УДК 519.21

Б.М. Жураковський, О.В. Іванов

ВЛАСТИВОСТІ ПЕРІОДОГРАМНИХ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ ГАРМОНІЙНОГО КОЛИВАННЯ В МОДЕЛЯХ РЕГРЕСІЇ З СИЛЬНОЗАЛЕЖНИМ ШУМОМ

The problem of detection of hidden periodicities is considered in the paper. In the capacity of useful signal model the harmonic oscillation observed on the background of random noise, that is a local functional of Gaussian strongly dependent stationary process is taken. For estimation of unknown angular frequency and amplitude of harmonic oscillation periodogram estimator is chosen, for which sufficient conditions of asymptotic normality are obtained and limit normal distribution is found. To obtain the main result there were used limit theorems of random processes, weak convergence of a family of measures to the spectral measure of a regression function, etc. The novelty, compared with the known results in the theory of periodogram estimator in observation models on weakly dependent noise, is assuming that the random noise is a local functional of Gaussian strongly dependent stationary process.

Вступ

Виявлення прихованих періодичностей – це задача, яка має довгу історію, розпочату Лагранжем у XVIII ст. [1].

У сучасному статистичному розумінні виявлення прихованих періодичностей – це оцінювання невідомих амплітуд і кутових частот, взагалі кажучи, суми гармонічних коливань, що спостерігаються на фоні випадкового шуму, який маскує ці коливання.

Існує велика бібліографія з цього питання, зокрема праці [2–7] та ін. До того ж з'являються нові публікації на тему виявлення прихованих періодичностей, які стосуються різноманітних галузей знань, зокрема астрономії [8, 9], фізики та геофізики [10–12], біології [13], кліматології [14] тощо.

У статті задача виявлення прихованих періодичностей розв'язується у випадку, коли одне гармонічне коливання спостерігається на фоні випадкового шуму, який є локальним функціоналом від гауссового стаціонарного процесу з сильною залежністю, а як оцінки невідомих параметрів вибрані періодограмні оцінки.

У доведеннях використаний підхід статті [7], де розглядався випадок слабкої залежності випадкового шуму.

Постановка задачі

Мета статті полягає в наведені достатніх умов асимптотичної нормальності консистентних періодограмних оцінок амплітуди та кутової частоти гармонічного коливання в моделі спостереження із сильнозалежним випадковим шумом.

Вихідні дані

Нехай спостерігається випадковий процес

$$X(t) = A_0 \cos\varphi_0 t + \varepsilon(t), \tag{1}$$

де $A_0 > 0,\ \varphi_0 \in (\underline{\varphi}, \overline{\varphi}),\ 0 < \underline{\varphi} < \overline{\varphi} < \infty$, а відносно шуму $\varepsilon(t)$ припустимо таке:

A1. $\varepsilon(t),\ t \in \mathbb{R}^1$ є локальним функціоналом від гауссового стаціонарного процесу $\xi(t)$, тобто $\varepsilon(t) = G(\xi(t)),\ G(x), x \in \mathbb{R}^1$ – борелева функція, причому $E\varepsilon(0) = 0,\ E\varepsilon^2(0) < \infty$.

A2. $\xi(t),\ t \in \mathbb{R}^1$ є дійсним неперервним в середньому квадратичному вимірним стаціонарним гауссовим процесом із сильною залежністю, який визначено на ймовірнісному просторі $(\Omega, F, P), E\xi(0) = 0$. Припустимо також, що виконується одна з двох умов:

A3. Коваріаційна функція (к.ф.) процесу $\xi(t)$ має вигляд $E\,\xi(t)\,\xi(0) = B(t) = L(|t|)|t|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, де $L(t), t \ge 0$, – неспадна повільнозмінна на нескінченності функція, $E\xi^2(0) = B(0) = 1$.

A4. К.ф. процесу $\xi(t)$ має вигляд $B(t) = \cos\psi t(1+t^2)^{-\alpha/2}$, $\alpha \in (0,1)$, $\psi > 0$ – деяке число, $\varphi_0 \ne \psi$.

Припустимо, що для функції $G(x) \in L_2(\mathbb{R}^1, \varphi(x)\,dx), \varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$, величини $C_1(G) \ne 0$ або $C_1(G) = \ldots = C_{m-1}(G) = 0,\ C_m(G) \ne 0$, де $C_k(G) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) H_k(x) \varphi(x)\,dx,\ k \ge 0$. Тоді число $m \ge 1$ називають ермітовим рангом G.

Стосовно функції $G(\cdot)$ з умови A1 припустимо, що

B1. Виконано нерівність $m\alpha > 1$, де α – параметр к.ф. процесу ξ.

Нам знадобиться результат, доведений у [15].

Лема 1. Якщо виконуються умови A1, A2, а також A3 або A4, то

$$E\left(\sup_{\lambda\in\mathbb{R}^1}\frac{1}{T}\left|\int_0^T e^{-i\lambda t}\varepsilon(t)\,dt\right|\right)^2 \to 0\,,\ T\to\infty.$$

Розглянемо функціонал

$$Q_T(\varphi) = \left|\frac{2}{T}\int_0^T X(t)e^{i\varphi t}dt\right|^2. \qquad (2)$$

Періодограмною оцінкою частоти φ_0 назвемо таку випадкову величину (в.в.) $\varphi_T \in [\underline{\varphi},\overline{\varphi}]$, для якої $Q_T(\varphi_T) = \max_{\varphi\in[\underline{\varphi},\overline{\varphi}]} Q_T(\varphi)$.

Теорема 1. За умов леми 1 $\varphi_T \xrightarrow{P} \varphi_0$, $T\to\infty$.

При фіксованому φ розглянемо поведінку при $T\to\infty$ величини

$$Q_T(\varphi) = \left|\frac{2}{T}\int_0^T X(t)e^{i\varphi t}dt\right|^2 =$$

$$= \frac{4}{T^2}\left(A_0^2\left|\int_0^T \cos\varphi_0 t e^{i\varphi t}dt\right|^2 + \left|\int_0^T \varepsilon(t)e^{i\varphi t}dt\right|^2 + \right.$$

$$\left. + 2A_0 Re\left\{\int_0^T \cos\varphi_0 t e^{i\varphi t}dt\int_0^T \varepsilon(t)e^{-i\varphi t}dt\right\}\right). \qquad (3)$$

Оскільки $\frac{1}{T}\left|\int_0^T \cos\varphi_0 t e^{i\varphi t}dt\right| \le 1$, то (в силу леми 1) 2 і 3-й доданки в правій частині (3) прямують до 0 при $T\to\infty$ за ймовірністю. Маємо далі, при $\varphi\in[\underline{\varphi},\overline{\varphi}]$:

$$\frac{2}{T}\left|\int_0^T \cos\varphi_0 t e^{i\varphi t}dt\right| =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{i(\varphi-\varphi_0)T}-1}{i(\varphi-\varphi_0)T} + \dfrac{e^{i(\varphi+\varphi_0)T}-1}{i(\varphi+\varphi_0)T}, & \varphi\ne\varphi_0, \\ \dfrac{e^{i\varphi_0 T}-1}{2i\varphi_0 T}+1, & \varphi=\varphi_0. \end{cases} \qquad (4)$$

З (3) і (4) випливає, що

$$Q_T(\varphi_0) \xrightarrow{P} A_0^2,\ T\to\infty, \qquad (5)$$

$$Q_T(\varphi) \xrightarrow{P} 0,\ T\to\infty \qquad (6)$$

рівномірно на будь-якій множині

$$\Phi_\delta = \{\varphi\in[\underline{\varphi},\overline{\varphi}] : |\varphi-\varphi_0| \ge \delta\} \text{ з } \delta > 0.$$

За означенням оцінки φ_T

$$P(|\varphi-\varphi_0|\ge\delta) = P(|\varphi-\varphi_0|\ge\delta, Q_T(\varphi_T)\ge$$

$$\ge Q_T(\varphi_0)) \le P\left(\sup_{\varphi\in\Phi_\delta} Q_T(\varphi) \ge Q_T(\varphi_0)\right) \to 0,\ T\to\infty,$$

згідно з (5) і (6).

Оцінку амплітуди A_0 шукатимемо як значення $A_T = Q_T^{1/2}(\varphi_T)$.

Лема 2. За умов леми 1 $Q_T(\varphi_T) \xrightarrow{P} A_0^2$, $T\to\infty$.

Використовуючи (3), запишемо

$$0 \le Q_T(\varphi_T) - Q_T(\varphi_0) = \frac{4A_0^2}{T^2}\left|\int_0^T \cos\varphi_0 t e^{i\varphi_T t}dt\right|^2 -$$

$$-\frac{4A_0^2}{T^2}\left|\int_0^T \cos\varphi_0 t e^{i\varphi_0 t}dt\right|^2 + \eta_T,\ \eta_T \xrightarrow{P} 0,\ T\to\infty. \qquad (7)$$

Оскільки з (4) маємо $\sup_{\varphi\in[\underline{\varphi},\overline{\varphi}]}\frac{1}{T}\left|\int_0^T \cos\varphi_0 t e^{i\varphi t}dt\right| \le$ ≤ 1, а $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left|\int_0^T \cos\varphi_0 t e^{i\varphi_0 t}dt\right| = 1$, то

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\sup_{\varphi\in[\underline{\varphi},\overline{\varphi}]}\left\{\frac{4A_0^2}{T^2}\left|\int_0^T \cos\varphi_0 t e^{i\varphi t}dt\right|^2 -\right.$$

$$\left.-\frac{4A_0^2}{T^2}\left|\int_0^T \cos\varphi_0 t e^{i\varphi_0 t}dt\right|^2\right\} \le 0. \qquad (8)$$

Беручи до уваги цю нерівність і (7), (8), отримуємо

$$Q_T(\varphi_T) - Q_T(\varphi_0) \xrightarrow{P} 0,\ T\to\infty.$$

А оскільки згідно з (5) $Q_T(\varphi_0) \xrightarrow{P} A_0^2$, $T \to \infty$, то і $Q_T(\varphi_T) \xrightarrow{P} A_0^2$, $T \to \infty$.

Теорема 2. За умов леми 1 $T(\varphi_T - \varphi_0) \xrightarrow{P} 0$, $T \to \infty$.

З леми 2 і (7) випливає, що

$$\frac{2}{T^2}\left|\int_0^T \cos\varphi_T t e^{i\varphi_T t} dt\right|^2 - \frac{2}{T^2}\left|\int_0^T \cos\varphi_0 t e^{i\varphi_0 t} dt\right|^2 \xrightarrow{P} 0, \quad (9)$$

$$T \to \infty.$$

Для того щоб виконувалось (9), необхідно і достатньо, щоб при $T \to \infty$ (див. (4))

$$\left|\frac{e^{i(\varphi_T - \varphi_0)T} - 1}{i(\varphi_T - \varphi_0)T} + \frac{e^{i(\varphi_T + \varphi_0)T} - 1}{i(\varphi_T + \varphi_0)T}\right|^2 -$$

$$-\left|\frac{e^{i\varphi_0 T} - 1}{2i\varphi_0 T} + 1\right|^2 \xrightarrow{P} 0 \quad (10)$$

або $\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_T - \varphi_0)T}{\frac{1}{2}(\varphi_T - \varphi_0)T} \xrightarrow{P} 1$, $T \to \infty$. Але останнє можливе (див. [15]) тоді і лише тоді, коли

$$T(\varphi - \varphi_0) \xrightarrow{P} 0, \ T \to \infty.$$

Розглянемо вектор функцій

$$a(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_q(t))', \ t \ge 0, \quad (11)$$

і сім'ю матричних мір $\mu_T(d\lambda)$ на $(\mathbb{R}^1, \mathrm{B}^1)$ з матричними щільностями $(\mu_T^{jl}(d\lambda))_{j,l=1}^q$,

$$\mu_T^{jl}(d\lambda) = (a_T^j(\lambda)\overline{a_T^l(\lambda)}) \times$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |a_T^j(\lambda)|^2 d\lambda\right)^{-1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |a_T^l(\lambda)|^2 d\lambda\right)^{-1/2},$$

$$a_T^j(\lambda) = \int_0^T e^{i\lambda t} a_j(t)\, dt, \quad j, l = \overline{1, q}.$$

Припустимо, що сім'я мір $\mu_T(d\lambda)$ слабко збігається, при $T \to \infty$, до матричної міри $\mu(d\lambda)$, тобто для будь-якої неперервної обмеженої функції $b(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b(\lambda)\mu_T(d\lambda) \to \int_{-\infty}^{+\infty} b(\lambda)\mu(d\lambda), \ T \to \infty.$$

Тоді міра $\mu(d\lambda)$ називається спектральною мірою вектора (11).

Визначимо спектральну міру вектора

$$a(t) = (\sin(\varphi_0 t), t\sin(\varphi_0 t)).$$

Компоненти $\mu_{ij}(d\lambda)$ матриці $\mu(d\lambda)$ знаходимо із співвідношень

$$\lim_{T\to\infty} d_{iT}^{-1} d_{jT}^{-1} \int_0^T a_i(t+s) a_j(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda s}\mu_{ij}(d\lambda),$$

$$i, j = 1, 2,$$

де $d_{iT}^2 = \int_0^T a_i^2(t)\, dt$, $i = 1, 2$, $a_1(t) = \sin(\varphi_0 t)$, $a_2(t) = t\sin(\varphi_0 t)$.

Провівши необхідні обчислення, знаходимо

$$\mu(d\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha & \alpha \end{pmatrix},$$

де α — міра, зосереджена в точках $\pm\varphi_0$, причому $\alpha(\pm\varphi_0) = \frac{1}{2}$.

Нехай для $j \ge m$ $f^{*j}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{j-1}} f(\lambda - \lambda_2 - \ldots - \lambda_j) \prod_{i=2}^{j} f(\lambda_i)\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_j$ — j-та згортка спектральної щільності $f(\lambda)$.

Зауважимо, що $B^k(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^1)$, $k \ge m$, тому всі $f^{*j}(\lambda)$, $k \ge m$, — неперервні обмежені функції.

Нам знадобиться такий результат [16].

Теорема′. Нехай виконуються умови леми 1, а також умова В1. Тоді випадковий вектор

$$\left(d_{1T}^{-1}\int_0^T (t)\sin(\varphi_0 t)\, dt,\ d_{2T}^{-1}\int_0^T \varepsilon(t)\, t\sin(\varphi_0 t)\, dt\right)'$$

є асимптотично при $T \to \infty$ нормальним $N(0, K_1)$, де

$$K_1 = 2\pi \sum_{j=m}^{\infty} \frac{C_j^2}{j!} f^{*j}(\varphi_0) \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси знаходимо, що вектор

$$\left(T^{-1/2}\int_0^T (t)\sin(\varphi_0 t)dt,\, T^{-3/2}\int_0^T \varepsilon(t)\,t\sin(\varphi_0 t)dt\right)' \quad (12)$$

асимптотично нормальний, при $T\to\infty$, $N(0,K_1)$,

$$K_2 = 2\pi\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2}{j!}f^{*j}(\varphi_0)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Аналогічно можна отримати асимптотичну нормальність вектора

$$\left(T^{-1/2}\int_0^T (t)\cos(\varphi_0 t)dt,\, T^{-3/2}\int_0^T \varepsilon(t)\,t\cos(\varphi_0 t)dt\right)', \quad (13)$$

причому з такою ж матрицею коваріацій K_2.

Лема 3. Нехай виконуються умови леми 1, а також умова B1. Тоді величина $T^{-1/2}Q_T'(\varphi_0)$ асимптотично нормальна, при $T\to\infty$, $N(0,K)$, де

$$K = \frac{4}{3}\pi A_0^2\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2}{j!}f^{*j}(\varphi_0).$$

Запишемо функціонал $Q_T(\varphi)$ у вигляді

$$Q_T(\varphi) = \frac{4}{T^2}\left[\int_0^T X(t)\cos\varphi t\,dt\right]^2 + \frac{4}{T^2}\left[\int_0^T X(t)\sin\varphi t\,dt\right]^2.$$

Тоді

$$T^{-1/2}Q_T'(\varphi_0) =$$

$$= -\frac{8}{T^{5/2}}\int_0^T X(t)\cos\varphi_0 t\,dt\int_0^T X(t)\,t\sin\varphi_0 t\,dt +$$

$$+\frac{8}{T^{5/2}}\int_0^T X(t)\sin\varphi_0 t\,dt\int_0^T X(t)\,t\cos\varphi_0 t\,dt =$$

$$= -\frac{8}{T^{5/2}}\left[\frac{1}{2}\int_0^T A_0\cos^2\varphi_0 t\,dt\int_0^T A_0 t\sin 2\varphi_0 t\,dt + \right.$$

$$+\int_0^T A_0\cos^2\varphi_0 t\,dt\int_0^T \varepsilon(t)\,t\sin\varphi_0 t\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T A_0 t\sin 2\varphi_0 t\,dt\int_0^T \varepsilon(t)\cos\varphi_0 t\,dt +$$

$$\left.+\int_0^T \varepsilon(t)\cos\varphi_0 t\,dt\int_0^T \varepsilon(t)\,t\sin\varphi_0 t\,dt\right] +$$

$$+\frac{8}{T^{5/2}}\left[\frac{1}{2}\int_0^T A_0\sin 2\varphi_0 t\,dt\int_0^T A_0 t\cos^2\varphi_0 t\,dt + \right.$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T A_0\sin 2\varphi_0 t\,dt\int_0^T \varepsilon(t)\,t\cos\varphi_0 t\,dt +$$

$$+\int_0^T A_0 t\cos^2\varphi_0 t\,dt\int_0^T \varepsilon(t)\sin\varphi_0 t\,dt +$$

$$\left.+\int_0^T \varepsilon(t)\sin\varphi_0 t\,dt\int_0^T \varepsilon(t)\,t\cos\varphi_0 t\,dt\right] = \sum_{i=1}^{8}S_i.$$

Очевидно, $S_1, S_5 \to 0,\ T\to\infty$. Використовуючи лему 1, бачимо, що $S_3 \xrightarrow{P} 0$, $T\to\infty$. Збіжність до 0 за ймовірністю доданків S_4, S_6 і S_8 отримуємо, врахувавши асимптотичну нормальність величин

$$T^{-3/2}\int_0^T \varepsilon(t)\,t\sin(\varphi_0 t)dt \quad \text{і} \quad T^{-3/2}\int_0^T \varepsilon(t)\,t\cos(\varphi_0 t)dt,$$

що випливає із асимптотичної нормальності векторів (12) і (13). Отже,

$$T^{-1/2}Q_T'(\varphi_0) = S_2 + S_7 + \eta_T^{(2)},\ \eta_T^{(2)} \xrightarrow{P} 0,\ T\to\infty.$$

Остаточно отримуємо

$$T^{-1/2}Q_T'(\varphi_0) = 2A_0T^{-1/2}\int_0^T \varepsilon(t)\sin(\varphi_0 t)dt -$$

$$-4A_0T^{-3/2}\int_0^T \varepsilon(t)\,t\sin(\varphi_0 t)dt + \eta_T^{(3)} =$$

$$= 2b_{1T} - 4b_{2T} + \eta_T^{(3)},\ \eta_T^{(3)} \xrightarrow{P} 0,\ T\to\infty.$$

Використовуючи асимптотичну нормальність вектора (12), знайдемо дисперсію $D(T^{-1/2}Q_T'(\varphi_0)) = 4A_0^2 D(b_{1T} - 2b_{2T})$. Нехай $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2)$, $b_T = (b_{1T}, b_{2T})$. Ми довели, що для будь-яких $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2)$ $Ee^{i\langle\lambda, b_T\rangle} \to \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle K_2\lambda,\lambda\rangle\right\}$. Візьмемо $\lambda = (\tau, -2\tau)$. Тоді

$$Ee^{i\tau(b_{1T}-2b_{2T})} \to \exp\left\{-\frac{\tau^2}{2}(K_2^{11} - 4K_2^{12} + 4K_2^{22})\right\},$$

тобто в.в. $b_{1T} - 2b_{2T}$ асимптотично нормальна $N(0, K_2^{11} - 4K_2^{12} + 4K_2^{22})$. Отже, $T^{-1/2}Q_T'(\varphi_0)$ асимптотично, при $T\to\infty$, нормальна $N(0,K)$.

Лема 4. Нехай виконуються умови леми 1, а також умова B1. Тоді для будь-якої в.в. $\tilde{\varphi}_T$, що задовольняє нерівність $|\tilde{\varphi}_T-\varphi_0|\le|\varphi_T-\varphi_0|$ з імовірністю 1 для всіх

$$T>0\,,\ \frac{1}{T^2}Q''_T(\tilde{\varphi}_T)\xrightarrow{P}-\frac{1}{6}A_0^2,\, T\to\infty,$$

маємо

$$\frac{1}{T^2}Q''_T(\tilde{\varphi}_T)=8\left[\int_0^T t\sin\varphi tX(t)\,dt\right]^2-$$

$$-\frac{8}{T}\int_0^T\cos\varphi tX(t)\,dt\frac{1}{T^3}\int_0^T t^2\cos\varphi tX(t)\,dt+$$

$$+8\left[\frac{1}{T^2}\int_0^T t\cos\varphi tX(t)\,dt\right]^2-$$

$$-\frac{8}{T}\int_0^T\sin\varphi tX(t)\,dt\frac{1}{T^3}\int_0^T t^2\sin\varphi tX(t)\,dt=\sum_{i=1}^4 Q_i.$$

Розглянемо інтеграл

$$\frac{1}{T}\int_0^T\cos\tilde{\varphi}_T tX(t)dt=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\cos\tilde{\varphi}_T t[A_0\cos\varphi_0 t+\varepsilon(t)]dt=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\cos\tilde{\varphi}_T t\cos\varphi_0 t\,dt+\frac{1}{T}\int_0^T\cos\tilde{\varphi}_T t\,dt\varepsilon(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2T}\int_0^T A_0(\cos(\tilde{\varphi}_T-\varphi_0)t+\cos(\tilde{\varphi}_T+\varphi_0)t)\,dt+\eta_T^{(4)}=$$

$$=\frac{A_0}{2T}\int_0^T\cos(\tilde{\varphi}_T-\varphi_0)t\,dt+\eta_T^{(5)},\eta_T^{(4)},\eta_T^{(5)}\xrightarrow{P}0,T\to\infty.$$

Використовуючи умову леми та результат теореми 2, знаходимо, що

$$\frac{1}{T}\int_0^T\cos\tilde{\varphi}_T tX(t)\,dt\xrightarrow{P}\frac{A_0}{2},\,T\to\infty.$$

Подібними обчисленнями отримуємо

$$\frac{1}{T^3}\int_0^T t^2\cos\tilde{\varphi}_T tX(t)\,dt\xrightarrow{P}\frac{A_0}{6},\,T\to\infty,$$

а значить, $Q_2\xrightarrow{P}-\frac{2}{3}A_0^2$. Таким же чином маємо $Q_3\xrightarrow{P}\frac{A_0^2}{2}$, а $Q_1,Q_4\xrightarrow{P}0$, $T\to\infty$. Тепер

$$\frac{1}{T^2}Q''_T(\tilde{\varphi}_T)\xrightarrow{P}-\frac{2A_0^2}{3}+\frac{A_0^2}{2}=-\frac{A_0^2}{6},\,T\to\infty.$$

Теорема 3. Нехай виконуються умови леми 1, а також умова B1. Тоді величина $T^{3/2}(\varphi_T-\varphi_0)$ асимптотично нормальна, при $T\to\infty$, з нульовим середнім і дисперсією $48\pi\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2}{j!}f^{*j}(\varphi_0)$.

Оскільки $Q'_T(\varphi_T)=0$, то

$$Q'_T(\varphi_0)+Q''_T(\tilde{\varphi}_T)(\varphi_T-\varphi_0)=0 \qquad (14)$$

з деякою в.в. $\tilde{\varphi}_T$, яка задовольняє нерівність

$$|\tilde{\varphi}_T-\varphi_0|\le|\varphi_T-\varphi_0|,\ \ T\to\infty.$$

З (14) маємо

$$T^{3/2}(\varphi_T-\varphi_0)=-\frac{T^{-1/2}Q'_T(\varphi_0)}{T^{-2}Q''_T(\tilde{\varphi}_T)}.$$

Твердження теореми тепер є наслідком лем 3 і 4.

Теорема 4. Нехай виконуються умови леми 1, а також умова B1. Тоді величина $T^{1/2}(A_T-A_0)$ асимптотично нормальна, при $T\to\infty$, з нульовим середнім і дисперсією $4\pi\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2}{j!}f^{*j}(\varphi_0)$.

Запишемо

$$T^{1/2}(A_T-A_0)=T^{1/2}[Q_T^{1/2}(\varphi_T)-A_0]=$$

$$=T^{1/2}[Q_T(\varphi_T)-A_0^2][Q_T^{1/2}(\varphi_T)+A_0]^{-1}.$$

За лемою 2 маємо

$$Q^{1/2}(\varphi_T)+A_0\xrightarrow{P}2A_0,T\to\infty \qquad (15)$$

Покажемо, що

$$T^{1/2}[Q_T(\varphi_T)-Q_T(\varphi_0)]=T^{1/2}Q'_T(\varphi_0)(\varphi_T-\varphi_0)+$$

$$+\frac{1}{2}T^{1/2}Q''_T(\tilde{\varphi}_T)(\varphi_T-\varphi_0)^2$$

з деякою величиною $\tilde{\varphi}_T$, такою, що $|\tilde{\varphi}_T-\varphi_0|\le$ $\le|\varphi_T-\varphi_0|$. Величина

$$T^{1/2}Q'_T(\varphi_0)(\varphi_T-\varphi_0)=T^{-1/2}Q'_T(\varphi_0)T(\varphi_T-\varphi_0) \qquad (16)$$

збігається за ймовірністю до 0 згідно з теоремою 2 та лемою 3. Для

$$\frac{T^{1/2}}{2}Q''_T(\tilde{\varphi}_T)(\varphi_T-\varphi_0)^2=$$

$$= \frac{1}{T^2} Q_T''(\tilde{\varphi}_T) T^{3/2}(\varphi_T - \varphi_0) T(\varphi_T - \varphi_0)$$

збіжність до 0 за ймовірністю випливає з леми 4 та теорем 2 і 3. Співвідношення (15), (16) дають можливість стверджувати, що асимптотичний розподіл величини $T^{1/2}(A_T - A_0)$ збігається з асимптотичним розподілом

$$\frac{T^{1/2}}{2A_0}[Q_T(\varphi_0) - A_0^2]. \qquad (17)$$

Із формул (3) і (4) бачимо, що $Q_T(\varphi_0) - A_0^2$ веде себе на нескінченності як

$$Z_T(\varphi_0) = \frac{4}{T^2}\left|\int_0^T \varepsilon(t) e^{i\varphi_0 t} dt\right|^2 +$$

$$+ \frac{8A_0}{T^2}\mathrm{Re}\left\{\int_0^T \cos\varphi_0 t\, e^{i\varphi_0 t} dt \int_0^T \varepsilon(t) e^{-i\varphi_0 t} dt\right\}.$$

Розглянемо

$$\frac{1}{T^{3/2}}\left|\int_0^T \varepsilon(t) e^{i\varphi_0 t} dt\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{T^{1/2}}\int_0^T \varepsilon(t) e^{i\varphi_0 t} dt \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon(t) e^{-i\varphi_0 t} dt \xrightarrow{P} 0,\ T \to \infty,$$

тому що 1-й інтеграл асимптотично нормальний, а 2-й збігається до 0 за ймовірністю.

Отже, залишається лише дослідити поведінку

$$T^{-3/2}\mathrm{Re}\left\{\int_0^T \cos\varphi_0 t\, e^{i\varphi_0 t} dt \int_0^T \varepsilon(t) e^{-i\varphi_0 t} dt\right\} =$$

$$= T^{-3/2}\int_0^T \cos^2\varphi_0 t\, dt \int_0^T \varepsilon(t)\cos\varphi_0 t\, dt +$$

$$+ T^{-3/2}\int_0^T \cos\varphi_0 t \sin\varphi_0 t\, dt \int_0^T \varepsilon(t)\sin\varphi_0 t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2T^{1/2}}\int_0^T \varepsilon(t)\cos\varphi_0 t\, dt + \eta_T^{(6)},\ \eta_T^{(6)} \xrightarrow{P} 0,\ T \to \infty.$$

Як було показано раніше, $T^{-1/2}\int_0^T \varepsilon(t)\cos\varphi_0 t\, dt$ є асимптотично нормальною, при $T \to \infty$, в.в. з параметрами 0 і $\pi\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2}{j!} f^{*j}(\varphi_0)$. Звідси отримуємо, що $T^{1/2}(Q_T(\varphi_0) - A_0^2)$ асимптотично нормальна з параметрами 0 та $16\pi A_0^2\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2}{j!} f^{*j}(\varphi_0)$, а отже, і $T^{1/2}(A_T - A_0)$ асимптотично нормальна з параметрами 0 та $4\pi\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2}{j!} f^{*j}(\varphi_0)$.

Теорема 5. Нехай виконуються умови леми 1, а також умова В1. Тоді вектор $(T^{1/2}(A_T - A_0),\ T^{3/2}(\varphi_T - \varphi_0))'$ має асимптотично нормальний, при $T \to \infty$, розподіл з нульовим вектором середніх та матрицею коваріацій

$$2\pi\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2}{j!} f^{*j}(\varphi_0)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 24A_0^{-2}\end{pmatrix}.$$

У теоремах 3 і 4 було показано, що

$$T^{1/2}(A_T - A_0) =$$

$$= 2T^{-1/2}\int_0^T \varepsilon(t)\cos\varphi_0 t\, dt + \eta_T^{(6)},\ \eta_T^{(6)} \xrightarrow{P} 0,\ T \to \infty, \qquad (18)$$

$$T^{3/2}(\varphi_T - \varphi_0) = 12A_0^{-1}T^{-1/2}\int_0^T \varepsilon(t)\sin\varphi_0 t\, dt +$$

$$+ 24A_0^{-1}T^{-3/2}\int_0^T \varepsilon(t)\, t\sin\varphi_0 t\, dt + \eta_T^{(6)}, \qquad (19)$$

$\eta_T^{(6)} \xrightarrow{P} 0,\ T \to \infty$. Відмітимо, що спектральна міра $\mu(d\lambda)$ вектора $[\sin\varphi_0 t, t\sin\varphi_0 t, \cos\varphi_0 t]$ має вигляд

$$\mu(d\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha & -i\beta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha & \alpha & -i\beta \\ -i\beta & -i\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

де α – міра, зосереджена в точках $\pm\varphi_0$, причому $\alpha(\{\pm\varphi_0\}) = \frac{1}{2}$, а заряд $\beta(\{\pm\varphi_0\}) = \pm\frac{1}{2}$.

Знову використаємо частковий випадок теореми [16].

Теорема″. Нехай виконуються умови леми 1, а також умова В1. Тоді випадковий вектор

$$\left[d_{1T}^{-1}\int_0^T \varepsilon(t)\sin\varphi_0 t,\, d_{2T}^{-1}\int_0^T \varepsilon(t)\, t\sin\varphi_0 t,\right.$$

$$\left. d_{3T}^{-1}\int_0^T \varepsilon(t)\cos\varphi_0 t\right]'$$

є асимптотично нормальним, при $T\to\infty$, $N(0,K)$, де

$$K = 2\pi\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2}{j!}f^{*j}(\varphi_0)\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи цей результат, зображення (18), (19) та результат теорем 3 і 4, отримуємо твердження теореми.

Висновки

Отримання достатніх умов асимптотичної нормальності консистентних періодограмних оцінок амплітуди та кутової частоти гармонічного коливання в моделі спостереження із сильнозалежним випадковим шумом дає можливість зробити наступний крок у вивченні періодограмних оцінок у моделях із сильнозалежним шумом, а саме отримати аналогічні результати для суми гармонічних коливань.

1. *Серебренников М.Г., Первозванский А.А.* Выявление скрытых периодичностей. – М.: Наука, 1965. – 244 с.
2. *P. Whittle,* “The simultaneous estimation of a time series harmonic components and covariance structure”, Trabajos Estadistica, vol. 3, pp. 43–57, 1952.
3. *A.M. Walker,* “On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals”, Adv. in Appl. Probability, vol. 5, pp. 217–241, 1973.
4. *E.J. Hannan,* “The estimation of frequency”, J. Appl. Probability, vol. 10, pp. 510–519, 1973.
5. *A.V. Ivanov,* “A solution of the problem of detecting hidden periodicities”, Theor. Probability and Math. Statist., no. 20, pp. 51–68, 1980.
6. *Кнопов П.С.* Оптимальные оценки параметров стохастических систем. – К.: Наук. думка, 1981. – 152 с.
7. *Гречка Г.П., Дороговцев А.Я.* Об асимптотических свойствах периодограмной оценки частоты и амплитуды гармонического колебания // Вычисл. и прикл. математика. – 1976. – Вып. 28. – С. 18–31.
8. *S. Chatterjee and V.C. Vani,* “An Extended Matched Filtering Methods to Detect Periodicities in a Rough Grating for Extremely Large Roughness”, Bull. of the Astronomical Society of India, vol. 31, pp. 457–459, 2003.
9. *A.V. Levenets et al.,* “Estimating signal spectra with a method of determining concealed periodicities in zero crossings”, Measurement Techniques, vol. 39, no. 9, pp. 909–913, 1996.
10. *S. Chatterjee and V.C. Vani,* “Scattering of light by a periodic structure in the presence of randomness. V. Detection of successive peaks in a periodic structure”, Appl. Optics, vol. 45, pp. 8939–8944, 2006.
11. *M. Hinich,* “Detecting a hidden periodic signal when its period is unknown, Acoustics”, Speech and Signal Proc., vol. 30, is. 5, pp. 747–750, 1982.
12. *I. Iavorskyj and V. Mykhajlyshyn*, “Detecting hidden periodicity of time-series generated by nonlinear processes in magneto-plasma”, in Proc. 6th Int. Conf. on Volume “Mathematical methods in Electromagnetic Theory”, is. 10-13, 1996, pp. 397–400.
13. *H. Arsham,* “A test sensitive to extreme hidden periodicities”, Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, vol. 11, no. 4, pp. 323–330, 1997.
14. *J. Malisic et al.,* “Application of some statistical tests for hidden periodicity in the Serbian annual precipitation sums”, Hungarian Meteorological Service, vol. 103, no. 4, pp. 237–247, 1999.
15. *Жураковський Б.М., Іванов О.В.* Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів суми гармонічних коливань у моделях із сильнозалежним шумом // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2010. – № 4. – С. 60–66.
16. *Жураковський Б.М.* Відшукання прихованих періодичностей у моделі із сильнозалежним випадковим шумом: Дипл. робота: 01.01.05; НТУУ “КПІ”. – К., 2010. – 74 с.
17. *B.G. Quinn and E.J. Hannan*, The Estimation and Tracking of Frequency. New York: Cambridge University Press, 2001.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
9 квітня 2012 року