УДК 517.9

М.Є. Дудкін

СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ *qs*-НОРМАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

Using described singularly perturbed rank one *qs*-normal operator, we study their spectral properties. We construct the singularly perturbed *qs*-normal operator with the prescribed set of eigenvectors and eigenvalues. When constructing this operator, we use the previously proven theorem on the structure of singularly perturbed self-adjoint operators with prescribed set of eigenvalues and corresponding eigenvectors. In such case the eigenvalues are located on the real axis. Its construction was a step-by-step process. Each next operator was a singular perturbation rank one of the previous operator. On each step, under some simple condition, we preserve possessed earlier eigenvalue and corresponding eigenvector. Corresponding proposition was proved by mathematical induction. Taking into account that singular perturbations of normal operator are possible only when its spectrum is located on the real axis, the self-adjoint case has generalization on a normal one. In case of infinite set under some additional conditions, we prove the existence of such operators. Using the latter, we prove the existence of singularly perturbed *qs*-normal operators with continuous spectrum that has a fractal structure.

Вступ

Останнім часом з'являється все більше моделей, що описуються математичними об'єктами із надзвичайними властивостями, які вважались раніше винятковими, зокрема, збурення оператора Шредінгера потенціалами, зосередженими на множинах нульової міри (Лебега) або на фракталах. Розділ математики, який вивчає такі збурені оператори, називається теорією сингулярних збурень. Типовим прикладом є оператор Лапласа, збурений δ-потенціалом.

Найпліднішим підходом до вивчення властивостей сингулярно збурених операторів є теорія самоспряжених розширень симетричних операторів, започаткована Дж. фон Нейманом і широко розвинена М.Г. Крейном та його численними послідовниками. Зараз кількість праць, присвячених цій тематиці, нараховує щонайменше кілька тисяч. Доволі повна бібліографія зібрана в працях С. Альбеверіо зі співавторами [1]. Відзначимо, що в абстрактному вигляді побудову і дослідження властивостей сингулярно збурених самоспряжених операторів проведено у працях Й. Браше, В.Д. Кошманенка, В. Карвовського, П. Курасова, Х. Найдхарда, Л.П. Нижника, Б. Саймона. Термін сингулярно збуреного оператора започатковано В.Д. Кошманенком у [2, 3] понад двадцять років тому. Деякі спектральні властивості таких операторів вивчались, наприклад, у [4–8].

Близькими і схожими за властивостями до самоспряжених операторів є нормальні оператори. Перенесення і узагальнення результатів теорії самоспряжених розширень на випадок нормальних операторів є складною проблемою. Це малодосліджений напрям, який відкриває можливості до побудови моделей математичної фізики, які містять нормальні оператори зі збуреннями сингулярними потенціалами. В [9, 10] введено сингулярно збурені нормальні оператори.

Постановка задачі

Мета роботи – отримати аналоги результатів (теорем) праць [4–8] на випадок сингулярно збурених нормальних операторів, тобто побудувати сингулярно збурені нормальні оператори із наперед заданими власними числами і відповідними власними векторами.

Попередні відомості

Замкнений оператор N у комплексному гільбертовому просторі H зі щільною областю визначення $D(N)$ є нормальним, якщо $N^*N = NN^*$. У цьому випадку $D(N^*) = D(N)$ і $\|N^*f\| = \|Nf\|$ [11], що еквівалентно такій рівності:

$$(Nf, Ng) = (N^*f, N^*g); \qquad f, g \in D(N) = D(N^*), \quad (1)$$

яка визначає нормальний оператор, оскільки відповідні білінійні форми (Nf, Ng), (N^*f, N^*g) однозначно визначаються через квадратичні. Прикладами нормальних операторів виступають самоспряжені й унітарні оператори. Якщо S – самоспряжений оператор, то для довільних комплексних чисел a і b оператор $N = aS + bI$ є нормальним, і такі нормальні оператори будемо називати лінійними функціями від самоспряжених операторів або майже самоспряженими нормальними операторами – *qs*-нормальними. Аналогом симетричного оператора є формально нормальний оператор $\dot{N}$ зі щільною областю визначення $D(\dot{N})$, для якого $D(\dot{N}^*) \supset D(\dot{N})$ і $\|\dot{N}^*f\| = \|\dot{N}f\|$, $f \in D(\dot{N})$. Якщо формально нормальний оператор має нормальне розширення, то він називається переднормальним.

У [9, 10] вивчалися нормальні оператори $\tilde{N}$, сингулярно збурені відносно незбуреного нормального оператора N в тому розумінні, що множина $D \subset D(\tilde{N}) \cap D(N)$, на якій оператори $\tilde{N}$ і N збігаються, є щільною в H. При цьому спільна частина операторів $\tilde{N}$ і N є переднормальним оператором $\dot{N} = \tilde{N} \upharpoonright_D = N \upharpoonright_D$, а оператори $\tilde{N}$ і N – різними нормальними розширеннями оператора $\dot{N}$. Якщо $D(N) = D \dotplus R$, де R – n-вимірний підпростір у H, то оператор $\tilde{N}$ є сингулярним збуренням рангу n оператора N і позначається $\tilde{N} \in P_s^n(N)$.

Сингулярно збурені нормальні оператори із заданими власними числами та векторами

Використовуючи теорему із [5, 8], яка стосується збурення скінченого рангу самоспряженого оператора, і де введене поняття qs-нормального оператора, сформулюємо n-вимірний аналог теореми з [4] (або [5, 8]), в якій для наперед заданих власних значення і вектора стверджується існування відповідного збуреного самоспряженого оператора.

Теорема 1. Нехай у сепарабельному гільбертовому просторі H задано необмежений qs-нормальний оператор N, тобто вигляду $N = aS + bI$, $a, b \in \mathbb{C}$, $S = S^*$ з областю визначення $D(N)$. Для скінченого набору чисел

$$\{\lambda_i\}_{i=1}^n, \quad \lambda_i \in L := \{z \in \mathbb{C} \mid z = at + b, t \in \mathbb{R}\},$$

$$i = \overline{1, n}, \; n < \infty$$

та скінченої ортонормованої системи векторів

$$\{\psi_i\}_{i=1}^n,$$

$$\psi_i \in H, (\psi_i \perp \psi_j, i \neq j, \; \|\psi_i\| = 1, i, j = \overline{1, n}), \; n < \infty,$$

такої, що

$$\operatorname{span}\{\psi_i\}_{i=1}^n \cap D(N) = \{0\},$$

знайдеться такий єдиний сингулярно збурений рангу n нормальний оператор $\tilde{N} \in P_s^n(N)$, що

$$\tilde{N}\psi_i = \lambda_i \psi_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Доведення. Заданий оператор $N = aS + bI$ – необмежений. Отже, оператор $S = S^*$ також є необмеженим. Враховуючи, що $a \neq 0$, маємо $D(S) = D(N)$. Звідси випливає, що $\operatorname{span}\{\psi_i\}_{i=1}^n \cap \cap D(N) = \{0\}$ еквівалентно умові $\operatorname{span}\{\psi_i\}_{i=1}^n \cap \cap D(S) = \{0\}$. Числам λ_i однозначно відповідають числа t_i за правилом $\lambda_i = at_i + b$. Таким чином, для необмеженого самоспряженого оператора $S = S^*$ з областю визначення $D(S)$ у сепарабельному гільбертовому просторі H і довільного скінченого набору дійсних чисел $\{t_i\}_{i=1}^n$, $t_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, $n < \infty$, та скінченої ортонормованої системи векторів $\{\psi_i\}_{i=1}^n$, $\psi_i \in H$, $(\psi_i \perp \psi_j$, $i \neq j$, $\|\psi_i\| = 1$, $i, j = \overline{1, n})$, $n < \infty$, такої, що $\operatorname{span}\{\psi_i\}_{i=1}^n \cap \cap D(S) = \{0\}$, згідно з [5, 8], знайдеться єдиний сингулярно збурений рангу n відносно $S = S^*$ самоспряжений оператор $\tilde{S} \in P_s^n(S)$, такий, що $t_i \in \sigma(\tilde{S})$, $i = \overline{1, n}$ ($\sigma(\cdot)$ – спектр відповідного оператора), при цьому $\tilde{S}\psi_i = t_i \psi_i$, $i = \overline{1, n}$. Оператор $\tilde{N} = a\tilde{S} + bI$ є нормальним сингулярним збуренням рангу n оператора $N = aS + bI$. Для $\tilde{N} = a\tilde{S} + bI$ виконується рівність:

$$\tilde{N}\psi_i = (a\tilde{S} + bI)\psi_i = (at_i + bI)\psi_i = \lambda_i \psi_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Варіант теореми 1 зі збуренням нескінченого рангу, відомий для самоспряженого оператора в [6, 7], для нормального оператора має такий вигляд.

Теорема 2. Нехай у сепарабельному гільбертовому просторі H задано необмежений qs-нормальний оператор N, тобто вигляду $N = aS + bI$, $a, b \in \mathbb{C}$, $S = S^*$ з областю визначення $D(N)$. Для заданої множини обмежених чисел $\lambda_i \in \sigma(N)$, $|\lambda_i| < c < \infty$

$$\{\lambda_i\}_{i=1}^n, \lambda_i \in L := \{z \in \mathbb{C} \mid z = at + b, t \in \mathbb{R}\},$$

$$i = \overline{1, n}, \; n \leq \infty$$

та ортонормованої системи векторів

$$\{\psi_i\}_{i=1}^n, \psi_i \in H, (\psi_i \perp \psi_j, i \neq j, \|\psi_i\| = 1, i, j = \overline{1, n}),$$

$$n \leq \infty,$$

такої, що

$$\operatorname{span}\{\psi_i\}_{i=1}^n \cap D(N) = \{0\},$$

$$\sum_i (\operatorname{dist}(z, \operatorname{spsupp}(\psi_i)))^{-2} < \infty,$$

де $\mathrm{dist}\,(z, \mathrm{spsupp}(\psi_i))$ – відстань від деякої точки $z \in \rho(N)$ з резольвентної множини $\rho(N)$ оператора N до спектрального носія $\mathrm{spsupp}(\psi_i)$ вектора (ψ_i) (спектрального носія в сенсі розкладу одиниці оператора N) знайдеться сингулярно збурений нормальний оператор $\tilde{N} \in P_s^{\infty}(N)$, такий, що

$$\tilde{N}\psi_i = \lambda_i \psi_i,\ i \in \mathbb{N}.$$

Нагадаємо, що спектральним носієм вектора (ψ_i), в сенсі розкладу одиниці оператора N, є найменша замкнена множина Δ в спектрі відповідного оператора $\sigma(N)$, для якої $\psi = \int\limits_{\Delta} dE_z \psi$, де dE_z спектральна міра оператора N, що дає зображення оператору $N = \int\limits_{\sigma(N)} z\,dE_z$.

Доведення. Як у попередній теоремі, оператор $N = aS + bI$ є необмеженим. Отже, оператор $S = S^*$ також необмежений. Враховуючи, що $a \neq 0$, маємо $D(S) = D(N)$. Звідси випливає, що умова $\mathrm{span}\,\{\psi_i\}_{i=1}^{n} \cap D(N) = \{0\}$ еквівалентна умові $\mathrm{span}\,\{\psi_i\}_{i=1}^{n} \cap D(S) = \{0\}$. Числам λ_i однозначно відповідають числа t_i за правилом $\lambda_i = at_i + b$. Отже, якщо числа λ_i обмежені, то це еквівалентно тому, що числа t_i обмежені на $\mathbb{R}$. Таким чином, для довільного необмеженого самоспряженого оператора $S = S^*$, визначеного на $D(S)$ у сепарабельному гільбертовому просторі H, відомо, що існує сингулярно збурений оператор $\tilde{S} \in P_s^{\,n}(S)$, $n \leq \infty$, який розв'язує задачу на власні значення $\tilde{S}\psi_i = t_i \psi_i$ для заданої множини обмежених дійсних чисел $t_i \in \mathbb{R}$, $|t_i| < c < \infty$ і системи ортонормованих векторів $\mathrm{span}\,\{\psi_i\}_{i=1}^{n}$, $n \leq \infty$ з умовами

$$\mathrm{span}\,\{\psi_i\}_{i=1}^{n} \cap D(S) = \{0\},$$

$$\sum_i \left(\mathrm{dist}(z, \mathrm{spsupp}_S(\psi_i))\right)^{-2} < \infty, \qquad (3)$$

де $\mathrm{dist}(z, \mathrm{spsupp}_S(\psi_i))$ – відстань від деякої точки $z \in \rho(S)$ з резольвентної множини $\rho(S)$ оператора S до спектрального носія $\mathrm{spsupp}_S(\psi_i)$ вектора (ψ_i) (спектрального носія в сенсі розкладу одиниці оператора S) [6, 7].

Зауважимо, що якщо $\mathrm{spsupp}_S(\psi_i)$ – спектральний носій вектора (ψ_i) в сенсі розкладу одиниці оператора S, то множина

$$\mathrm{spsupp}(\psi_i) := \{z \in \rho(N) \mid z = \\ = a\zeta + b,\ \zeta \in \mathrm{spsupp}_S(\psi_i)\}$$

є спектральним носієм вектора (ψ_i) в сенсі розкладу одиниці оператора N.

Також зауважимо, що якщо для деякого $z_0 \in \rho(N)$ виконується умова

$$\sum_i \left(\mathrm{dist}(z_0, \mathrm{spsupp}(\psi_i))\right)^{-2} < \infty,$$

то вона виконується і для довільного $z \in \rho(N)$. Звідси, використовуючи рівність $D(S) = D(N)$, випливає, що друга умова в (2) є еквівалентною другій умові в (3).

Оператор $\tilde{N} = a\tilde{S} + bI$ є нормальним сингулярним збуренням нескінченого рангу оператора $N = aS + bI$. Для $\tilde{N} = a\tilde{S} + bI$ виконується рівність

$$\tilde{N}\psi_i = (a\tilde{S} + bI)\psi_i = (at_i + bI)\psi_i = \lambda_i \psi_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Якщо $n < \infty$, то другий вираз в умові (3), очевидно, виконується і оператор $\tilde{S}$ визначається однозначно. Отже, при $n < \infty$ явно виконується і друга умова в (2). Таким чином, теорема 1 є частинним випадком теореми 2.

Нехай $\Gamma \in \mathbb{R}$ фрактал у тому розумінні, що його розмірність Хаусдорфа–Безиковича є дробовою [12, 13]. Виберемо в Γ щільну зчислену підмножину Γ_0. Покладемо надалі $\Gamma_0 = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$. Позначимо складові спектра $\sigma(N)$ оператора N, а саме $\sigma_p(N)$ – точковий і $\sigma_{sc}(N)$ – сингулярно неперервний спектри оператора $\tilde{N}$ згідно з класифікацією в [14].

Теорема 3. Для необмеженого *qs*-нормального оператора N, тобто вигляду $N = aS + bI$, $a, b \in \mathbb{C}$, $S = S^*$ у гільбертовому просторі H, та фрактальної множини $\Gamma \in L := \{z \in \mathbb{C} \mid z = at + b,\ t \in \mathbb{R}\}$ існує сингулярно збурений оператор $\tilde{N} \in P_s^{\infty}(N)$, такий, що $\Gamma \subset \sigma(\tilde{N})$, $\Gamma_0 \subset \sigma_p(\tilde{N})$, Γ_0 – зчислена підмножина, щільна в Γ; $\Gamma \setminus \Gamma_0 \subset \sigma_{sc}(\tilde{N})$.

Доведення. Як у попередній теоремі, оператор $N = aS + bI$ необмежений. Отже, оператор $S = S^*$ також є необмеженим. Враховуючи, що $a \neq 0$, маємо $D(S) = D(N)$.

Утворимо множину $\Gamma^S \subset \mathbb{R}$ та зчислену щільну підмножину $\Gamma_0^S \subset \Gamma^S$, таку, що

$$\Gamma := \{z \in L \mid z = at + b,\, t \in \Gamma^S\},$$

$$\Gamma_0 := \{z \in L \mid z = at + b,\, t \in \Gamma_0^S\}$$

відповідно. Взагалі для множин Γ і Γ^S та Γ_0 і Γ_0^S є взаємно однозначна відповідність, яка задається перетворенням $\Upsilon : (t \in \mathbb{R}),\quad t \to z = = at + b \in L$. При цьому з того, що $\overline{\Gamma}_0 = \Gamma$, випливає $\overline{\Gamma}_0^S = \Gamma^S$, і навпаки.

Для необмеженого самоспряженого оператора $S = S^*$ у гільбертовому просторі H та фрактальної множини $\Gamma^S \in \mathbb{R}$ відомо з теореми, доведеної в [7], що існує сингулярно збурений оператор $\tilde{S} \in P_s^{\infty}(S)$, такий, що $\Gamma^S \subset \sigma(\tilde{S})$, $\Gamma_0^S \subset \sigma_p(\tilde{S})$, де Γ_0^S – зчислена підмножина, щільна в Γ, яка складається із власних чисел $t_i, i \in \mathbb{N}$ оператора $\tilde{S}$, $\Gamma^S \setminus \Gamma_0^S \subset \sigma_{sc}(\tilde{S})$.

Застосовуючи зворотне перетворення Υ^{-1} до множин Γ^S, Γ_0^S і, переходячи від оператора $S = S^*$ до нормального оператора $N = aS + bI$, отримуємо доведення теореми. Наведені в роботі результати попередньо розглянуті та відображені в [9].

Висновки

У роботі доведено існування та конструктивно побудовано сингулярно збурені нормальні оператори із наперед заданими власними числами і відповідними власними векторами. Побудову здійснено для скінченого набору власних чисел та векторів і нескінченого за додаткових умов.

Використовуючи побудову для нескінченого набору власних чисел, побудовано збурення для множин власних чисел, які утворюють фрактальну множину в спектрі збуреного оператора. Для подальшого вивчення викликає інтерес дослідження властивостей збуреного оператора залежно від розмірності отриманої фрактальної множини Хаусдорфа–Безиковича.

1. *Решаемые* модели в квантовой механике / С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хёэг-Крон, Х. Хольден; пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 568 с.
2. *V.D. Koshmanenko*, “Towards the rank-one singular perturbations of self-adjoint operators”, Ukrainian Math. J., vol. 43, no. 11, pp. 1559–1566, 1991.
3. *Кошманенко В.Д.* Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. – К.: Наук. думка, 1993. – 176 с.
4. *Дудкін М.Є.* Сингулярно збурені самоспряжені оператори (скінченого рангу) із заданими власними значеннями і власними векторами // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2002. – № 5. – С. 146–154.
5. *Дудкін М.Є., Кошманенко В.Д.* Про точковий спектр самоспряжених операторів, що виникає при сингулярних збуреннях скінченого рангу // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 9 – С. 1269–1276.
6. *Дудкін М.Є.* Про точковий спектр сингулярно збурених нескінченого рангу операторів // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2004. – № 4. – С. 144–151.
7. *Дудкін М.Є.* Сингулярно неперервний спектр сингулярно збурених операторів // Нелінійні коливання. – 2006. – 9, № 3. – С. 326–335.
8. *S. Albeverio at al.*, “On the point spectrum of H_2-syngular perturbations”, Math. Nachr, vol. 280, no. 1-2, pp. 20–27, 2007.
9. *Дудкін М.Є.* Сингулярно збурені рангу один нормальні оператори та їх застосування. – К., 2008. – 38 с.
10. *M.E. Dudkin, L.P. Nizhnik*, “Singularly perturbed normal operators”, Method Funct. Anal. and Topology, vol. 16, no. 4, pp. 298–303, 2010.
11. *Плеснер А.И.* Спектральная теория линейных операторов. – М.: Наука, 1965. – 624 с.
12. *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции распределения. – К.: Наук. думка, 1992. – 208 с.
13. *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
14. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
5 червня 2012 року