УДК 517.956.3

М.М. Копець

ІНТЕГРУВАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

In this paper the method for determining the general solution of the system of first-order linear homogeneous partial differential equations is proposed. This method is the generalization of Euler method for defining general solution of linear homogeneous partial differential equation. The essence of Euler method implies that qui pro quo the solution of the equation $a\frac{\partial^n z(t,x)}{\partial t^n}+b\frac{\partial^n z(t,x)}{\partial t^{n-1}\partial x}+c\frac{\partial^n z(t,x)}{\partial t^{n-2}\partial x^2}+\mathbf{L}+l\frac{\partial^n z(t,x)}{\partial x^n}=0$ can be found in the form $z(t,x)=p(x+\lambda t)$ where n times of continuously differentiable function $p(x)$ and numerical parameter λ. The paper studies the analogue of Euler method for the next system of linear homogeneous partial differential equations $\frac{\partial \mathrm{z}(t,x,y)}{\partial t}=\mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{z}(t,x,y)}{\partial x}+\mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{z}(t,x,y)}{\partial y}$. The formulae for determining general solution of this system are proposed in two cases: a) the matrices A and B are diagonal; b) the matrices A and B are commutative. To illustrate the obtained results some specific examples are considered.

Вступ

Розглянемо наступне лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними

$$a\frac{\partial^n z(t,x)}{\partial t^n}+b\frac{\partial^n z(t,x)}{\partial t^{n-1}\partial x}+c\frac{\partial^n z(t,x)}{\partial t^{n-2}\partial x^2}+ \dots + l\frac{\partial^n z(t,x)}{\partial x^n}=0, \quad (1)$$

де $a,b,c,\mathbf{K},l$ – задані дійсні числа; $z(t,x)$ – шукана функція, частинні похідні у всіх членів рівняння (1) одного і того ж порядку n. Рівняння (1) можна знайти в монографії [1]. Там само описано метод Ейлера для відшукання загального розв'язку рівняння (1). Цей метод полягає в тому, що невідому функцію $z(t,x)$ шукаємо у вигляді $z(t,x)=p(x+\lambda t)$, де потрібно знайти n разів неперервно диференційовану функцію $p(x)$ і параметр λ. Очевидно, що мають місце такі рівності $\frac{\partial^n z(t,x)}{\partial t^k \partial x^{n-k}}=$ $=\lambda^k p^{(n)}(x+\lambda t)$, $k=n,n-1,n-2,\dots,2,1,0$. Підставляючи ці вирази в рівняння (1), знаходимо

$$(a\lambda^n+b\lambda^{n-1}+c\lambda^{n-2}+\dots+l)p^{(n)}(x+\lambda t)=0. \quad (2)$$

Співвідношення (2) матиме місце, якщо число λ буде коренем наступного рівняння:

$$a\lambda^n+b\lambda^{n-1}+c\lambda^{n-2}+\dots+l=0. \quad (3)$$

Нехай $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_n$ – корені рівняння (3). Спочатку вважаємо, що всі вони дійсні і різні. Тоді кожна із функцій $p_1(x+\lambda_1 t), p_2(x+\lambda_2 t)$, $p_3(x+\lambda_3 t),\dots,p_n(x+\lambda_n t)$ задовольняє рівнянню (1) і його загальний розв'язок можна навести у вигляді

$$z(t,x)=p_1(x+\lambda_1 t)+p_2(x+\lambda_2 t)+ + p_3(x+\lambda_3 t)+\dots+p_n(x+\lambda_n t). \quad (4)$$

У випадку, коли корінь λ_1 має, наприклад, кратність три, вираз (4) матиме такий вигляд:

$$z(t,x)=p_1(x+\lambda_1 t)+tp_2(x+\lambda_1 t)+ + t^2 p_3(x+\lambda_1 t)+p_4(x+\lambda_2 t)+\dots+p_n(x+\lambda_n t),$$

тобто замість $p_2(x+\lambda_2 t)$ беремо $tp_2(x+\lambda_1 t)$, аналогічно замість $p_3(x+\lambda_3 t)$ підставляємо $t^2 p_3(x+\lambda_1 t)$.

Постановка задачі

Мета роботи – обґрунтувати застосування описаного вище методу для знаходження розв'язків деяких систем лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку.

Оскільки за певних умов диференціальне рівняння n-го порядку можна подати у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку, то цілком логічною є ідея використання методу Ейлера для інтегрування деяких систем лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. Розглянемо наступну систему лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку

$$\frac{\partial \mathrm{z}(t,x,y)}{\partial t}=\mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{z}(t,x,y)}{\partial x}+\mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{z}(t,x,y)}{\partial y},$$

$$t > 0,\ 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty, \qquad (5)$$

де A і B – задані квадратні матриці порядку n, елементами яких є дійсні числа; $\mathrm{z}(t,x,y)$ – шукана $n\times 1$-вимірна вектор-функція. Потрібно знайти розв'язок $\mathrm{z}(t,x,y)$ рівняння (5), який задовольняє початкову умову

$$\mathrm{z}(0,x,y) = \mathrm{h}(x,y),$$
$$0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty, \qquad (6)$$

де $\mathrm{h}(x,y)$ – задана $n\times 1$-вимірна вектор-функція, неперервна разом зі своїми частинними похідними першого порядку, тобто для системи рівнянь (5) маємо задачу Коші.

Допоміжні результати

Розглянемо таку систему двох лінійних диференціальних систем з частинними похідними:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_1(t,x)}{\partial t} = a\dfrac{\partial z_2(t,x)}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial z_2(t,x)}{\partial t} = a\dfrac{\partial z_1(t,x)}{\partial x}, \end{cases} \quad t > 0,\ 0 < x < \infty, \qquad (7)$$

де a – задане дійсне число. Потрібно знайти розв'язок системи рівнянь (7), який задовольняє початкові умови:

$$z_1(0,x) = f(x), \quad z_2(0,x) = g(x), \quad 0 < x < \infty. \qquad (8)$$

Функції $f(x)$ і $g(x)$ – це задані неперервно диференційовані функції. Систему рівнянь (7) можна переписати в такій матрично-векторній формі:

$$\frac{\partial \mathrm{z}(t,x)}{\partial t} = \mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{z}(t,x)}{\partial x}, \quad t > 0,\ 0 < x < \infty, \qquad (9)$$

де матриця A має вигляд: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, вектор $\mathrm{z}(t,x)$ заданий так: $\mathrm{z}(t,x) = \begin{pmatrix} z_1(t,x) \\ z_2(t,x) \end{pmatrix}$. Очевидно, що власні значення матриці A дорівнюють $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = a$. Їм відповідають власні вектори $\mathrm{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Далі розглянемо матрицю S, утворену за допомогою цих векторів:

$$\mathrm{S} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Безпосередньо знаходимо $\mathrm{S}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Далі зробимо заміну $\mathrm{z}(t,x) = \mathrm{S}\,\mathrm{r}(t,x)$. Унаслідок такої заміни рівняння (9) буде мати вигляд

$$\mathrm{S}\frac{\partial \mathrm{r}(t,x)}{\partial t} = \mathrm{AS}\frac{\partial \mathrm{r}(t,x)}{\partial x},$$
$$t > 0,\ 0 < x < \infty.$$

Тепер, якщо помножити останнє рівняння зліва на матрицю S^{-1}, то в результаті отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{\partial \mathrm{r}(t,x)}{\partial t} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{AS}\frac{\partial \mathrm{r}(t,x)}{\partial x}, \quad t > 0,\ 0 < x < \infty. \qquad (11)$$

За допомогою безпосереднього обчислення знаходимо, що матриця $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{AS}$ має діагональну форму, тобто $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{AS} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Тому систему (11) можна переписати так:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r_1(t,x)}{\partial t} = -a\dfrac{\partial r_1(t,x)}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial r_2(t,x)}{\partial t} = a\dfrac{\partial r_2(t,x)}{\partial x}, \end{cases} \quad t > 0,\ 0 < x < \infty, \qquad (12)$$

Легко побачити, що функції $r_1(t,x) = p_1(x-at)$ і $r_2(t,x) = p_2(x+at)$, де $p_1(x)$ і $p_2(x)$ – довільні диференційовані функції, є розв'язком системи рівнянь (12). Оскільки $\mathrm{z}(t,x) = \mathrm{S}\,\mathrm{r}(t,x)$, то далі знаходимо

$$\begin{aligned} z_1(t,x) &= p_1(x-at) + p_2(x+at), \\ z_2(t,x) &= -p_1(x-at) + p_2(x+at). \end{aligned} \qquad (13)$$

Покажемо, що функції (13) є загальним розв'язком системи рівнянь (12). Беручи до уваги початкові умови (8), маємо $p_1(x) + p_2(x) = f(x)$, $-p_1(xt) + p_2(x) = g(x)$. З двох останніх рівностей маємо $p_1(x) = \dfrac{f(x)-g(x)}{2}$, $p_2(x) = \dfrac{f(x)+g(x)}{2}$. Тому розв'язок задачі Коші (7), (8) має вигляд

$$z_1(t,x) = \frac{f(x+at) + f(x-at) + g(x+at) - g(x-at)}{2},$$

$$z_2(t,x) = \frac{f(x+at) - f(x-at) + g(x+at) + g(x-at)}{2}.$$

Далі розглянемо наступне узагальнення задачі Коші (7)–(8):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_1(t,x,y)}{\partial t} = a\dfrac{\partial z_2(t,x,y)}{\partial x} + b\dfrac{\partial z_2(t,x,y)}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial z_2(t,x,y)}{\partial t} = a\dfrac{\partial z_1(t,x,y)}{\partial x} + b\dfrac{\partial z_1(t,x,y)}{\partial y}, \end{cases} \qquad (14)$$

$$t > 0,\ 0 < x < \infty, 0 < y < \infty,$$

$$z_1(0,x,y) = f(x,y), \quad z_2(0,x,y) = g(x,y), \qquad (15)$$
$$0 < x < \infty, 0 < y < \infty.$$

Вважаємо, що a, b – задані числа; $f(x,y)$, $g(x,y)$ – задані неперервні функції разом з неперервними своїми частинними похідними першого порядку. Систему рівнянь (14) можна переписати в наступній матрично-векторній формі:

$$\frac{\partial \mathrm{z}(t,x,y)}{\partial t} = \mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{z}(t,x,y)}{\partial x} + \mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{z}(t,x,y)}{\partial y}, \quad t>0,\ 0<x<\infty, 0<y<\infty, \qquad (16)$$

де матриці A і B мають відповідно такий вигляд: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$, вектор $\mathrm{z}(t,x)$ заданий так: $\mathrm{z}(t,x,y) = \begin{pmatrix} z_1(t,x,y) \\ z_2(t,x,y) \end{pmatrix}$. Як і в попередньому випадку, маємо $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{AS} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{BS} = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, де $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді система (16) після заміни $\mathrm{z}(t,x,y) = \mathrm{Sr}(t,x,y)$ матиме вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r_1(t,x,y)}{\partial t} = -a\dfrac{\partial r_1(t,x,y)}{\partial x} - b\dfrac{\partial r_1(t,x,y)}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial r_2(t,x,y)}{\partial t} = a\dfrac{\partial r_2(t,x,y)}{\partial x} + b\dfrac{\partial r_2(t,x,y)}{\partial y}, \end{cases} \quad t>0,\ 0<x<\infty, 0<y<\infty, \qquad (17)$$

Очевидно, що функції $r_1(t,x,y) = p_1(x-at, y-bt)$ і $r_2(t,x,y) = p_2(x+at, y+bt)$, де $p_1(x,y)$ і $p_2(x,y)$ – довільні неперервно диференційовані по своїх аргументах функції, є розв'язком системи рівнянь (17). Враховуючи, що $\mathrm{z}(t,x,y) = \mathrm{Sr}(t,x,y)$, отримаємо

$$\begin{aligned} z_1(t,x,y) &= p_1(x-at, y-bt) + p_2(x+at, y+bt), \\ z_2(t,x,y) &= -p_1(x-at, y-bt) + p_2(x+at, y+bt). \end{aligned} \qquad (18)$$

З початкових умов (15) знаходимо функції $p_1(x,y)$ і $p_2(x,y)$. Маємо

$$p_1(x,y) + p_2(x,y) = f(x,y),$$
$$-p_1(x,y) + p_2(x,y) = g(x,y).$$

Звідси знаходимо

$$p_1(x,y) = \frac{f(x,y) - g(x,y)}{2},$$
$$p_2(x,y) = \frac{f(x,y) + g(x,y)}{2}.$$

Із врахуванням цих співвідношень формули (18) матимуть вигляд

$$\begin{cases} z_1(t,x,y) = \\ = \dfrac{\varphi(t,x,y) + \psi(t,x,y) + \phi(t,x,y) - \omega(t,x,y)}{2}, \\ z_2(t,x,y) = \\ = \dfrac{\varphi(t,x,y) - \psi(t,x,y) + \phi(t,x,y) + \omega(t,x,y)}{2}, \end{cases} \qquad (19)$$

де введені позначення: $\varphi(t,x,y) = f(x+at, y+bt)$, $\psi(t,x,y) = f(x-at, y-bt)$, $\phi(t,x,y) = g(x+at, y+bt)$, $\omega(t,x,y) = g(x-at, y-bt)$.

Теорема 1. Загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними (14) має вигляд (18), де $p_1(x,y)$ і $p_2(x,y)$ – довільні неперервно диференційовані по своїх аргументах функції. Розв'язок задачі Коші (14), (15) дається формулами (19).

Основні результати

Тепер повернемося до задачі Коші (5) і (6). Спочатку припустимо, що матриці A і B є діагональними

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \mathbf{K} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \mathbf{K} & 0 & 0 \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \mathbf{K} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & \mathbf{K} & 0 & 0 \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & \mu_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & 0 & \mu_n \end{pmatrix}, \qquad (20)$$

де всі власні числа $\lambda_1, \lambda_2, \mathbf{K}, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ та $\mu_1, \mu_2, \mathbf{K}, \mu_{n-1}, \mu_n$ є дійсними і різними. Згідно з термінологією [2], системи такого типу називаються гіперболічними у вузькому сенсі. В цьому система рівнянь (5) складається із n незв'язаних між собою рівнянь, які можна розв'язувати незалежно одне від одного, тобто маємо

$$\frac{\partial z_i(t,x,y)}{\partial t} = \lambda_i\frac{\partial z_i(t,x,y)}{\partial x} + \mu_i\frac{\partial z_i(t,x,y)}{\partial y}, \qquad (21)$$

$$t>0,\ 0<x<\infty, 0<y<\infty, \quad i = 1, 2, \mathbf{K}, n-1, n.$$

Початкові умови для рівнянь (21) із врахуванням співвідношення (6) відповідно матимуть вигляд

$$z_i(0,x,y) = h_i(x,y), \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty, \quad i = 1,2,\ldots,n-1,n. \tag{22}$$

На підставі викладеного вище приходимо до висновку, що загальний розв'язок кожного із рівнянь системи (21) задається таким чином:

$$z_i(t,x,y) = p_i(x+\lambda_i t, y+\mu_i t), \quad t>0,\ 0<x<\infty, 0<y<\infty, \quad i=1,2,\ldots,n-1,n. \tag{23}$$

де $p_i(x+\lambda_i t, y+\mu_i t)$, $t>0,\ 0<x<\infty, 0<y<\infty$, $i=1,2,\ldots,n-1,n$ – довільні функції, що мають неперервні частинні похідні першого порядку. Для знаходження частинних розв'язків, які задовольняють початкові умови (22), маємо на підставі співвідношень (22) і (23) такі формули:

$$z_i(t,x,y) = h_i(x+\lambda_i t, y+\mu_i t), \quad t>0,\ 0<x<\infty, 0<y<\infty, \quad i=1,2,\ldots,n-1,n, \tag{24}$$

оскільки справедливі рівності $p_i(x,y)=h_i(x,y)$, $0<x<\infty, 0<y<\infty$, $i=1,2,\ldots,n-1,n$. Отже, доведено наступне твердження.

Теорема 2. Якщо матриці A і B мають вигляд (20), де всі власні числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1},\lambda_n$ та $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{n-1},\mu_n$ є дійсними і різними, то загальний розв'язок системи рівнянь (5) описується співвідношеннями (23), а розв'язок задачі Коші (5), (6) подається формулами (24).

Приклад 1. Нехай матриці A і B задані таким чином:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

тобто розглядається такий частинний випадок системи рівнянь (5)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_1(t,x,y)}{\partial t} = 5\dfrac{\partial z_1(t,x,y)}{\partial x} + 7\dfrac{\partial z_1(t,x,y)}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial z_2(t,x,y)}{\partial t} = 3\dfrac{\partial z_2(t,x,y)}{\partial x} + 6\dfrac{\partial z_2(t,x,y)}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial z_3(t,x,y)}{\partial t} = 2\dfrac{\partial z_3(t,x,y)}{\partial x} + 4\dfrac{\partial z_3(t,x,y)}{\partial y}, \end{cases} \tag{25}$$

$$t>0,\ 0<x<\infty, 0<y<\infty.$$

Беручи до уваги формули (23), приходимо до висновку, що загальний розв'язок системи рівнянь (25) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} z_1(t,x,y) &= p_1(x+5t, y+7t), \\ z_2(t,x,y) &= p_2(x+3t, y+6t), \\ z_3(t,x,y) &= p_3(x+2t, y+4t), \\ t>0,\ 0<x&<\infty, 0<y<\infty. \end{aligned} \tag{26}$$

Далі розглянемо більш складний випадок, коли матриці A і B не є діагональними, але комутативні, тобто справедлива рівність $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B} = \mathrm{B}\cdot\mathrm{A}$. Вважаємо також, що всі власні числа матриці $\mathbf{A}$ є дійсними і різними. Це означає, що її можна звести до діагональної форми. Тоді існує невироджена матриця S, що справедлива рівність $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{AS} = \mathrm{K}$, де K – діагональна матриця. Оскільки матриці A і B комутативні, то одночасно маємо $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{BS} = \mathrm{L}$, де L – також діагональна матриця [3]. Відзначимо, що матриця S утворена із власних векторів матриці A (стовбцями матриці S є власні вектори матриці A). Враховуючи ці обставини, у співвідношенні (5) зробимо заміну

$$\mathrm{z}(t,x,y) = \mathrm{S}\,\mathrm{r}(t,x,y). \tag{27}$$

У результаті замість рівняння (5) отримаємо наступне рівняння

$$\mathrm{S}\frac{\partial \mathrm{r}(t,x,y)}{\partial t} = \mathrm{AS}\frac{\partial \mathrm{r}(t,x,y)}{\partial x} + \mathrm{BS}\frac{\partial \mathrm{r}(t,x,y)}{\partial y},$$

$$t>0,\ 0<x<\infty,\ 0<y<\infty.$$

Якщо тепер обидві частини останнього рівняння помножити зліва на матрицю S^{-1}, то отримаємо таке рівняння:

$$\frac{\partial \mathrm{r}(t,x,y)}{\partial t} = \mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{r}(t,x,y)}{\partial x} + \mathrm{L}\frac{\partial \mathrm{r}(t,x,y)}{\partial y}, \quad t>0,\ 0<x<\infty,\ 0<y<\infty. \tag{28}$$

Нехай $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1},\lambda_n$ – власні числа матриці K; $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{n-1},\mu_n$ – власні числа матриці L. Тоді загальний розв'язок системи (28) має вигляд

$$\mathrm{r}(t,x,y) = \begin{pmatrix} p_1(x+\lambda_1 t, y+\mu_1 t) \\ p_2(x+\lambda_2 t, y+\mu_2 t) \\ \vdots \\ p_{n-1}(x+\lambda_{n-1} t, y+\mu_{n-1} t) \\ p_n(x+\lambda_n t, y+\mu_n t) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Враховуючи співвідношення (27), на підставі рівності (29) знаходимо, що в цьому випадку загальний розв'язок рівняння (5) можна навести у вигляді

$$\mathrm{z}(t,x,y) = \mathrm{S}\,\mathrm{r}(t,x,y). \tag{30}$$

Теорема 3. Якщо матриці A і B мають різні дійсні власні числа $\lambda_1, \lambda_2, \mathbf{K}, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ та $\mu_1, \mu_2, \mathbf{K}, \mu_{n-1}, \mu_n$ відповідно і справедлива рівність $A \cdot B = B \cdot A$, то загальний розв'язок рівняння (5) можна знайти за формулою (30), де $r(t, x, y)$ – загальний розв'язок діагоналізованої системи (28), а матриця S утворена із власних векторів матриці A.

Приклад 2. Розглянемо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_1(t,x,y)}{\partial t} = 5\dfrac{\partial z_1(t,x,y)}{\partial x} + 2\dfrac{\partial z_2(t,x,y)}{\partial x} - \\ - 2\dfrac{\partial z_3(t,x,y)}{\partial x} + 7\dfrac{\partial z_1(t,x,y)}{\partial y} + \dfrac{\partial z_2(t,x,y)}{\partial y} - \\ - \dfrac{\partial z_3(t,x,y)}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial z_2(t,x,y)}{\partial t} = 3\dfrac{\partial z_1(t,x,y)}{\partial x} + 5\dfrac{\partial z_2(t,x,y)}{\partial x} - \\ - 3\dfrac{\partial z_3(t,x,y)}{\partial x} + 3\dfrac{\partial z_1(t,x,y)}{\partial y} + 7\dfrac{\partial z_2(t,x,y)}{\partial y} - \\ - 3\dfrac{\partial z_3(t,x,y)}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial z_3(t,x,y)}{\partial t} = 3\dfrac{\partial z_1(t,x,y)}{\partial x} + 2\dfrac{\partial z_2(t,x,y)}{\partial x} + \\ + 3\dfrac{\partial z_1(t,x,y)}{\partial y} + \dfrac{\partial z_2(t,x,y)}{\partial y} + 3\dfrac{\partial z_3(t,x,y)}{\partial y}. \end{cases} \quad (31)$$

У цьому випадку маємо

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & -3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 35 & 17 & -17 \\ 27 & 35 & -27 \\ 27 & 17 & -9 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок діагоналізованої системи має вигляд

$$r_1(t,x,y) = p_1(x+5t, y+7t),$$

$$r_2(t,x,y) = p_2(x+3t, y+6t),$$

$$r_3(t,x,y) = p_3(x+2t, y+4t).$$

Тому згідно з формулою (30) знаходимо, що загальний розв'язок системи (31) є таким:

$$z_1(t,x,y) = p_1(x+5t, y+7t) + p_2(x+3t, y+6t),$$

$$z_2(t,x,y) = p_1(x+5t, y+7t) + p_3(x+2t, y+4t),$$

$$z_3(t,x,y) = p_1(x+5t, y+7t) + p_2(x+3t, y+6t) + \\ + p_3(x+2t, y+4t).$$

Висновки

Метод Ейлера для знаходження загального розв'язку однорідного рівняння з частинними похідними вигляду $a\dfrac{\partial^n z(t,x)}{\partial t^n} + b\dfrac{\partial^n z(t,x)}{\partial t^{n-1}\partial x} + c\dfrac{\partial^n z(t,x)}{\partial t^{n-2}\partial x^2} + \mathbf{L} + l\dfrac{\partial^n z(t,x)}{\partial x^n} = 0$ поширено на однорідні системи рівнянь з частинними похідними, що мають вигляд $\dfrac{\partial z(t,x,y)}{\partial t} = A\dfrac{\partial z(t,x,y)}{\partial x} + B\dfrac{\partial z(t,x,y)}{\partial y}$, $t > 0,\ 0 < x < \infty,\ \ 0 < y < \infty$. Отримано формули для знаходження загального розв'язку цієї системи в двох випадках: а) матриці A і B діагональні; б) матриці A і B комутативні. Для ілюстрації отриманих результатів розглянуто конкретні приклади. Отримані результати будуть покладені в основу подальших досліджень систем лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку.

1. *Крылов Н.А.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. – 3-е изд. – Ленинград: Изд-во Акад. наук СССР, 1933. – 472 с.
2. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
3. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 352 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
30 травня 2012 року