УДК 517.98

А.А. Кириченко, О.В. Стрілець

СТРУКТУРА НАБОРУ ОРТОПРОЕКТОРІВ, ПОВ'ЯЗАНИХ З ЦИКЛОМ І АНТЕНОЮ

In this paper we study algebras of Temperley–Lieb type generated by orthogonal projections related with unicyclic graph is a cycle with the antenna. The goal of the paper is to study representations in a Hilbert space of such algebras in the simplest case and find a complete description of the set parameters when such representations exist. Simplest algebra corresponds to unicyclic connected graph that is a cycle connected by an edge by one separate vertex. Parameters of such algebras are the set of angles between pairs of subspaces that are images of orthogonal projections corresponding to points in the graph, connected by edge. For every non-trivial irreducible representation, images of all orthogonal projections are one-dimensional. Depending on angles: a) the problem has a tame type (irreducible representations parametrized by the circle or closed circular arc); b) a single irreducible representation exists; c) nonzero representations does not exist. The results is recieved due to Gram matrices technic using.

Вступ

Класифікація наборів ортопроекторів є класичною задачею теорії зображень. Розв'язок цієї задачі для пари ортопроекторів добре відомий (див., наприклад, [1]). Задача опису трійки ортопроекторів, навіть якщо два з них комутують, є *-дикою задачею (див. [2]). Тому для вивчення наборів ортопроекторів доцільно ввести додаткові обмеження на них. Праця [3] присвячена наборам ортопроекторів, таким, що для кожної пари P і Q, $P^2 = P^* = P, Q^2 = = Q^* = Q$, між ними заданий кут $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, тобто або виконується співвідношення $PQP = \tau P$, $QPQ = \tau Q$, $\tau = \cos^2\varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, або ортопроектори ортогональні: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ і $PQ = QP = 0$.

З набором ортопроекторів зручно пов'язати помічені графи. Вершини графа відповідають ортопроекторам. Якщо між двома ортопроекторами задано кут, то на відповідному ребрі пишемо τ, якщо ж ортопроектори ортогональні, то ребро у графі відсутнє.

Більш детально. Нехай Γ — неорієнтований зв'язний скінченний граф з множиною вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ і множиною ребер E. Розглянемо алгебру

$$TL_{\Gamma,\tau,\perp} = C\langle p_1, \ldots, p_n : p_i^2 = p_i^* = p_i, i = 1, \ldots, n,$$

$$p_i p_j p_i = \tau_i p_i,\ (i, j) \in E, p_i p_j = 0, (i, j) \notin E \rangle .$$

де τ — функція на ребрах графа Γ із значеннями τ_{ij}, $0 < \tau_{ij} < 1$. Зображення такої алгебри задає набір ортопроекторів з відповідними кутами між підпросторами, на які проектують ортопроектори.

Узагальненою розмірністю скінченновимірного зображення $\pi : H \to H$ алгебри $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ називають вектор $(\dim H; \dim \pi(p_1), \ldots, \dim \pi(p_n))$.

На випадок, коли Γ — дерево, ненульове незвідне зображення єдине і скінченновимірне (див. [4]).

У [5, 6] вивчався випадок, коли Γ — цикл. Тут також виникають скінченновимірні зображення, але їх кількість залежить від параметра.

Алгебри, пов'язані з уніциклічними графами, вивчались у працях [3, 4]. Було показано, що за досить малих значень τ множина зображень таких алгебр параметризується кутом $\varphi \in (-\pi, \pi]$. При збільшенні значень τ множина кутів може, взагалі кажучи, зменшуватись. Так, за однакових значень параметра τ для циклу є повна відповідь (див. [6]):

1) при $\tau \le \frac{1}{4}$ зображення існують для всіх $\varphi \in (-\pi, \pi]$;

2) існує число $\tau_1 \in (0,1]$, яке залежить від кількості вершин циклу, таке, що: а) при $\frac{1}{4} < \tau < \tau_1$ зображення існують для всіх φ з деякого замкненого інтервалу, що залежить від τ; б) при $\tau = \tau_1$ ненульове зображення єдине; в) при $\tau > \tau_1$ ненульових зображень взагалі не існує.

Якщо граф містить два і більше циклів, то задача опису зображень за малих τ стає *-дикою (див. [2]).

Постановка задачі

У статті за допомогою відповідних матриць Грама (див. [3, 7] та ін.) досліджується приклад алгебри $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$, коли уніциклічний граф не є циклом. Ми описуємо множину параметрів, за яких існують незвідні зображення, а також їх кількість і структуру залежно від параметрів.

Опис зображень алгебр, пов'язаних з уніциклічними графами

Наведемо потрібні визначення і твердження з праці [3] у термінах теорії зображень.

Нехай $\Gamma=(C_m;\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m)$ — зв'язний уніциклічний граф, де $C_m=(V_0,R_0)$ — цикл: $V_0=\{1,\ldots,m\}$, $\gamma_{ij}\in R_0\Leftrightarrow |i-j|=1\,(\operatorname{mod} m)$, а $\Gamma_k=(V_k,R_k)$, $k=1,\ldots,m$ — дерева, причому їх множини вершин попарно не перетинаються і $k\in V_k$, $k=1,\ldots,m$. Тоді множина вершин графа $V=V_1\cup\ldots\cup V_m$, а множина ребер $R=$ $=R_0\cup R_1\cup\ldots\cup R_m$. Визначимо матрицю $B_{\Gamma,\tau,\varphi}=$ $=(b_{ij}),\varphi\in[0,2\pi)$, що складається з елементів

$$b_{kj}=\begin{cases}1, & k=j, k\in V,\\ \sqrt{\tau_{kj}}, & k\neq j, \gamma_{kj}\in R\setminus\{\gamma_{1m}\},\\ e^{i\varphi}\sqrt{\tau_{1m}}, & k=1, j=m,\\ e^{-i\varphi}\sqrt{\tau_{1m}}, & k=m, j=1,\\ 0, & k\neq j, \gamma_{kj}\notin R.\end{cases}$$

Розглянемо лінійний простір L, породжений векторами $e_1,\ldots,e_n$. Визначимо $B(e_i,e_j)=$ $=b_{ij}$ і довизначимо B до напівлінійної форми на L.

Нехай $\Phi_\tau\subset[0,2\pi)$ — множина тих φ, для яких матриця $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ невід'ємно визначена. Для тих $\varphi\in\Phi_\tau$, для яких $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ додатно визначена, введемо скалярний добуток $\langle x,y\rangle=B(x,y)$. Отриманий гільбертів простір позначимо $H_{\tau,\varphi}$. Для тих $\varphi\in\Phi_\tau$, для яких матриця $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ не є додатно визначеною, візьмемо за $H_{\tau,\varphi}$ фактор-простір простору L по ядру форми B. Таким чином, гільбертів простір $H_{\tau,\varphi}$ породжений множиною векторів $e_1,\ldots,e_n$, кожен з яких має одиничну норму, і матриця $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ є матрицею Грама цієї множини векторів.

Нехай P_i — ортогональний проектор на одновимірний підпростір простору $H_{\tau,\varphi}$, породжений вектором e_i. Визначимо відображення $\pi_\varphi: TL_{\Gamma,\tau,\perp}\to B(H_{\tau,\varphi}): p_i\to P_i$.

Теорема 1. Нехай Γ — уніциклічний граф, Φ_τ — множина всіх $\varphi\in[0,2\pi)$, таких, що матриця $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ невід'ємно визначена.

Тоді незвідне зображення алгебри $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ існує тоді і тільки тоді, коли множина Φ_τ не порожня, при цьому з точністю до унітарної еквівалентності для кожного $\varphi\in\Phi_\tau$ існує єдине незвідне зображення π_φ і всі вони не еквівалентні між собою.

Для узагальненої розмірності зображення π_φ справедлива рівність $\dim\pi_\varphi=(n';1,\ldots,1)$, де $n'=n$, якщо матриця $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ додатно визначена, і $n'=n-1$ або $n'=n-2$ у протилежному випадку.

Зображення алгебри, пов'язаної з циклом і антеною

Нехай Γ — цикл з трьома вершинами і антеною, тобто граф, який отримується з циклу $C_3=\{1,2,3\}$ додаванням вершини 4 і ребра $(3,4)$. Ми розглядаємо випадок, коли значення міток-параметрів на циклі збігаються: $\tau_{12}=\tau_{13}=\tau_{23}=\tau$, $\tau_{34}=\delta$. Оскільки функція на ребрах графа набуває лише двох значень τ і δ, то далі в індексах замість функції $\tau=\tau(.)$ будемо записувати значення параметрів τ і δ.

У цьому випадку матриця $B_{\Gamma,\tau,\delta,\varphi}$ набуде вигляду

$$B_{\Gamma,\tau,\delta,\varphi}=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{\tau} & \sqrt{\tau}e^{-i\varphi} & 0\\ \sqrt{\tau} & 1 & \sqrt{\tau} & 0\\ \sqrt{\tau}e^{i\varphi} & \sqrt{\tau} & 1 & \sqrt{\delta}\\ 0 & 0 & \sqrt{\delta} & 1\end{pmatrix}.$$

Діагональні мінори матриці $B_{\Gamma,\tau,\delta,\varphi}$:

$$M_{12}=M_{13}=M_{23}=1-\tau,\quad M_{14}=M_{24}=1,$$

$$M_{34} = 1 - \delta,$$

$$M_{124} = 1 - \tau, M_{134} = M_{234} = 1 - \tau - \delta,$$

$$M_{123} = 1 - 3\tau + 2\sqrt{\tau^3}\cos\varphi,$$

$$M_{1234} = M_{123} - \delta M_{12} = 1 - 3\tau + 2\sqrt{\tau^3}\cos\varphi - \delta(1-\tau).$$

При $\tau \le 1-\delta$ виконуються нерівності $M_{ij} > 0$, $M_{124} \ge 0, M_{134} \ge 0, M_{234} \ge 0$. Умова $M_{123} > 0$ випливає з умов $M_{12} > 0$ і $M_{1234} \ge 0$. Умова $M_{1234} \ge 0$ рівносильна

$$\cos\varphi \ge \lambda = -\frac{1-3\tau-\delta(1-\tau)}{2\sqrt{\tau^3}}. \qquad (1)$$

Зауважимо:

1) при $\lambda \le -1$ нерівність (1) виконується для будь-якого $\varphi \in (-\pi, \pi]$;

2) при $\lambda \in (-1, 1)$ нерівність виконується для всіх $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$, $\varphi_0 = \arccos\lambda$;

3) при $\lambda = 1$ нерівність виконується тільки для $\varphi = 0$;

4) при $\lambda > 1$ нерівність не виконується.

Знайдемо τ, δ такі, що $\lambda \le -1$. Позначимо $s = \sqrt{\tau}$, тоді

$$-\frac{1-3s^2-\delta(1-s^2)}{2s^3} \le -1,$$

$$2s^3 - (\delta-3)s^2 - (1-\delta) \le 0,$$

$$(s+1)(2s^2 + (1-\delta)s + (\delta-1)) \le 0,$$

$$(s+1)\left(s - \frac{\sqrt{(9-\delta)(1-\delta)} - (1-\delta)}{4}\right)\times$$

$$\times\left(s + \frac{\sqrt{(9-\delta)(1-\delta)} + (1-\delta)}{4}\right) \le 0.$$

Оскільки $s \in (0,1)$, то умова $\lambda \le -1$ рівносильна $s \in (0, s_0)$, де $s_0 = \frac{\sqrt{(9-\delta)(1-\delta)} - (1-\delta)}{4}$, тобто $\tau_0 = \frac{(1-\delta)(\sqrt{9-\delta} - \sqrt{1-\delta})^2}{16}$.

Оскільки $(\sqrt{9-\delta} - \sqrt{1-\delta})^2 \le (\sqrt{9-\delta} + \sqrt{1-\delta})^2 < 16$ при $0 < \delta < 1$, то $\tau_0 < 1-\delta$.

Знайдемо τ, δ такі, що $\lambda \le 1$:

$$-\frac{1-3s^2-\delta(1-s^2)}{2s^3} < 1,$$

$$2s^3 - (3-\delta)s^2 + (1-\delta) > 0,$$

$$(s-1)(2s^2 + (1-\delta)s + (\delta-1)) > 0,$$

$$(s-1)\left(s - \frac{\sqrt{(9-\delta)(1-\delta)} - (1-\delta)}{4}\right)\times$$

$$\times\left(s + \frac{\sqrt{(9-\delta)(1-\delta)} + (1-\delta)}{4}\right) > 0.$$

Оскільки $s \in (0,1)$, то умова $\lambda < 1$ рівносильна $s \in (0, s_1)$, де $s_1 = \frac{\sqrt{(9-\delta)(1-\delta)} + (1-\delta)}{4}$, тобто $\tau_1 = \frac{(1-\delta)(\sqrt{9-\delta} + \sqrt{1-\delta})^2}{16}$, при цьому $\tau_1 < 1-\delta$.

Оскільки для зображення π_φ ранг матриці $B_{\Gamma,\tau,\delta,\varphi}$ дорівнює розмірності зображення, то з $M_{124} = 1-\tau > 0$ випливає, що розмірність зображення не менша 3, а з $M_{1234} > 0$ випливає, що розмірність зображення дорівнює 4.

Отже, ми довели теорему.

Теорема 2. Для будь-якого $\delta \in (0,1)$ всі незвідні зображення з точністю до унітарної еквівалентності описуються таким чином:

1) при $\tau \in (0, \tau_0]$ для будь-якого $\varphi \in (-\pi, \pi]$ існує єдине зображення π_φ і його узагальнена розмірність $\dim \pi_\varphi = (4;1,1,1,1)$;

2) при $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ для будь-якого $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$, $\varphi_0 = \arccos\lambda$, існує єдине зображення π_φ. При цьому $\dim \pi_\varphi = (4;1,1,1,1)$, якщо $\varphi \in (-\varphi_0, \varphi_0)$, і $\dim \pi_\varphi = (3;1,1,1,1)$ у випадку $\varphi = \varphi_0$;

3) при $\tau = \tau_1$ зображення π_φ існує тільки при $\varphi = 0$ і $\dim \pi_0 = (3;1,1,1,1)$;

4) при $\tau > \tau_1$ ненульових зображень взагалі не існує.

Висновки

У статті описані зображення, їх структура та множина параметрів, за яких зображення існують, для одного класу алгебр типу Темперлі–Ліба, пов'язаного з циклом і антеною. Отримані результати можуть бути застосовані при подальших дослідженнях зображень алгебр, породжених проекторами, та для опису наборів підпросторів гільбертового простору.

* * *

Автори висловлюють подяку Ю.С. Самойленку за корисні поради та зауваження.

1. *P.R. Halmos*, "Two subspaces", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 144, pp. 381–389, 1969.
2. *S.A. Kruglyak, Yu.S. Samoilenko*, "On complexity of description of representations of *-algebras generated by idepotents", Proc. Am. Math. Soc., vol. 128, no. 6, pp. 1655–1664, 2000.
3. *Самойленко Ю.С., Стрелец А.В.* О простых n-ках подпространств гильбертова пространства // Укр. мат. журнал. – 2009. – **61**, № 12. – С. 1668–1703.
4. *M. Vlasenko*, "On the growth of an algebra generated by a system of projections with fixed angles", Methods of Funct. Anal. and Topology, vol. 10, no. 1, pp. 98–104, 2004.
5. *Власенко М.А., Попова Н.Д.* О конфигурациях подпространств гильбертова пространства с фиксированными углами между ними // Укр. мат. журнал. – 2004. – **56**, № 5. – С. 606–615.
6. *N.D. Popova,* "On finite-dimensional representations of one algebra of Temperley-Lieb type", Methods of Funct. Anal. and Topology, vol. 7, no. 3, pp. 80–92, 2001.
7. *Стрелец А.В., Фещенко И.С.* О системах подпространств гильбертова пространства, удовлетворяющих условиям на углы между каждой парой подпространств // Алгебра и анализ. – 2012. – **24**, № 5. – С. 181–214.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
21 вересня 2012 року