x^3, u_i^{(s)(n-1)}) (u_i^{(s+4)(n)} - u_i^{(s)(n)}) \times \prod_{\alpha=1}^2 (1 + S_{\alpha s} x^\alpha); f_i^{(s)(0)} = 0. \quad (21)$$

При визначенні напружено-деформованого стану багатошарових просторових систем у рамках ітераційно-аналітичної теорії на ітерації

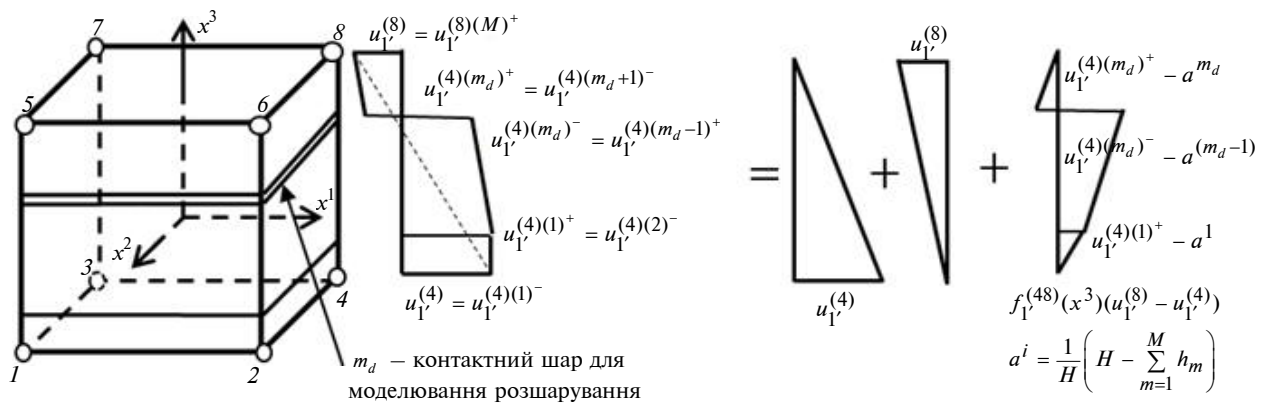


Рис. 4. Апроксимація компонент вектора переміщень багат шарового уточненого восьмивузлового СЕ в разі розшарування з урахуванням тертя; h_m – товщина m -го шару; H – загальна товщина пакета шарів

n , вираз (21) набуде вигляду

$$u_i^{(n)} = \frac{1}{8} \sum_{t=1}^8 u_i^{(t)(n)} \prod_{r=1}^3 (1 + P_{rt} x^r) + \frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 a_i^{(s)} f_i^{(s)(n-1)}(x^3, u_i^{(s)(n-1)}, u_i^{(s)(n-1)(m\pm)}) \times (u_i^{(s+4)(n)} - u_i^{(s)(n)}) \prod_{\alpha=1}^2 (1 + S_{\alpha s} x^\alpha); f_i^{(s)(0)} = 0, \quad (22)$$

де $u_i^{(t)(n)}$ – компоненти вектора переміщень вузла t у напрямку i' на ітерації n ; $u_i^{(s)(n-1)(m\pm)}$ – компоненти вектора переміщень у напрямку i' , визначені на верхній (+) і нижній (-) поверхнях шару m , грані s на ітерації $(n-1)$; $f_i^{(s)(n-1)}$ – функції приведення, які характеризують ступінь неоднорідності розподілу деформацій поперечного зсуву по товщині пакета шарів грані s СЕ в напрямку i' на ітерації $(n-1)$; $a_i^{(s)}$ – коефіцієнти штрафу, рівні нулю для тих граней, які є спільними з гранями сусідніх стандартних восьмивузлових СЕ (для забезпечення умов спільності по переміщенням) та рівні одиниці в усіх інших випадках; $P_{rt}, S_{\alpha s}$ – визначаються на підставі (2) та (6) відповідно.

Слід зазначити, що для поліпшення умови лінійної незалежності функцій розкладання, після отримання функцій $f_i^{(s)(n-1)}$ на підставі розв'язку рівнянь (17), з них слід відняти постійну та лінійну складові частини, оскільки ці компоненти функції входять у перший доданок рівнянь (20)–(22). При цьому значення функцій $f_i^{(s)(n-1)}(x^3, u_i^{(s)(n-1)}, u_i^{(s)(n-1)(m\pm)})$ на лицьових

поверхнях по осі x^3 СЕ будуть дорівнювати нулю, що відповідає виду апроксимації, наведеному на рис. 2–4.

Легко помітити всі переваги подання компонент вектора переміщень у формі (20)–(22).

По-перше, за умови, що $f_i^{(s)(n-1)} = 0$, приходимо до стандартного восьмивузлового СЕ.

По-друге, завдяки введенню додаткових функцій $f_i^{(s)(n-1)}(x^3, u_i^{(s)(n-1)}, u_i^{(s)(n-1)(m\pm)})$

з'являється можливість дослідження факторів неоднорідності деформацій поперечного зсуву, що залежать не тільки від співвідношень характеристик жорсткості, але також і від компонент напружено-деформованого стану пакета шарів.

По-третє, залежність виду функцій $f_i^{(s)(n-1)}(x^3, u_i^{(s)(n-1)}, u_i^{(s)(n-1)(m\pm)})$ від компонент напружено-деформованого стану СЕ дає змогу природним чином фізично обґрунтовано змінювати кінематичні та статичні умови контакту між шарами в процесі покровокового навантаження конструкції, що дає можливість природного моделювання процесу накопичення пошкоджень, розвитку зон пластичності в шарах і зон розшарування композитів.

По-четверте, порядок розв'язуваної системи рівнянь не залежить від кількості шарів у пакеті.

По-п'яте, при використанні стандартного подання апроксимуючих функцій у формі степених рядів $\varphi_1^s = 1 - (x^1)^2, \varphi_2^s = 1 - (x^2)^2$ або $\varphi_3^s = 1 - (x^3)^2$ при $f_i^s(x^3) = 1$, приходимо до відомих схем несумісних (incompatible displacement) СЕ.

Побудова матриці жорсткості уточненого восьмивузлового СЕ виконується відповідно до загальної процедури моментної схеми скінченних елементів (МССЕ), розробленої професором О.С. Сахаровим [11].

Для отримання коефіцієнтів матриці жорсткості використовуємо основну процедуру МССЕ, описану в [5], за якою компоненти тензора деформацій розкладаються в ряд Маклорена і в розкладах утримуються лише ті члени, функціональні супроводи при яких присутні в (20)–(22).

Використовуючи варіаційний принцип (11) і наслідуючи традиційну для МССЕ процедуру, отримуємо вирази для варіацій енергії деформацій і кінетичної енергії СЕ:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{CE}} &= \sum_{r=1}^8 \sum_{t=1}^8 [g_{rt}^{t'p'} + \tilde{g}_{rt}^{t'p'}] u_t^{(r)} \delta u_p^{(t)} = \\ &= \sum_{r=1}^8 \sum_{t=1}^8 [G_{rt}^{t'p'}] u_t^{(r)} \delta u_p^{(t)}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \delta K_{\text{CE}} &= \sum_{r=1}^8 \sum_{t=1}^8 [m_{rt}^{t'p'} + \tilde{m}_{rt}^{t'p'}] \dot{u}_t^{(r)} \delta u_p^{(t)} = \\ &= \sum_{r=1}^8 \sum_{t=1}^8 [M_{rt}^{t'p'}] \dot{u}_t^{(r)} \delta u_p^{(t)}; \end{aligned} \quad (24)$$

де $g_{rt}^{t'p'}$ – коефіцієнти матриці жорсткості СЕ з полілінійним законом розподілу функцій переміщень із врахуванням МССЕ; $\tilde{g}_{rt}^{t'p'}$ – додаткові коефіцієнти матриці жорсткості уточненого СЕ, що враховують вплив неоднорідності розподілу деформацій поперечного зсуву й обтиснення; $m_{rt}^{t'p'}$ – коефіцієнти матриці мас СЕ з полілінійним законом розподілу функцій переміщень, що враховують інерцію від поступального руху СЕ й інерцію СЕ від узагальненого зсуву; $\tilde{m}_{rt}^{t'p'}$ – коефіцієнти матриці мас СЕ, що враховують інерцію, викликану неоднорідністю деформацій поперечного зсуву й обтиснення; $G_{rt}^{t'p'}$ – коефіцієнти матриці жорсткості уточненого СЕ; $M_{rt}^{t'p'}$ – коефіцієнти матриці мас уточненого СЕ.

Цей СЕ був розроблений у системі Автоматизації розрахунків на міцність оболонкових і комбінованих систем (АПРОКС). Практика використання цього СЕ при розв'язанні великої кількості тестових і прикладних задач засвід-

чила його ефективність при дослідженні процесів нелінійного деформування і руйнування однорідних по товщині і багатошарових просторових конструкцій.

Нині на основі наведених вище співвідношень у середовищі ABAQUS розроблено скінченний елемент користувача USER IAT 3D.

Апробація розробленого скінченного елемента шляхом вирішення контрольно-тестових задач. Тест С.П. Тимошенка

Дослідження збіжності рішень залежно від густоти сіткової області виконано на прикладі визначення прогину плити С.П. Тимошенка. Плита жорстко затиснена по контуру і навантажена рівномірно розподіленим тиском інтенсивністю q , що діє по нормалі до її середньої поверхні. Прогин у центрі плити при $A = 100$; $B = 100$; $t = 1$; $\nu = 0,3$; $E = 12(1-\nu^2)$; $q = \frac{8}{1,266 \cdot 10^5}$, відповідний аналітичному рішенню, дорівнює 8.

Незалежно виконано дослідження деформування плити Тимошенка з використанням усіх восьмивузлових скінченних елементів бібліотеки ABAQUS (C3D8, C3D8R, C3D8I та їх комбінацій). Результати досліджень наведено в таблиці. Аналіз результатів виявив повну відповідність розв'язків, отриманих у рамках тривимірного СЕ системи АПРОКС і USER IAT 3D в середовищі ABAQUS.

На рис. 5 наведено графік збіжності розв'язків залежно від густоти сіткової області СЕ. Аналіз результатів засвідчив, що при використанні розробленого USER_IAT_3D елемента при сітці СЕ 5×5 відмінність числових результатів від аналітичного розв'язку становить менше ніж 3%. У той самий час при використанні елемента C3D8I з бібліотеки ABAQUS для досягнення аналогічного результату необхідна сітка 21×21.

При дослідженні деформованого стану цієї плити із застосуванням елементів типу C3D8 і C3D8R збіжність результатів до аналітичного розв'язку не спостерігається.

На прикладі цього ж завдання досліджено процес виникнення числової нестійкості розв'язків залежно від відношення довжини СЕ до товщини плити (L_{CE}/t). За еталонні розв'язки прийняті переміщення, отримані на основі оболонкових елементів. Аналіз результа-

Таблиця. Збіжність прогину центральної точки плити залежно від густоти сітки скінченних елементів

Mesh	APROKS IAT 3D	USER IAT 3D	C3D8	C3D8R	C3D8I
5x5	7,806	7,806477	0,0534662	0,0255285	0,64936
7x7	7,906	7,90629	0,113591	0,10562	2,50277
9x9	7,95	7,950351	0,1964649	0,407629	4,755354
11x11	7,971	7,971285	0,3017026	0,917783	6,264766
15x15	7,99	7,989514	0,575897	3,605869	7,466726
21x21	7,999	7,99954	1,1297	14,33196	7,86921
25x25	8,002	8,00258	1,55784234	28,289815	7,939835
51x51	8,008	8,0073519	5,223919	295,4974	8,0043497
101x101	8,009	8,0086565	10,905854	723,46875	8,0085545

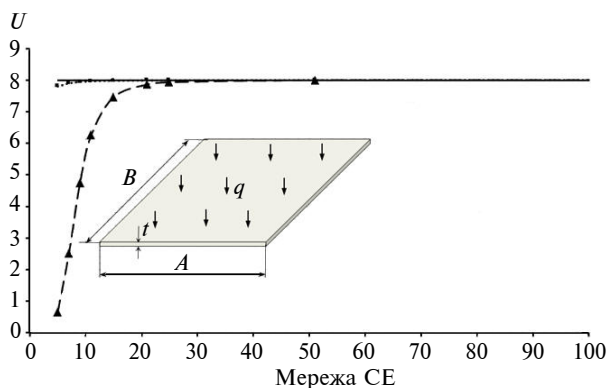


Рис. 5. Плита Тимошенка С.П. Збіжність прогину центральної точки плити залежно від густоти сітки скінченних елементів ($U_{теор} = 8$); – APROKS 3D; —■— USER IAT 3D; —▲— C3D8I ABAQUS

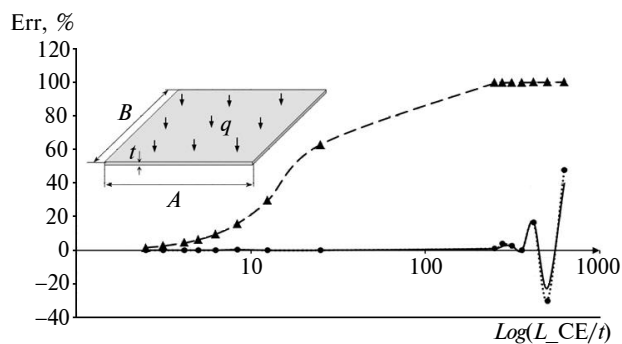


Рис. 6. Плита Тимошенка С.П. Накопичення похибки переміщень залежно від відношення довжини CE до товщини плити (L_{CE}/t). За еталонні рішення прийняті переміщення, отримані на основі оболонкових CE; – APROKS 3D; —■— USER IAT 3D; —▲— C3D8I ABAQUS

тів досліджень, наведених на рис. 6, свідчить про те, що для елемента ABAQUS C3D8I похибка розв'язку становить більше 10% вже при $L_{CE}/t = 7$. Тоді як при використанні розробленого USER IAT 3D елемента похибка більше ніж у 10% досягається при відношенні довжини елемента до його товщини більше ніж у 500 разів ($L_{CE}/t > 500$).

Циліндр із жорсткими діафрагмами під дією двох зосереджених сил

Аналогічні дослідження проведені на прикладі розв'язання задачі про дослідження деформування циліндра із жорсткими торцевими діафрагмами під дією двох зосереджених сил, прикладених у центрі прольоту. З урахуванням усіх площин симетрії як розрахункову схему вибрано 1/8 частину циліндра (рис. 7).

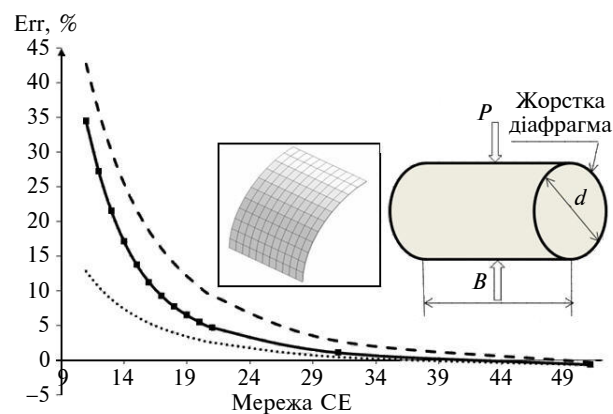


Рис. 7. Збіжність рішення залежності від розмірів сіткової області сектора циліндра з урахуванням усіх площин симетрії ($U_{теор} = 1,825 \cdot 10^{-4}$ см); —■— USER IAT 3D; —■— C3D8I ABAQUS; – S4R ABAQUS

Геометричні параметри циліндра: товщина – $h = 0,3$ см, діаметр – $d = 60$ см, довжина – $B = 60$ см.

Фізико-механічні характеристики: $E = 3,0 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$. Теоретичний розв'язок цієї задачі, відповідний прогину циліндра в точці прикладання зосередженої сили ($P = 1$ N), дорівнює $U_{теор} = 1,825 \cdot 10^{-4}$ см.

Деформування циліндра моделювалося на основі розробленого USER IAT 3D елемента та елементів C3D8I і S4R з бібліотеки ABAQUS.

На рис. 7 наведено результати збіжності рішень по прогину циліндра в точці прикладання зосередженої сили залежно від параметра щільності сіткової області.

Аналіз результатів свідчить, що для досягнення відхилення числового розв'язку від теоретичного для цієї задачі менше ніж на 5%, необхідно 21×21 елементів USER IAT 3D, 27×27 елементів C3D8I і 17×17 елементів S4R.

Апробація можливості моделювання розширення на основі уточненого восьмивузлового скінченного елемента USER IAT 3D

Можливість моделювання процесу розширення багатошарових конструкцій на базі розробленого уточненого USER IAT 3D елемента розглянута на прикладі модельної задачі про дослідження деформування тришарової вільно опертої балки з тонким середнім шаром.

Геометричні параметри балки: довжина – $L = 20$; загальна висота – $H = 1$; ширина – $B = 1$; товщина нижнього шару – $t_1 = 0,499$; товщина середнього шару – $t_2 = 0,002$; товщина верхнього шару – $t_3 = 0,499$;

Фізико-механічні характеристики верхнього та нижнього шарів: модулі пружності $E_1 = E_3 = 1,0 \cdot 10^6$; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0$.

Модуль пружності середнього шару варіювався в діапазоні: $E_2 = 1,0 \cdot 10^6 - 1,0 \cdot 10^{-4}$; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0$.

Балка навантажена зосередженою силою $P = 1$, яка прикладена всередині прольоту балки.

Для оцінки достовірності результатів, отриманих на основі розробленого уточненого USER IAT 3D елемента, паралельно було проведено серію чисельних експериментів з розрахунку цієї конструкції на підставі тривимірних SE в рамках системи АПРОКС.

Незалежно виконано розрахунки балки на базі використання багатошарового оболонкового SE ABAQUS Multilayer S4R і тривимірного багатошарового елемента ABAQUS Multilayer C3D8I.

На рис. 8 наведено результати досліджень, які відображають залежність зміни прогину центральної точки балки залежно від рівня модуля пружності середнього шару.

У результаті розрахунків встановлено, що при зміні жорсткості середнього шару на два порядки відносно жорсткості зовнішніх шарів, визначення напружено-деформованого стану подібних конструкцій необхідно проводити із

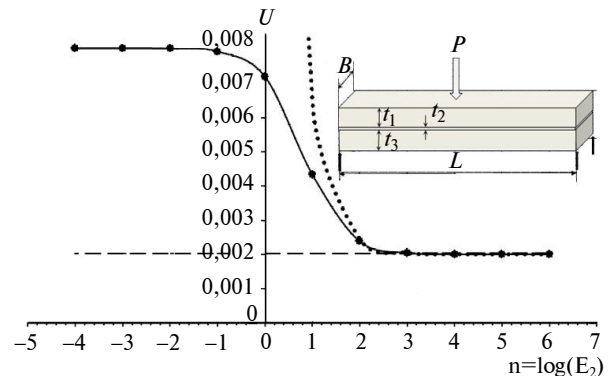


Рис. 8. Зміна прогину в центрі вільно опертої балки залежно від рівня модуля пружності середнього тонкого шару; —◆— 3D APROKS; —■— USER IAT; – Shell Multilayer ABAQUS S4R; — — 3D Multilayers ABAQUS C3D8I

врахуванням фактора неоднорідного розподілу деформацій поперечного зсуву по товщині пакета шарів.

При зміні жорсткості середнього шару на шість порядків і більше зовнішні шари починають працювати незалежно один від одного. Дані розрахунку напружено-деформованого стану балки, отримані за пропонуванням уточненим USER IAT 3D елементом, повністю узгоджуються з результатами тривимірного і теоретичного розрахунків, в той час як застосування багатошарових оболонкових і тривимірних елементів з бібліотеки ABAQUS відображають правильну схему деформування балки тільки в діапазоні малих значень параметра неоднорідності деформацій поперечного зсуву.

Аналогічні результати отримані при дослідженні процесу деформування тришарової балки з товстим середнім шаром ($L = 20$; $H = 1$; $B = 1$; $t_1 = 0,1$; $t_2 = 0,8$; $t_3 = 0,1$) (рис. 9).

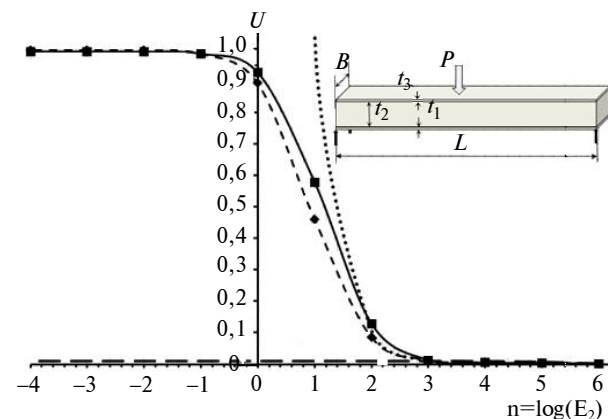


Рис. 9. Зміна прогину в центрі вільно опертої балки залежно від рівня модуля пружності середнього шару кінцевої товщини; -◆- 3D APROKS; —■— 3D Multilayers USER IAT; —●— Multilayers ABAQUS S4R

Висновки

Таким чином, аналіз розв'язку тестових задач дає можливість зробити висновок про те, що скінченноелементні моделі, побудовані на базі розробленого уточненого восьмивузлового багат шарового USER IAT 3D, мають стійкі показники збіжності рішень щодо визначення компонент напружено-деформованого стану як тривимірних тіл, так і тонких плит та оболонки.

Під час дослідження тонких просторових конструкцій (плити й оболонки) відношення товщини скінченного елемента USER IAT 3D до його довжини в плані при згині може досягати 1/500, а в разі розтягнення – 1/1000.

Для багат шарового USER IAT 3D SE стійкі показники збіжності зберігаються при зміні характеристик жорсткості шарів на 6 по-

рядків і більше, що свідчить про можливість моделювання на його основі процесів розширення.

Використання багат шарового USER IAT 3D SE не призводить до підвищення порядку систем рівнянь, що розв'язуються, порівняно з використанням стандартних восьмивузлових SE.

Внутрішня ітераційна процедура з визначення компонент функцій неоднорідності деформацій поперечного зсуву й обтиснення в цьому випадку є тією необхідністю, завдяки якій з'являється можливість послідовного уточнення розв'язку.

Надалі планується розроблення геометрично нелінійних алгоритмів розрахунку багат шарових конструкцій на базі запропонованого уточненого скінченного елемента в середовищі програмного комплексу ABAQUS.

1. ADINA R&D, Inc. ADINA Theory and Modeling Guide: ARD 08-7, February 2008.
2. Dassault Systèmes. ABAQUS Theory Manual (v6.7) 2007.
3. H.D. Hibbitt, B.I. Karlsson and Sorenson Inc., "ABAQUS/Explicit User's Manual, Version 6.4", 2003.
4. O. Zienkiewicz, R. Taylor, The finite element method. Vol. 2: Solid mechanics. Fifth ed. Butterworth-Heinemann: Oxford, 2000.
5. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – К.: Вища шк., 1982. – 480 с.
6. R.L. Taylor, P.J. Beresford, E.L. Wilson, "A Non-Conforming Element for Stress Analysis", Int. Journal for Numerical Methods in Eng., vol. 10, pp. 1211–1219, 1976.
7. E.L. Wilson, R.L. Taylor, W.P. Doherty, J. Ghaboussi, Incompatible Displacement Models. In Numerical and Computer Method in Structural Mechanics, S.J. Fenves, Ed. New York: Academic Press, 1973.
8. Гондляр А.В. Уточненная модель деформирования многослойных конструкций для исследования процессов прогрессирующего разрушения // Вост.-Европ. журн. передовых технологий. – 2012. – № 2/7 (56). – С. 52–57.
9. Гондляр А.В. Итерационно-аналитическая теория деформирования многослойных оболочек // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник. – 1988. – № 53. – С. 33–37.
10. Баженов В.А., Сахаров А.С., Гондляр А.В., Мельников С.Л. Нелинейные задачи механики многослойных оболочек. – К.: НД Будмеханіки, 1994. – 264 с.
11. Сахаров А.С. Модификация метода Ритца для расчета массивных тел на основе полиномиальных разложений с учетом жестких смещений // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник. – 1974. – № 23. – С. 47–52.

Рекомендована Радою
інженерно-хімічного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
30 квітня 2012 року