УДК 517.977.55

М.М. Копець

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ СИНГУЛЯРНОЮ ЛІНІЙНОЮ СИСТЕМОЮ ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

In this paper the linear quadratic optimal control problem is considered by singular linear system with lumped parameters. Using the transformation of similarity of singular matrix, the initial system is presented in the form of two subsystems. The Lagrange multiplier method is applied to the transformed system. Relying on this approach we obtain new forms of Euler–Lagrange equations. Furthermore, sufficient conditions are established. By fulfilling these conditions, the optimal control can be unified. Also, we propose the derivation of matrix differential Riccati equations for the above mentioned subsystems. We prove the symmetric property of matrix–valued solutions of Riccati equations. By solving these equations, we obtain the formula for calculating the minimal value of optimality criteria.

Вступ

Систематичне дослідження систем диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно старших похідних, почалось у вісімдесятих роках минулого століття і надалі досить інтенсивно розвивається [1–6]. Значне зростання популярності цих систем можна пояснити, з одного боку, їх широким застосуванням для моделювання чималого числа практичних задач у техніці, економіці, а з другого боку, тією обставиною, що таким системам властиві певні особливості порівняно із системами звичайних диференціальних рівнянь. Такі системи називають по-різному: алгебро-диференціальні системи; вироджені системи; диференціально-алгебричні системи; системи, не розв'язані відносно старших похідних; дескрипторні системи; сингулярні системи; системи з виродженням. Однак незалежно від назви всіх їх об'єднує одна спільна риса: матриця при старших похідних є особливою (виродженою). Для дослідження сингулярних систем як основний інструмент зазвичай використовується обернена матриця Дразіна. Поряд із перевагами подібного підходу необхідно відзначити і певні недоліки. По-перше, формула для запису розв'язку такої системи лінійних диференціальних рівнянь з допомогою матриці Дразіна є досить громіздкою. По-друге, для застосування цієї формули керування повинні мати неперервні похідні досить високих порядків, тоді як у практичних задачах керування, як правило, належать до класу кусково-неперервних функцій. Мета даної статті полягає у застосуванні подання виродженої матриці в канонічній формі для аналізу сингулярної системи лінійних диференціальних рівнянь. Це дало змогу вперше отримати рівняння Ейлера–Лагранжа і матричні диференціальні рівняння Ріккаті для розглядуваної задачі оптимального керування.

Постановка задачі

Розглядається керований об'єкт, поведінка якого описується такою системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),\ \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0,\ t_0 \le t \le T, \quad (1)$$

де $\mathbf{A}$ і $\mathbf{C}$ – задані квадратні матриці розміру $n \times n$, $\mathbf{B}$ – задана прямокутна матриця розміру $n \times m$, причому елементи всіх цих трьох матриць – дійсні числа і $\det \mathbf{C} = 0$, тобто матриця $\mathbf{C}$ – вироджена. Для кожного значення $t \in [t_0, T]$ $\mathbf{z}(t)$ є n-вимірним вектором, який називається *станом системи* (1), $\mathbf{u}(t)$ – m-вимірний вектор, що називається *керуванням*. Як правило, керування належать до класу кусково-неперервних функцій відносно змінної t. Дійсні числа $t_0 \ge 0$ і $T > t_0$ та вектор $\mathbf{z}_0$ задані. Вважаємо, що розв'язок задачі Коші (1) існує.

***Означення* 1**. Для двох прямокутних матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{C}$ однакових розмірів $n \times m$ і деякого числового параметра λ матриця $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{C}$ називається в'язкою матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{C}$ [4, с. 13].

***Означення* 2**. Для двох заданих квадратних матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{C}$ їх в'язка $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{C}$ називається *регулярною*, якщо існує таке число λ_0, що матриця $\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{C}$ є невиродженою, тобто $\det(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{C}) \ne 0$ [7, с. 6, 7].

Теорема 1. В'язка $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{C}$ є регулярною тоді і тільки тоді, коли існують такі дві невироджені матриці $\mathbf{P}$ і $\mathbf{Q}$, що мають місце рівності

$$\mathbf{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_{n_2} \end{bmatrix}, \ \mathbf{PCQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{N} \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

де $\mathbf{A}_1$ — матриця розміру $n_1 \times n_1$, $\mathbf{I}_{n_1}$ і $\mathbf{I}_{n_2}$ — одиничні матриці розмірів $n_1 \times n_1$ і $n_2 \times n_2$ відповідно, $\mathbf{N}$ — нільпотентна матриця розміру $n_2 \times n_2$, $\mathbf{0}_1$ і $\mathbf{0}_2$ — прямокутні матриці розмірів $n_1 \times n_2$ і $n_2 \times n_1$ відповідно, причому всі елементи обох цих матриць рівні нулю, $n = n_1 + n_2$, де, взагалі кажучи, $n_1 \neq n_2$. Доведення теореми 1 можна знайти в [7, с. 7]. Крім того, також справедливе таке подання:

$$\mathbf{PB} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix},$$

де прямокутні матриці $\mathbf{B}_1$ і $\mathbf{B}_2$ відповідно мають розміри $n_1 \times m$ і $n_2 \times m$. Якщо припустити, що в'язка $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{C}$ є регулярною, та розглянути подання $\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \end{bmatrix}$, то систему (1) можна переписати так:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_1(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_1(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1(t), \ \mathbf{z}_1(t_0) = \mathbf{z}_{10}, \\ \mathbf{N} \dot{\mathbf{z}}_2(t) = \mathbf{z}_2(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2(t), \ \mathbf{z}_2(t_0) = \mathbf{z}_{20}, \end{cases} \quad t_0 \le t \le T. \ (3)$$

Далі розглянемо функціонал

$$I(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2}[\mathbf{z}_1^*(T)\mathbf{M}_1 \mathbf{z}_1(T) \ + (T)\mathbf{z}_2^*(T)\mathbf{M}_2 \mathbf{z}_2(T)] +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} [\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{F}_1 \mathbf{z}_1(t) + \mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{F}_2 \mathbf{z}_2(t) +$$
$$+ \mathbf{u}_1^*(t)\mathbf{G}_1 \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2^*(t)\mathbf{G}_2 \mathbf{u}_2(t)]dt, \qquad (4)$$

де $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ — задані сталі квадратні симетричні невід'ємно визначені матриці, $\mathbf{G}_1$ і $\mathbf{G}_2$ — задані сталі квадратні додатно визначені матриці відповідних розмірів (це означає, що існують обернені матриці $\mathbf{G}_1^{-1}$ і $\mathbf{G}_2^{-1}$). Символом $\mathbf{x}^*\mathbf{y}$ позначено скалярний добуток векторів $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$, тобто $\mathbf{x}^*\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. *Задача оптимального керування* системою (3) полягає у знаходженні таких керувань $\mathbf{u}_1(t)$ і $\mathbf{u}_2(t)$, на яких функціонал (4) із врахуванням співвідношень (3) набуває мінімального значення. Такі керування називаються *оптимальними*.

Виведення рівнянь Ейлера—Лагранжа

Основними методами, що використовуються для відшукання розв'язків задач оптимального керування, є *принцип максимуму Л.С. Понтрягіна* і *метод динамічного програмування Р. Беллмана*. Для застосування обох цих методів потрібно, щоб система (1) (або еквівалентна їй система (3)) була розв'язана відносно похідних. В нашому випадку такої можливості немає, тому обидва ці методи використати неможливо. Однак можна застосувати *метод множників Лагранжа*. Суть методу в тому, що функціонал (4) замінюється на функціонал

$$J(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2}[\mathbf{z}_1^*(T)\mathbf{M}_1 \mathbf{z}_1(T) + \mathbf{z}_2^*(T)\mathbf{M}_2 \mathbf{z}_2(T)] +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} [\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{F}_1 \mathbf{z}_1(t) + \mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{F}_2 \mathbf{z}_2(t) + \mathbf{u}_1^*(t)\mathbf{G}_1 \mathbf{u}_1(t) +$$
$$+ \mathbf{u}_2^*(t)\mathbf{G}_2 \mathbf{u}_2 v]dt + \int_{t_0}^{T} [\mathbf{p}_1^*(t)[\mathbf{A}_1 \mathbf{z}_1(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1(t) -$$
$$- \dot{\mathbf{z}}_1(t)] + \mathbf{p}_2^*(t)[\mathbf{z}_2(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2(t) - \mathbf{N}\dot{\mathbf{z}}_2(t)]]dt, \qquad (5)$$

де $\mathbf{p}_1(t)$ і $\mathbf{p}_2(t)$ — невідомі поки що векторнозначні функції, які називаються *множниками Лагранжа*. Оскільки при виконанні співвідношень (3) значення функціоналів (4) і (5) збігаються, то в такий спосіб задача знаходження умовного мінімуму функціонала (4) зводиться до задачі безумовної мінімізації функціонала (5). Тепер знайдемо приріст ΔJ функціонала (5) за формулою

$$\Delta J = J(\mathbf{z} + \varepsilon\delta\mathbf{z}, \mathbf{u} + \varepsilon\delta\mathbf{u}) - J(\mathbf{z}, \mathbf{u}). \qquad (6)$$

Легко переконуємось, що в розгорнутому вигляді рівність (6) має вигляд

$$\Delta J = \varepsilon\left\{\frac{1}{2}[\mathbf{z}_1^*(T)\mathbf{M}_1 \delta\mathbf{z}_1(T) + \delta\mathbf{z}_1^*(T)\mathbf{M}_1 \mathbf{z}_1(T) +\right.$$
$$+ \mathbf{z}_2^*(T)\mathbf{M}_2 \delta\mathbf{z}_2(T) + \delta\mathbf{z}_2^*(T)\mathbf{M}_2 \mathbf{z}_2(T)] +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} [\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{F}_1 \delta\mathbf{z}_1(t) + \delta\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{F}_1 \mathbf{z}_1(t) + \mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{F}_2 \delta\mathbf{z}_2(t) +$$
$$+ \delta\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{F}_2 \mathbf{z}_2(t) + \mathbf{u}_1^*(t)\mathbf{G}_1 \delta\mathbf{u}_1(t) + \delta\mathbf{u}_1^*(t)\mathbf{G}_1 \mathbf{u}_1(t) +$$
$$+ \mathbf{u}_2^*(t)\mathbf{G}_2 \delta\mathbf{u}_2(t) + \delta\mathbf{u}_2^*(t)\mathbf{G}_2 \mathbf{u}_2(t)]dt +$$

$$+\int_{t_0}^{T}[\mathbf{p}_1^*(t)[\mathbf{A}_1\delta\mathbf{z}_1(t)+\mathbf{B}_1\delta\mathbf{u}_1(t)-\delta\dot{\mathbf{z}}_1(t)]+\mathbf{p}_2^*(t)[\delta\mathbf{z}_2(t)+$$

$$+\mathbf{B}_2\delta\mathbf{u}_2(t)-\mathbf{N}\delta\dot{\mathbf{z}}_2(t)]+\delta\mathbf{p}_1^*(t)[\mathbf{A}_1\mathbf{z}_1(t)+\mathbf{B}_1\mathbf{u}_1(t)-$$

$$-\dot{\mathbf{z}}_1(t)]+\delta\mathbf{p}_2^*(t)[\mathbf{z}_2(t)+\mathbf{B}_2\mathbf{u}_2(t)-\mathbf{N}\dot{\mathbf{z}}_2(t)]]dt\}+$$

$$+\varepsilon^2\left\{\frac{1}{2}[\delta\mathbf{z}_1^*(T)\mathbf{M}_1\delta\mathbf{z}_1(T)+\delta\mathbf{z}_2^*(T)\mathbf{M}_2\delta\mathbf{z}_2(T)]+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[\delta\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{F}_1\delta\mathbf{z}_1(t)+\delta\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{F}_2\delta\mathbf{z}_2(t)+$$

$$+\delta\mathbf{u}_1^*(t)\mathbf{G}_1\delta\mathbf{u}_1(t)+\delta\mathbf{u}_2^*(t)\mathbf{G}_2\delta\mathbf{u}_2(t)]\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{T}[\delta\mathbf{p}_1^*(t)\mathbf{A}_1\delta\mathbf{z}_1(t)+\mathbf{B}_1\delta\mathbf{u}_1(t)-\delta\dot{\mathbf{z}}_1(t)]+$$

$$\left.+\delta\mathbf{p}_2^*(t)[\delta\mathbf{z}_2(t)+\mathbf{B}_2\delta\mathbf{u}_2(t)-\mathbf{N}\delta\dot{\mathbf{z}}_2(t)]]dt\right\}. \qquad (7)$$

Очевидно, що справедливі такі співвідношення:

$$\mathbf{z}_1^*(T)\mathbf{M}_1\delta\mathbf{z}_1(T)+\delta\mathbf{z}_1^*(T)\mathbf{M}_1\mathbf{z}_1(T)=$$
$$=2\mathbf{z}_1^*(T)\mathbf{M}_1\delta\mathbf{z}_1(T), \qquad (8)$$

$$\mathbf{z}_2^*(T)\mathbf{M}_2\delta\mathbf{z}_2(T)+\delta\mathbf{z}_2^*(T)\mathbf{M}_2\mathbf{z}_2(T)=$$
$$=2\mathbf{z}_2^*(T)\mathbf{M}_2\delta\mathbf{z}_2(T), \qquad (9)$$

$$\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{F}_1\delta\mathbf{z}_1(t)+\delta\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{F}_1\mathbf{z}_1(t)=2\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{F}_1\delta\mathbf{z}_1(t), \qquad (10)$$

$$\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{F}_2\delta\mathbf{z}_2(t)+\delta\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{F}_2\mathbf{z}_2(t)=2\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{F}_2\delta\mathbf{z}_2(t), \qquad (11)$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}_1^*(t)\mathbf{G}_1\delta\mathbf{u}_1(t)+\delta\mathbf{u}_1^*(t)\mathbf{G}_1\mathbf{u}_1(t)=2\mathbf{u}_1^*(t)\mathbf{G}_1\delta\mathbf{u}_1(t),\\ &\mathbf{u}_2^*(t)\mathbf{G}_2\delta\mathbf{u}_2(t)+\delta\mathbf{u}_2^*(t)\mathbf{G}_2\mathbf{u}_2(t)=2\mathbf{u}_2^*(t)\mathbf{G}_2\delta\mathbf{u}_2(t),\end{aligned} \qquad (12)$$

$$\begin{aligned}&\delta\dot{\mathbf{z}}_1(t)=\mathbf{A}_1\delta\mathbf{z}_1(t)+\mathbf{B}_1\delta\mathbf{u}_1(t),\\ &\mathbf{N}\delta\dot{\mathbf{z}}_2(t)=\delta\mathbf{z}_2(t)+\mathbf{B}_2\delta\mathbf{u}_2(t),\end{aligned} \qquad (13)$$

$$-\int_{t_0}^{T}\mathbf{p}_1^*(t)\delta\dot{\mathbf{z}}_1(t)\,dt=-\mathbf{p}_1^*(t)\delta\mathbf{z}_1(t)+\int_{t_0}^{T}\dot{\mathbf{p}}_1^*(t)\delta\mathbf{z}_1(t)\,dt, \qquad (14)$$

$$-\int_{t_0}^{T}\mathbf{p}_2^*(t)\mathbf{N}\delta\dot{\mathbf{z}}_2(t)\,dt=$$
$$=-\mathbf{p}_2^*(t)\mathbf{N}\delta\mathbf{z}_2(t)+\int_{t_0}^{T}\dot{\mathbf{p}}_2^*(t)\mathbf{N}\delta\mathbf{z}_2(t)dt. \qquad (15)$$

Із врахуванням рівностей (8)–(15) співвідношення (7) можна переписати таким чином:

$$\Delta J=\varepsilon\{[\mathbf{z}_1^*(T)\mathbf{M}_1-\mathbf{p}_1^*(T)]\delta\mathbf{z}_1(T)+[\mathbf{z}_2^*(T)\mathbf{M}_2-$$

$$-\mathbf{p}_2^*(T)\mathbf{N}]\delta\mathbf{z}_2(T)+\int_{t_0}^{T}[[\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{F}_1+\mathbf{p}_1^*(t)\mathbf{A}_1+$$

$$+\dot{\mathbf{p}}_1^*(t)]\delta\mathbf{z}_1(t)+[\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{F}_2+\mathbf{p}_2^*(t)+\dot{\mathbf{p}}_2^*(t)\mathbf{N}]\delta\mathbf{z}_2(t)+$$

$$+[\mathbf{u}_1^*(t)\mathbf{G}_1+\mathbf{p}_1^*(t)\mathbf{B}_1]\delta\mathbf{u}_1(t)+[\mathbf{u}_2^*(t)\mathbf{G}_2+$$

$$+\mathbf{p}_2^*(t)\mathbf{B}_2]\delta\mathbf{u}_2(t)+\delta\mathbf{p}_1^*(t)[\mathbf{A}_1\mathbf{z}_1(t)+\mathbf{B}_1\mathbf{u}_1(t)-$$

$$-\dot{\mathbf{z}}_1(t)]+\delta\mathbf{p}_2^*(t)[\mathbf{z}_2(t)+\mathbf{B}_2\mathbf{u}_2(t)-\mathbf{N}\dot{\mathbf{z}}_2(t)]]dt\}+$$

$$+\varepsilon^2\left\{\frac{1}{2}[\delta\mathbf{z}_1^*(T)\mathbf{M}_1\delta\mathbf{z}_1(T)+\delta\mathbf{z}_2^*(T)\mathbf{M}_2\delta\mathbf{z}_2(T)]+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[\delta\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{F}_1\delta\mathbf{z}_1(t)+\delta\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{F}_2\delta\mathbf{z}_2(t)+$$

$$\left.+\delta\mathbf{u}_1^*(t)\mathbf{G}_1\delta\mathbf{u}_1(t)+\delta\mathbf{u}_2^*(t)\mathbf{G}_2\delta\mathbf{u}_2(t)]dt\right\}. \qquad (16)$$

Коефіцієнт при ε у співвідношенні (16) – це перша варіація δJ функціонала (7). Необхідна умова екстремуму функціонала (7) – рівність нулю δJ. Це можливо, якщо одночасно виконуються рівності

$$\mathbf{z}_1^*(T)\mathbf{M}_1-\mathbf{p}_1^*(T)=\mathbf{0},\ \mathbf{z}_2^*(T)\mathbf{M}_2-\mathbf{p}_2^*(T)\mathbf{N}=\mathbf{0},$$

$$\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{F}_1+\mathbf{p}_1^*(t)\mathbf{A}_1+\dot{\mathbf{p}}_1^*(t)=\mathbf{0},$$

$$\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{F}_2+\mathbf{p}_2^*(t)\mathbf{A}_1+\dot{\mathbf{p}}_2^*(t)\mathbf{N}=\mathbf{0},$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{z}_1(t)+\mathbf{B}_1\mathbf{u}_1(t)-\dot{\mathbf{z}}_1(t)=\mathbf{0},$$

$$\mathbf{z}_2(t)+\mathbf{B}_2\mathbf{u}_2(t)-\mathbf{N}\dot{\mathbf{z}}_2(t)=\mathbf{0},\ \mathbf{u}_1^*(t)\mathbf{G}_1+\mathbf{p}_1^*(t)\mathbf{B}_1=\mathbf{0},$$

$$\mathbf{u}_2^*(t)\mathbf{G}_2+\mathbf{p}_2^*(t)\mathbf{B}_1=\mathbf{0}.$$

Безпосередньо з цих співвідношень отримаємо такі системи рівнянь:

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{z}}_1(t)=\mathbf{A}_1\mathbf{z}_1(t)-\mathbf{B}_1\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{B}_1^*\mathbf{p}_1(t),\\ \dot{\mathbf{p}}_1(t)=-\mathbf{A}_1^*\mathbf{p}_1(t)-\mathbf{F}_1\mathbf{z}_1(t), & t_0\le t\le T,\\ \mathbf{z}_1(t_0)=\mathbf{z}_{10},\mathbf{p}_1(T)=\mathbf{M}_1\mathbf{z}_1(T),\end{cases} \qquad (17)$$

$$\begin{cases}\mathbf{N}\dot{\mathbf{z}}_2(t)=\mathbf{z}_2(t)-\mathbf{B}_2\mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{B}_2^*\mathbf{p}_2(t),\\ \mathbf{N}^*\dot{\mathbf{p}}_2(t)=-\mathbf{p}_2(t)-\mathbf{F}_2\mathbf{z}_2(t), & t_0\le t\le T.\\ \mathbf{z}_2(t_0)=\mathbf{z}_{20},\mathbf{N}^*\mathbf{p}_2(T)=\mathbf{M}_2\mathbf{z}_2(T),\end{cases} \qquad (18)$$

Нехай $\bar{\mathbf{u}}_1(t) = \mathbf{u}_1(t) + \varepsilon\delta\mathbf{u}_1(t)$ і $\bar{\mathbf{u}}_2(t) = \mathbf{u}_2(t) + \varepsilon\delta\mathbf{u}_2(t)$ — також оптимальні керування. Тоді $\Delta J = 0$ і $\delta J = 0$. Звідси випливає, що коефіцієнт при ε^2 у співвідношенні (16) також повинен дорівнювати нулю. Це можливо тільки в тому випадку, коли $\delta\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{0}$ і $\delta\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{0}$ (отже, $\delta\mathbf{z}_1(t) = \mathbf{0}$ і $\delta\mathbf{z}_2(t) = \mathbf{0}$) одночасно. Тому $\bar{\mathbf{u}}_1(t) = \mathbf{u}_1(t)$ і $\bar{\mathbf{u}}_2(t) = \mathbf{u}_2(t)$. Звідси випливає єдиність оптимальних керувань. Таким чином, доведено таке твердження.

Теорема 2. Якщо для даної задачі оптимальні керування $\mathbf{u}_1(t)$ і $\mathbf{u}_2(t)$ існують, то вони є єдиними і обчислюються відповідно за формулами $\mathbf{u}_1(t) = -\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{B}_1^*\mathbf{p}_1(t)$ і $\mathbf{u}_2(t) = -\mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{B}_2^*\mathbf{p}_2(t)$, де векторнозначні функції $\mathbf{z}_1(t)$ і $\mathbf{p}_1(t)$ є розв'язком системи рівнянь (17), а векторнозначні функції $\mathbf{z}_2(t)$ і $\mathbf{p}_2(t)$ є, відповідно, розв'язком системи рівнянь (18).

Виведення матричних диференціальних рівнянь Ріккаті

Рівності $\mathbf{p}_1(T) = \mathbf{M}_1\mathbf{z}_1(T)$ і $\mathbf{N}^*\mathbf{p}_2(T) = \mathbf{M}_2\mathbf{z}_2(T)$ дають можливість зробити припущення, що справедливі і більш загальні співвідношення $\mathbf{p}_1(t) = \mathbf{R}_1(t)\mathbf{z}_1(t)$ та $\mathbf{p}_2(t) = \mathbf{R}_2(t)\mathbf{N}\mathbf{z}_2(t)$, де $\mathbf{R}_1(t)$ і $\mathbf{R}_2(t)$ — невідомі поки що матричнозначні функції. Диференціюючи дві останні рівності по змінній t, безпосередньо отримаємо

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_1(t) &= \dot{\mathbf{R}}_1(t)\mathbf{z}_1(t) + \mathbf{R}_1(t)\dot{\mathbf{z}}_1(t).\\ \dot{\mathbf{p}}_2(t) &= \dot{\mathbf{R}}_2(t)\mathbf{N}\mathbf{z}_2(t) + \mathbf{R}_2(t)\mathbf{N}\dot{\mathbf{z}}_2(t).\end{aligned} \tag{19}$$

Із системи (17) маємо, з однієї сторони, $\dot{\mathbf{p}}_1(t) = [\dot{\mathbf{R}}_1(t) + \mathbf{R}_1(t)\mathbf{A}_1 - \mathbf{R}_1(t)\mathbf{B}_1\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{B}_1^*\mathbf{R}_1(t)]\mathbf{z}_1(t)$, з іншої — $\dot{\mathbf{p}}_1(t) = [-\mathbf{A}_1^*\mathbf{R}_1(t) - \mathbf{F}_1]\mathbf{z}_1(t)$. На підставі цих двох співвідношень маємо

$$\dot{\mathbf{R}}_1(t) =$$

$$= \mathbf{R}_1(t)\mathbf{B}_1\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{B}_1^*\mathbf{R}_1(t) - \mathbf{R}_1(t)\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_1^*\mathbf{R}_1(t) - \mathbf{F}_1. \tag{20}$$

Із співвідношення $\mathbf{p}_1(T) = \mathbf{M}_1\mathbf{z}_1(T)$ бачимо, що для рівняння (20) виконується умова

$$\mathbf{R}_1(T) = \mathbf{M}_1. \tag{21}$$

Аналогічно знаходимо, що $\mathbf{N}^*\dot{\mathbf{p}}_2(t) = [\mathbf{N}^*\dot{\mathbf{R}}_2(t)\mathbf{N} + \mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t) - \mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{B}_2\mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{B}_2^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{N}]\mathbf{z}_2(t)$ і $\mathbf{N}^*\dot{\mathbf{p}}_2(t) = [-\mathbf{R}_2(t)\mathbf{N} - \mathbf{F}_2]\mathbf{z}_2(t)$. Звідси безпосередньо отримуємо

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^*\dot{\mathbf{R}}_2(t)\mathbf{N} &= \mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{B}_2\mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{B}_2^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{N} -\\ &- \mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t) - \mathbf{R}_2(t)\mathbf{N} - \mathbf{F}_2.\end{aligned} \tag{22}$$

Для рівняння (22) маємо додаткову умову

$$\mathbf{N}^*\mathbf{R}_1(T)\mathbf{N} = \mathbf{M}_2. \tag{23}$$

Тепер можна сформулювати таке твердження.

Теорема 3. Функції $\mathbf{z}_1(t)$ і $\mathbf{p}_1(t)$, що задовольняють систему (17), пов'язані між собою співвідношенням $\mathbf{p}_1(t) = \mathbf{R}_1(t)\mathbf{z}_1(t)$, де матричнозначна функція $\mathbf{R}_1(t)$ є розв'язком матричного диференціального рівняння Ріккаті (20) з додатковою умовою (21). Аналогічно, між функціями $\mathbf{z}_2(t)$ і $\mathbf{p}_2(t)$, що задовольняють систему (18), існує залежність $\mathbf{p}_2(t) = \mathbf{R}_2(t)\mathbf{N}\mathbf{z}_2(t)$, де матричнозначна функція $\mathbf{R}_2(t)$ є розв'язком матричного диференціального рівняння Ріккаті (22) з додатковою умовою (23).

Теорема 4. Якщо рівняння (20) з додатковою умовою (21) (рівняння (22) з додатковою умовою (23)) має єдиний розв'язок, то має місце рівність $\mathbf{R}_1(t) = \mathbf{R}_1^*(t)$ $(\mathbf{R}_2(t) = \mathbf{R}_2^*(t))$.

Доведення. Безпосередньо із рівняння (20) маємо

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}}_1^*(t) &= \mathbf{R}_1^*(t)\mathbf{B}_1\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{B}_1^*\mathbf{R}_1^*(t) -\\ &- \mathbf{A}_1^*\mathbf{R}_1^*(t) - \mathbf{R}_1^*(t)\mathbf{A}_1 - \mathbf{F}_1.\end{aligned} \tag{24}$$

Умова (21) дає рівність

$$\mathbf{R}_1^*(T) = \mathbf{M}_1. \tag{25}$$

Із співвідношень (24) і (25) бачимо, що $\mathbf{R}_1(t)$ і $\mathbf{R}_1^*(t)$ задовольняють одні і ті ж рівності. В силу єдиності розв'язку задачі (20), (21) це означає, що $\mathbf{R}_1(t) = \mathbf{R}_1^*(t)$. Аналогічно доводиться, що $\mathbf{R}_2(t) = \mathbf{R}_2^*(t)$.

Обчислення мінімального значення функціонала (4)

Очевидно, що має місце таке співвідношення:

$$\int_{t_0}^{T}\frac{d}{dt}[\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{R}_1(t)\,\mathbf{z}_1(t)+\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{N}\mathbf{z}_2(t)]\,dt=$$

$$=[\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{R}_1(t)\,\mathbf{z}_1(t)+\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{N}\mathbf{z}_2(t)]\big|_{t_0}^{T}=$$

$$=\mathbf{z}_1^*(T)\,\mathbf{R}_1(T)\,\mathbf{z}_1(T)+\mathbf{z}_2^*(T)\,\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(T)\mathbf{N}\mathbf{z}_2(T)-$$

$$-\,\mathbf{z}_1^*(t_0)\mathbf{R}_1(t_0)\,\mathbf{z}_1(t_0)-\mathbf{z}_2^*(t_0)\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t_0)\mathbf{N}\mathbf{z}_2(t_0)=$$

$$=\mathbf{z}_1^*(T)\,\mathbf{M}_1\,\mathbf{z}_1(T)+\mathbf{z}_2^*(T)\,\mathbf{M}_2\,\mathbf{z}_2(T)\;-$$

$$-\,\mathbf{z}_1^*(t_0)\mathbf{R}_1(t_0)\,\mathbf{z}_1(t_0)\;-\mathbf{z}_2^*(t_0)\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t_0)\,\mathbf{N}\mathbf{z}_2(t_0).$$

З цього співвідношення безпосередньо отримаємо

$$\mathbf{z}_1^*(T)\,\mathbf{M}_1\mathbf{z}_1(T)\;+\mathbf{z}_2^*(T)\,\mathbf{M}_2\,\mathbf{z}_2(T)\;=$$

$$=\mathbf{z}_1^*(t_0)\mathbf{R}_1(t_0)\,\mathbf{z}_1(t_0)+\mathbf{z}_2^*(t_0)\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t_0)\mathbf{N}\mathbf{z}_2(t_0)+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\frac{d}{dt}[\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{R}_1(t)\,\mathbf{z}_1(t)+\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{N}\mathbf{z}_2(t)]\,dt\,.$$

Із врахуванням останнього зауваження функціонал (4) матиме такий вигляд:

$$I(\mathbf{z},\mathbf{u})=$$

$$=\frac{1}{2}[\mathbf{z}_1^*(t_0)\,\mathbf{R}_1(t_0)\,\mathbf{z}_1(t_0)+\mathbf{z}_2^*(t_0)\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t_0)\mathbf{N}\mathbf{z}_2(t_0)]+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{F}_1\,\mathbf{z}_1(t)+\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{F}_2\,\mathbf{z}_2(t)+$$

$$+\frac{d}{dt}[\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{R}_1(t)\,\mathbf{z}_1(t)+\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{N}\mathbf{z}_2(t)]+$$

$$+\,\mathbf{u}_1^*(t)\mathbf{G}_1\,\mathbf{u}_1(t)+\mathbf{u}_2^*(t)\,\mathbf{G}_2\,\mathbf{u}_2(t)]\,dt\,. \qquad (26)$$

Далі, беручи до уваги рівності

$$\mathbf{u}_1(t)=-\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{B}_1^*\mathbf{R}_1(t)\,\mathbf{z}_1(t)\,,$$

$$\mathbf{u}_1^*(t)=-\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{R}_1(t)\mathbf{B}\,\mathbf{G}_1^{-1}\,,$$

$$\mathbf{u}_2(t)=-\mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{B}_2^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{N}\mathbf{z}_2(t)\,,$$

$$\mathbf{u}_2^*(t)=-\mathbf{z}_2^*(t)\,\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{B}\,\mathbf{G}_2^{-1}\,,$$

$$\dot{\mathbf{z}}_1(t)=\mathbf{A}_1\mathbf{z}_1(t)-\mathbf{B}_1\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{B}_1^*\mathbf{R}_1(t)\,\mathbf{z}_1(t)\,,$$

$$\dot{\mathbf{z}}_1^*(t)=\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{A}_1^*-\mathbf{z}_1^*(t)\,\mathbf{R}_1(t)\mathbf{B}_1\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{B}_1^*\,,$$

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{z}}_2(t)=\mathbf{z}_2(t)-\mathbf{B}_2\mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{B}_2^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{N}\mathbf{z}_2(t)\,,$$

$$\dot{\mathbf{z}}_2^*(t)\mathbf{N}^*=\mathbf{z}_2^*(t)-\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t)\,\mathbf{B}_2\mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{B}_2^*\,,$$

$$\dot{\mathbf{R}}_1(t)=$$

$$=\mathbf{R}_1(t)\mathbf{B}_1\mathbf{G}_1^{-1}\,\mathbf{B}_1^*\mathbf{R}_1(t)-\mathbf{R}_1(t)\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_1^*\mathbf{R}_1(t)-\mathbf{F}_1,$$

$$\mathbf{N}^*\dot{\mathbf{R}}_2(t)\mathbf{N}=\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{B}_2\mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{B}_2^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{N}-$$

$$-\,\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t)-\mathbf{R}_2(t)\mathbf{N}-\mathbf{F}_2,$$

очевидним способом отримаємо таке співвідношення:

$$\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{F}_1\,\mathbf{z}_1(t)+\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{F}_2\,\mathbf{z}_2(t)+\frac{d}{dt}[\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{R}_1(t)\,\mathbf{z}_1(t)+$$

$$+\,\mathbf{z}_2^*(t)\,\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{N}\mathbf{z}_2(t)]+\mathbf{u}_1^*(t)\mathbf{G}_1\,\mathbf{u}_1(t)+$$

$$+\,\mathbf{u}_2^*(t)\,\mathbf{G}_2\mathbf{u}_2(t)=\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{F}_1\,\mathbf{z}_1(t)+\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{F}_2\,\mathbf{z}_2(t)+$$

$$+\,\dot{\mathbf{z}}_1^*(t)\mathbf{R}_1(t)\,\mathbf{z}_1(t)+\mathbf{z}_1^*(t)\dot{\mathbf{R}}_1(t)\,\mathbf{z}_1(t)+\mathbf{z}_1^*(t)\mathbf{R}_1(t)\,\dot{\mathbf{z}}_1(t)+$$

$$+\,\dot{\mathbf{z}}_2^*(t)\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{N}\mathbf{z}_2(t)+\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{N}^*\dot{\mathbf{R}}_2(t)\mathbf{N}\mathbf{z}_2(t)+$$

$$+\,\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{N}\dot{\mathbf{z}}_2(t)+$$

$$+\,\mathbf{z}_1^*(t)\,\mathbf{R}_1(t)\,\mathbf{B}_1\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{B}_1^*\mathbf{R}_1(t)\,\mathbf{z}_1(t)+$$

$$+\,\mathbf{z}_2^*(t)\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{B}_2\mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{B}_2^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{N}\mathbf{z}_2(t)=\mathbf{z}_1^*(t)[\mathbf{F}_1+$$

$$+\,\mathbf{A}_1^*\mathbf{R}_1(t)+\mathbf{R}_1(t)\,\mathbf{A}_1-\mathbf{R}_1(t)\mathbf{B}_1\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{B}_1^*\mathbf{R}_1(t)+$$

$$+\,\dot{\mathbf{R}}_1(t)]\,\mathbf{z}_1(t)+\mathbf{z}_2^*(t)[\mathbf{F}_2+\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t)+\mathbf{R}_2(t)\mathbf{N}-$$

$$-\,\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{B}_2\mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{B}_2^*\mathbf{R}_2(t)\mathbf{N}+\mathbf{N}^*\dot{\mathbf{R}}_2(t)\mathbf{N}]\,\mathbf{z}_2(t)=0\,.$$

Підставивши останнє співвідношення в (26), бачимо, що мінімальне значення функціонала (4) дорівнює

$$I_{\min}(\mathbf{z},\mathbf{u})=$$

$$=\frac{1}{2}[\mathbf{z}_1^*(t_0)\mathbf{R}_1(t_0)\,\mathbf{z}_1(t_0)+\mathbf{z}_2^*(t_0)\mathbf{N}^*\mathbf{R}_2(t_0)\mathbf{N}\mathbf{z}_2(t_0)]\,. \quad (27)$$

Теорема 5. Мінімальне значення функціонала (4) обчислюється за формулою (27), де $\mathbf{R}_1(t)$ і $\mathbf{R}_2(t)$ – розв'язки матричних диференціальних рівнянь Ріккаті (20) і (22) з додатковими умовами (21) і (23) відповідно.

Висновки

У статті вперше використано поняття в'язки двох матриць для дослідження задачі оптимального керування сингулярною лінійною системою. Поєднання такого підходу разом із використанням методу множників Лагранжа дало змогу отримати необхідні умови оптимальності у формі рівнянь Ейлера–Лагранжа, встановити єдиність оптимального керування за умови його існування. Також виведено матричні диференціальні рівняння Ріккаті для розглядуваної задачі оптимального керування. З допомогою розв'язків рівнянь Ріккаті отримано формулу для обчислення мінімального значення критерію оптимальності.

Тема, розглянута у даній статті, безумовно, є досить перспективною для подальших досліджень. Зокрема, значний інтерес становить вивчення таких систем із розподіленими параметрами.

1. *Бояринцев Ю.Е.* Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1988. – 158 с.
2. *Бояринцев Ю.Е.* Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы. – Новосибирск: Наука, 2000. – 224 с.
3. *Бояринцев Ю.Е., Орлова И.В.* Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы. – Новосибирск: Наука, 2006. – 124 с.
4. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа, 2000. – 204 с.
5. *S.L. Campbell*, "Singular system of differential equations", Research Notes in Math., no. 40. San Francisco: Pitman, 1980, 176 pp.
6. *S.L. Campbell*, "Singular system of differential equations. II", Ibid, no. 61. San Francisco: Pitman, 1982, 234 pp.
7. *L. Dai*, "Singular control systems", Lecture Notes in Control and Information Sciences, no. 118. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1989, 332 pp.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
16 квітня 2012 року