УДК 519.21

М.К. Руновська

ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ СЛАБКО- І СИЛЬНОЗАЛЕЖНИХ ГАУССОВИХ МАРКОВСЬКИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ [1]

This paper is devoted to the finding of necessary and sufficient conditions for the almost sure convergence of the random series whose terms are elements of one-dimensional zero-mean Gaussian Markov sequences. Mainly in the paper the series whose terms are elements of weakly dependent and strongly dependent Gaussian Markov sequences are considered. Criterions which provide almost sure convergence of the series whose terms are elements of weakly dependent and strongly dependent Gaussian Markov sequences respectively are the main results of this work. These criterions are formulated in terms of correlation characteristics of Gaussian Markov sequences and are of a simple kind. Obtained results also enable to find criterions for the almost sure convergence of the series whose terms are elements of weakly dependent and strongly dependent Gaussian Markov sequences with weighted coefficients. Moreover, obtained results automatically provide sufficient conditions for the almost sure convergence of a series whose terms are elements of some regressive sequences generated by independent sub-Gaussian random variables with uniformly bounded standards.

Вступ

Гауссові послідовності становлять широкий підклас класу лінійних регресійних послідовностей першого порядку. Підкреслимо, що в класі гауссових послідовностей регресійні послідовності першого порядку і тільки вони є марковськими. Асимптотична поведінка одновимірних і багатовимірних гауссових марковських послідовностей досліджувалася в працях [1–4]. У класі всіх одновимірних гауссових марковських послідовностей В.В. Булдигіним у праці [1] введено два граничних підкласи – *слабкозалежні* та *сильнозалежні* гауссові марковські послідовності. Для них було отримано досить прості критерії збіжності майже напевно (м.н.) до нуля.

Необхідні і достатні умови збіжності м.н. рядів одно- і багатовимірних гауссових марковських послідовностей вивчалися у працях [5–10]. Зокрема, у [8] встановлено критерій збіжності м.н. рядів одновимірних центрованих гауссових марковських послідовностей у термінах коефіцієнтів цих послідовностей. Проте в загальному випадку перевірка умов цього критерію може бути технічно складною. Тому для різних підкласів гауссових марковських послідовностей доцільно окремо розглядати умови збіжності м.н. рядів елементів цих послідовностей.

Ця робота присвячена встановленню критеріїв збіжності м.н. рядів елементів *слабко-* і *сильнозалежних* гауссових марковських послідовностей.

Постановка задачі

Розглянемо одновимірну центровану гауссову марковську послідовність (ξ_k), тобто регресійну послідовність, задану системою рекурентних співвідношень

$$\xi_1 = \beta_1\gamma_1,\ \xi_k = \alpha_k\xi_{k-1} + \beta_k\gamma_k,\ k \ge 2, \tag{1}$$

де (α_k) і (β_k) – невипадкові послідовності дійсних чисел, (γ_k) – стандартна гауссова послідовність, тобто послідовність незалежних у сукупності гауссових випадкових величин з нульовим середнім та одиничною дисперсією. Для послідовності (ξ_k) покладемо

$$\sigma_n^2 = \mathrm{E}\xi_n^2, n \ge 1;\ r_{0,1} = 0,\ r_{i,j} = \frac{\mathrm{E}\xi_i\xi_j}{\sigma_i\sigma_j},$$

$$\text{якщо } \sigma_i\sigma_j > 0,$$

і

$$r_{i,j} = 0, \text{ якщо } \sigma_i\sigma_j = 0,\ i,j \ge 1,$$

де $\mathrm{E}\xi$ – математичне сподівання випадкової величини ξ.

Відомо (див., напр., [4, с. 333]), що коефіцієнти α_n і β_n, $n \ge 1$, із зображення (1) виражаються через кореляційні характеристики σ_n і $r_{n-1,n}$, $n \ge 1$, таким чином:

$$\alpha_1 = \sigma_1,\ \alpha_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}} r_{n-1,n},\ n \ge 2,$$
$$\beta_1^2 = \sigma_1^2,\ \beta_n^2 = \sigma_n^2(1 - r_{n-1,n}^2),\ n \ge 2. \tag{2}$$

[1] Частково підтримано грантом DFG.

Крім того, оскільки послідовність (ξ_k) є гауссовою марковською послідовністю, то для будь-яких $1 \le i \le m$ для коефіцієнтів кореляцій цієї послідовності справджуються рівності (див. [11, с. 122])

$$r_{i,m} = \prod_{k=i}^{m-1} r_{k,k+1}. \qquad (3)$$

Зауважимо, що ці співвідношення є також достатніми для того, щоб гауссова послідовність була марковською.

Для гауссової марковської послідовності (ξ_k), заданої системою рекурентних співвідношень (1), будемо розглядати випадковий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k.$$

У праці [8] (див. теорему 3.1) було отримано загальний критерій збіжності м.н. ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$. Наведемо цей результат у термінах кореляційних характеристик послідовності (ξ_k). Для цього для фіксованого $k \ge 1$ покладемо

$$B(n,k) =$$

$$= \begin{cases} 0, & 1 \le n < k; \\ \sigma_k (1 - r_{k-1,k}^2)^{1/2}, & n = k; \\ (1 - r_{k-1,k}^2)^{1/2} \left(\sigma_k + \sum_{l=k+1}^{n} \sigma_l \prod_{i=k}^{l-1} r_{i,i+1} \right), & n > k. \end{cases}$$

Для будь-якого $k \ge 1$ розглянемо числовий ряд

$$\sum_{l=k}^{\infty} (1 - r_{k-1,k}^2)^{1/2} \sigma_l \prod_{i=k}^{l-1} r_{i,i+1}. \qquad (4)$$

Зауважимо, що оскільки за означенням $r_{0,1} = 0$, то при $k = 1$ ряд (4) має вигляд $\sum_{l=1}^{\infty} \sigma_l \prod_{i=1}^{l-1} r_{i,i+1}$. Підкреслимо також, що якщо для фіксованого $k > 1$, $r_{k-1,k}^2 \ne 1$, то збіжність ряду (4) еквівалентна збіжності ряду $\sum_{l=k}^{\infty} \sigma_l \prod_{i=k}^{l-1} r_{i,i+1}$. Якщо для фіксованого $k \ge 1$ ряд (4) є збіжним, тобто існує границя $\lim_{n\to\infty} B(n,k)$, то покладемо

$$B(k) = (1 - r_{k-1,k}^2)^{1/2} \sigma_k +$$

$$+ \sum_{l=k+1}^{\infty} (1 - r_{k-1,k}^2)^{1/2} \sigma_l \prod_{i=k}^{l-1} r_{i,i+1} =$$

$$= \sum_{l=k}^{\infty} (1 - r_{k-1,k}^2)^{1/2} \sigma_l \prod_{i=k}^{l-1} r_{i,i+1}.$$

Зі співвідношення (3) випливає, що величини $B(k)$, $k \ge 1$, можна записати у згорнутій формі $B(k) = \sum_{l=k}^{\infty} (1 - r_{k-1,k}^2)^{1/2} \sigma_l r_{k,l}$.

Нехай $\mathfrak{R}^\infty$ – клас всіх монотоних послідовностей натуральних чисел, що прямують до нескінченності. Наведене далі твердження безпосередньо випливає з теореми 3.1 [8] та співвідношень (2).

Твердження 1. Випадковий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ є збіжним м.н. тоді і тільки тоді, коли виконуються такі три умови: 1) числовий ряд (4) є збіжним для будь-якого $k \ge 1$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty} (B(k))^2 < \infty$; 3) для всіх послідовностей (m_j) з класу $\mathfrak{R}^\infty$ і будь-якого $\varepsilon > 0$: $\sum_{j=1}^{\infty} \exp\left\{ -\varepsilon \Big/ \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} (B(m_{j+1}, k))^2 \right\} < \infty$.

При цьому, якщо виконуються умови 1–3, то $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} B(k) \gamma_k$ м.н.

Зазначимо, що перевірка умов твердження 1, особливо умови 3, може бути технічно складною. Але для певних підкласів гауссових марковських послідовностей вдається встановити більш прості для перевірки необхідні і достатні умови збіжності м.н. ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$. До таких підкласів належать *слабкозалежні* та *сильнозалежні* гауссові марковські послідовності.

Центровану гауссову марковську послідовність (ξ_k) будемо називати *слабкозалежною* (див. [3, с. 170]), якщо $\overline{\lim_{k\to\infty}} |r_{k,k+1}| < 1$, і *сильнозалежною* (див. [3, с. 171]), якщо існує $m \ge 1$ таке, що $\lim_{n\to\infty} |r_{m,n}| > 0$. Зауважимо, що завдяки нерівності $|r_{m,n+1}| \le |r_{m,n}|$, яка випливає зі співвідношення (3), границя $\lim_{n\to\infty} |r_{m,n}|$ існує.

Метою даної роботи, яка є продовженням праці [8], є встановлення критеріїв збіжності м.н. ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ для слабко- та сильнозалежних гауссових марковських послідовностей (ξ_k).

Основні результати

Теорема 1 містить критерій збіжності м.н. ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ для *слабкозалежної* гауссової марковської послідовності (ξ_k).

Теорема 1. Нехай (ξ_k) – слабкозалежна центрована гауссова марковська послідовність. Випадковий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ є збіжним м.н. тоді і тільки тоді, коли $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty$.

Доведення. Нехай (ξ_k) – слабкозалежна центрована гауссова марковська послідовність. Із означення слабкої залежності випливає, що $\overline{\lim_{k\to\infty}} |r_{k,k+1}| < 1$, тобто існують номер k_0 і деяка константа $q \in [0,1)$ така, що для всіх $k \geq k_0$ виконується

$$|r_{k,k+1}| \leq q < 1. \qquad (6)$$

Доведемо необхідність. Нехай (ξ_k) – слабкозалежна центрована гауссова марковська послідовність і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ є збіжним м.н., тобто виконуються умови 1–3 твердження 1. Покажемо, що є збіжним ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2$. Покладемо

$$C(k) = \sigma_k + \sum_{l=k+1}^{\infty} \sigma_l \prod_{i=k}^{l-1} r_{i,i+1} = \sum_{l=k}^{\infty} r_{k,l}\, \sigma_l,\ k \geq 1.$$

Тоді послідовність $(C(k))$ задовольняє рекурентні співвідношення

$$C(k) = \sigma_k + r_{k,k+1} C(k+1),\ k \geq 1.$$

Із цих співвідношень випливає, що $\sigma_k = C(k) - r_{k,k+1} C(k+1),\ k \geq 1$, і

$$\sigma_k^2 = (C(k) - r_{k,k+1} C(k+1))^2 \leq$$

$$\leq 2(C(k))^2 + 2(C(k+1))^2,\ k \geq 1.$$

З останнього співвідношення випливає, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2$ є збіжним, якщо є збіжним ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (C(k))^2$. Покажемо, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (C(k))^2$ є збіжним. Нехай $k \geq k_0$. Тоді з (6) випливає, що

$$(B(k))^2 = (1 - r_{k-1,k}^2)(C(k))^2 \geq (1 - q^2)(C(k))^2.$$

За умовою 2 твердження 1 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (B(k))^2$ є збіжним. Звідси та з останніх співвідношень випливає збіжність ряду $\sum_{k=k_0}^{\infty} (C(k))^2$. У свою чергу, зі збіжності ряду $\sum_{k=k_0}^{\infty} (C(k))^2$ випливає, що є збіжним ряд $\sum_{k=k_0}^{\infty} \sigma_k^2$. Таким чином, необхідність доведено.

Доведемо достатність. Для цього покажемо, що зі збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2$ випливають умови 1–3 твердження 1. Якщо $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty$, то $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$ і, крім того, $\sup_{n\geq 1} \sigma_n < \infty$. Вважатимемо, як і раніше, що $k \geq k_0$. Тоді

$$\sum_{l=k+1}^{\infty} \sigma_l \prod_{i=k}^{l-1} |r_{i,i+1}| \leq \left(\sup_{l \geq k+1} \sigma_l \right) \sum_{l=k+1}^{\infty} \prod_{i=k}^{l-1} |r_{i,i+1}| \leq$$

$$\leq \left(\sup_{l\geq 1} \sigma_l \right) \sum_{l=k+1}^{\infty} q^{l-k} = \left(\sup_{l\geq 1} \sigma_l \right) \frac{q}{1-q} < \infty.$$

Із цих співвідношень випливає, що ряд (4) є абсолютно збіжним для будь-якого $k \geq k_0$, а отже, є збіжним для всіх $k \geq 1$. Отже, виконується умова 1 твердження 1.

Далі, оскільки

$$(B(k))^2 = (1 - r_{k-1,k}^2) \cdot \left(\sum_{l=k}^{\infty} \sigma_l r_{k,l} \right)^2 \leq \left(\sum_{l=k}^{\infty} \sigma_l |r_{k,l}| \right)^2,$$

то, використовуючи нерівність Коші–Буняковського для рядів, отримаємо

$$(B(k))^2 \leq \left(\sum_{l=k}^{\infty} \sigma_l \sqrt{|r_{k,l}|} \sqrt{|r_{k,l}|} \right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\sum_{l=k}^{\infty} (\sigma_l \sqrt{|r_{k,l}|})^2 \right) \cdot \left(\sum_{l=k}^{\infty} (\sqrt{|r_{k,l}|})^2 \right) =$$

$$= \left(\sum_{l=k}^{\infty} \sigma_l^2 |r_{k,l}| \right) \cdot \left(\sum_{l=k}^{\infty} |r_{k,l}| \right) \le$$

$$\le \left(\sum_{l=k}^{\infty} \sigma_l^2 q^{l-k} \right) \cdot \left(\sum_{l=k}^{\infty} q^{l-k} \right) = \frac{1}{1-q} \left(\sum_{l=k}^{\infty} \sigma_l^2 q^{l-k} \right),$$

для всіх $k \ge k_0$. Розглянемо ряд $\sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\sum_{l=k}^{\infty} \sigma_l^2 q^{l-k} \right)$ і покажемо, що він є збіжним. Дійсно, оскільки цей ряд містить лише невід'ємні елементи, то перегрупувавши його доданки, матимемо

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\sum_{l=k}^{\infty} \sigma_l^2 q^{l-k} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} q^i \left(\sum_{n=k_0+i}^{\infty} \sigma_n^2 \right) \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 \right) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} q^i =$$

$$= \frac{1}{1-q} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 \right), \ k \ge k_0 .$$

З проведених міркувань та ознаки порівняння рядів випливає, що $\sum_{k=1}^{\infty} (B(k))^2 < \infty$. Таким чином, виконується умова 2 твердження 1.

Покажемо, що виконується умова 3 твердження 1. Зафіксуємо послідовність (m_j) з класу $\mathfrak{R}^\infty$ та довільне $\varepsilon > 0$. Тоді, повторюючи міркування, проведені вище, отримаємо

$$\exp\left\{ -\varepsilon \Big/ \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} (B(m_{j+1}, k))^2 \right\} \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} (B(m_{j+1}, k))^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} (1 - r_{k-1,k}^2) \cdot \left(\sum_{l=k}^{m_{j+1}} \sigma_l r_{k,l} \right)^2 \right) \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} \left(\sum_{l=k}^{m_{j+1}} \sigma_l |r_{k,l}| \right)^2 \right) \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} \left(\sum_{l=k}^{m_{j+1}} \sigma_l^2 |r_{k,l}| \right) \cdot \left(\sum_{l=k}^{m_{j+1}} |r_{k,l}| \right) \right) \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} \left(\sum_{l=k}^{m_{j+1}} \sigma_l^2 q^{l-k} \right) \cdot \left(\sum_{l=k}^{m_{j+1}} q^{l-k} \right) \right) \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon(1-q)} \left(\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} \left(\sum_{l=k}^{m_{j+1}} \sigma_l^2 q^{l-k} \right) \right) \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon(1-q)} \left(\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} \left(\sum_{l=k}^{\infty} \sigma_l^2 q^{l-k} \right) \right),$$

для всіх j таких, що $m_j \ge k_0$. Нарешті, оскільки ряд $\sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\sum_{l=k}^{\infty} \sigma_l^2 q^{l-k} \right)$ є збіжним, то і ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} \left(\sum_{l=k}^{\infty} \sigma_l^2 q^{l-k} \right) \right)$ також є збіжним. Звідси випливає, що виконується умова 3 твердження 1. Отже, виконуються умови 1–3 твердження 1, згідно з яким випадковий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ є збіжним м.н. Теорему 1 доведено.

Теорема 2 дає критерій збіжності м.н. ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ для *сильнозалежної* гауссової марковської послідовності (ξ_k).

Теорема 2. Нехай (ξ_k) – сильнозалежна центрована гауссова марковська послідовність. Випадковий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ є збіжним м.н. тоді і тільки тоді, коли є збіжним ряд $\sum_{l=m_0}^{\infty} r_{m_0,l} \sigma_l$, де $m_0 = \min\{m \ge 1 : \lim_{n\to\infty} |r_{m,n}| > 0\}$.

Доведення. Нехай (ξ_k) – сильнозалежна центрована гауссова марковська послідовність, тобто існує $m \ge 1$ таке, що $\lim_{n\to\infty} |r_{m,n}| > 0$. Оскільки $m_0 = \min\{m \ge 1 : \lim_{n\to\infty} |r_{m,n}| > 0\}$, то $r_{m_0-1, m_0} = 0$ і $|r_{k,k+1}| > 0$ для всіх $k \ge m_0$. Крім того, з існування границі $\lim_{n\to\infty} |r_{m_0,n}| > 0$ випливає, що є збіжним нескінченний добуток $\prod_{i=m_0}^{\infty} |r_{i,i+1}|$. Своєю чергою це еквівалентно тому, що є збіжним числовий ряд $\sum_{i=m_0}^{\infty} (1 - |r_{i,i+1}|)$. Зі збіжності цього ряду, з урахуванням нерівностей

$$1 - r_{k,k+1}^2 = (1 - |r_{k,k+1}|)(1 + |r_{k,k+1}|) \le$$

$$\le 2(1 - |r_{k,k+1}|), \ k \ge 1,$$

випливає, що $\sum_{k=1}^{\infty}(1-r_{k,k+1}^2)<\infty$.

Доведемо необхідну частину. Нехай ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ є збіжним м.н. Тоді за твердженням 1 для всіх $k\ge 1$ є збіжним числовий ряд (4). Розглянемо ряд (4) при $k=m_0$. Оскільки $r_{m_0-1,m_0}=0$, то цей ряд набуває вигляду $\sum_{l=m_0}^{\infty}\sigma_l r_{m_0,l}$. Таким чином, необхідна частина теореми 2 доведена.

Доведемо достатність. Припустимо, що ряд $\sum_{l=m_0}^{\infty}\sigma_l r_{m_0,l}$ є збіжним, і покажемо, що виконуються умови 1–3 твердження 1. Спочатку покажемо, що зі збіжності ряду $\sum_{l=m_0}^{\infty}\sigma_l r_{m_0,l}$ випливає збіжність ряду $\sum_{l=k}^{\infty}\sigma_l r_{k,l}$ для всіх $k<m_0$ і всіх $k>m_0$. Дійсно, оскільки $r_{m_0-1,m_0}=0$, то при $k>m_0$ згідно з (3) ряд $\sum_{l=k}^{\infty}\sigma_l r_{k,l}$ складається із нульових елементів, а отже, є збіжним. Крім того, згідно зі співвідношенням (3) $r_{m_0,l}=r_{m_0,k}\cdot r_{k,l}\ne 0$ для всіх $l\ge k>m_0$, а отже, $\sum_{l=k}^{\infty}\sigma_l r_{k,l}=\frac{1}{r_{m_0,k}}\sum_{l=k}^{\infty}\sigma_l r_{m_0,l}$, тобто ряд $\sum_{l=k}^{\infty}\sigma_l r_{k,l}$ є збіжним для всіх $k>m_0$. Отже, виконується умова 1 твердження 1.

Доведемо, що виконується умова 2 твердження 1. Для цього позначимо $C(k)=\sum_{l=k}^{\infty}\sigma_l r_{k,l}$, $k\ge 1$, та зауважимо, що послідовність $(C(k))$ задовольняє рекурентні співвідношення $C(k)=\sigma_k+r_{k,k+1}C(k+1)$, $k\ge 1$. Нехай тепер $k>m_0$. Оскільки $|r_{k,k+1}|>0$ для всіх $k\ge m_0$, то

$$C(k)=\frac{C(k-1)-\sigma_{k-1}}{r_{k-1,k}}=\ldots=\frac{C(m_0)-\sum_{l=m_0}^{k-1}\sigma_l r_{m_0,l}}{r_{m_0,k}}.$$

Тому

$$B(k)^2=(1-r_{k-1,k}^2)(C(k))^2=$$

$$=(1-r_{k-1,k}^2)\left(\frac{C(m_0)-\sum_{l=m_0}^{k-1}\sigma_l r_{m_0,l}}{r_{m_0,k}}\right)^2\le$$

$$\le\frac{2(1-r_{k-1,k}^2)}{r_{m_0,k}^2}\left((C(m_0))^2+\left(\sum_{l=m_0}^{k-1}\sigma_l r_{m_0,l}\right)^2\right)\le$$

$$\le\frac{2(1-r_{k-1,k}^2)}{\delta^2}\left((C(m_0))^2+\left(\sum_{l=m_0}^{k-1}\sigma_l r_{m_0,l}\right)^2\right),$$

де $\delta>0$ таке число, що $|r_{m_0,k}|>\delta$ для всіх $k\ge m_0$. Таке δ існує, оскільки $\lim_{k\to\infty}|r_{m_0,k}|>0$ і послідовність $(r_{m_0,k}, k\ge 1)$ є спадною. Зауважимо також, що оскільки $\sum_{l=m_0}^{k-1}\sigma_l r_{m_0,l}$ є частковою сумою збіжного ряду, то існує число $L_{m_0}>0$ таке, що $\left|\sum_{l=m_0}^{k-1}\sigma_l r_{m_0,l}\right|<L_{m_0}$ для всіх $k\ge m_0$. З цих міркувань та збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty}(1-r_{k,k+1}^2)$ випливає, що ряд $\sum_{k=m_0}^{\infty}(B(k))^2$ є збіжним. Отже, виконується умова 2 твердження 1.

Покажемо, що виконується умова 3 твердження 1. Для цього зафіксуємо послідовність (m_j) з класу $\Re^{\infty}$. Нехай j таке, що $m_j\ge m_0$. Тоді, враховуючи вигляд величин $B(n,k)$, $n,k\ge 1$, отримаємо

$$\exp\left\{-\varepsilon/\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}}(B(m_{j+1},k))^2\right\}\le$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon}\left[\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}}(B(m_{j+1},k))^2\right]=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\left(\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}}(1-r_{k-1,k}^2)\left(\sum_{l=k}^{m_{j+1}}\sigma_l r_{k,l}\right)^2\right)=$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left(\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} (1 - r_{k-1,k}^2) \left(\frac{\sum_{l=m_0}^{m_{j+1}} \sigma_l r_{m_0,l} - \sum_{l=m_0}^{k-1} \sigma_l r_{m_0,l}}{r_{m_0,k}} \right)^2 \right) \le$$

$$\le \frac{2}{\varepsilon\delta^2} \left(\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} (1 - r_{k-1,k}^2) \left(\left[\sum_{l=m_0}^{m_{j+1}} \sigma_l r_{m_0,l} \right]^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left[\sum_{l=m_0}^{k-1} \sigma_l r_{m_0,l} \right]^2 \right) \right) \le \frac{4 L_{m_0}^2}{\varepsilon\delta^2} \left(\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} (1 - r_{k-1,k}^2) \right),$$

де δ та L_{m_0} такі самі, як при доведенні умови 2.

Своєю чергою збіжність ряду $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} (1 - r_{k-1,k}^2)$ випливає зі збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty}(1 - r_{k,k+1}^2)$. Таким чином, виконується умова 3 твердження 1. Отже, за твердженням 1 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ є збіжним тоді і тільки тоді, коли є збіжним ряд $\sum_{l=m_0}^{\infty} r_{m_0,l}\sigma_l$. Теорему 2 доведено.

Наведемо наслідок з теореми 2.

Наслідок **1.** Нехай (ξ_k) – сильнозалежна центрована гауссова марковська послідовність. Для того щоб випадковий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ був збіжним м.н., достатньо (а якщо послідовність кореляцій $(r_{k,k+1})$ послідовності (ξ_k) не має від'ємних елементів або має скінченну кількість від'ємних елементів, то і необхідно), щоб був збіжним ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $|r_{m_0,l}| \le 1$, для всіх $l \ge m_0 \ge 1$, то із ознаки порівняння числових рядів випливає, що ряд $\sum_{l=m_0}^{\infty} r_{m_0,l}\sigma_l$ є збіжним, якщо є збіжним ряд $\sum_{l=1}^{\infty} \sigma_l$. Нехай тепер k_0 – деякий номер, такий, що $r_{k,k+1} \ge 0$, для всіх $k \ge k_0$. Тоді ряди $\sum_{l=m_0}^{\infty} r_{m_0,l}\sigma_l$ і $\sum_{l=1}^{\infty} \sigma_l$ є еквівалентно збіжними як числові ряди із додатніми членами. Наслідок 1 доведено.

Зауваження **1.** Згідно з принципом мажорації, встановленим В.В. Булдигіним, гауссові ряди є домінантними при досліджені умов збіжності м.н. відповідних їм субгауссових рядів (див. [12, с. 175]). Тому критерії збіжності м.н. гауссових марковських рядів, встановлені у твердженні 1 та теоремах 1 і 2, дають відповідні достатні умови збіжності м.н. рядів регресійних послідовностей типу (1), породжених субгауссовою послідовністю випадкових величин (γ_k) з обмеженими субгауссовими штандартами.

Теореми 1 і 2 дають можливість отримати умови збіжності м.н. рядів зважених слабко- та сильнозалежних гауссових марковських послідовностей. А саме, для слабко- та сильнозалежних гауссових марковських послідовностей (ξ_k) і невипадкової послідовності дійсних чисел (c_k) розглянемо випадкові ряди $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k$ та сформулюємо критерії збіжності м.н. цих рядів. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $c_k \ne 0$, $k \ge 1$.

Наслідок **2.** Нехай (ξ_k) – слабкозалежна центрована гауссова марковська послідовність. Випадковий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k$ є збіжним м.н. тоді і тільки тоді, коли $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\sigma_k^2 < \infty$.

Наслідок **3.** Нехай (ξ_k) – сильнозалежна центрована гауссова марковська послідовність. Випадковий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k$ є збіжним м.н. тоді і тільки тоді, коли є збіжним ряд $\sum_{l=m_0}^{\infty} |c_l|\sigma_l r_{m_0,l}$, де $m_0 = \min\{m \ge 1 : \lim_{n\to\infty} |r_{m,n}| > 0\}$.

Д о в е д е н н я наслідків 2 і 3. Нехай (ξ_k) – деяка центрована гауссова марковська послідовність. Поряд із послідовностями (ξ_k) і (c_k) розглянемо послідовність (ψ_k), де $\psi_k = c_k\xi_k$, $k \ge 1$. Очевидно, послідовність (ψ_k) є центрованою гауссовою марковською послідовністю з параметрами

$$\tilde{\sigma}_k^2 = E\psi_k^2 = Ec_k^2\xi_k^2 = c_k^2 E\xi_k^2 = c_k^2\sigma_k^2, \; k \ge 1,$$

$$\tilde{r}_{i,j} = \frac{E\psi_i\psi_j}{\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j} = \frac{Ec_i\xi_i c_j\xi_j}{c_i\sigma_i c_j\sigma_j} = \frac{E\xi_i\xi_j}{\sigma_i\sigma_j} = r_{i,j},$$

$$i, j \geq 1 .$$

Нехай тепер (ξ_k) – слабкозалежна гауссова марковська послідовність. Тоді (ψ_k) також є слабкозалежною гауссовою марковською послідовністю. Тоді за теоремою 1 випадковий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k$ є збіжним тоді і тільки тоді, коли $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \sigma_k^2 < \infty$. Звідси випливає твердження наслідку 2.

Припустимо тепер, що (ξ_k) – сильнозалежна гауссова марковська послідовність. Тоді (ψ_k) також є сильнозалежною гауссовою марковською послідовністю. Тоді за теоремою 2 випадковий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k$ є збіжним тоді і тільки тоді, коли є збіжним ряд $\sum_{l=m_0}^{\infty} |c_l| \sigma_l r_{m_0,l}$, де $m_0 = \min\{m \geq 1 : \lim_{n\to\infty} |r_{m,n}| > 0\}$. Отже, наслідок 3 також доведено.

Висновки

У статті встановлено критерії збіжності майже напевно рядів, елементами яких є елементи одновимірних слабко- та сильнозалежних центрованих гауссових марковських послідовностей. Ці критерії мають досить простий вигляд і є зручними для перевірки. Вони дають можливість перевіряти збіжність майже напевно деяких субгауссових рядів. Крім того, отримано критерії збіжності майже напевно рядів зважених слабко- та сильнозалежних гауссових марковських послідовностей.

Подальші дослідження передбачають встановлення необхідних і достатніх умов, а також критеріїв збіжності майже напевно рядів одновимірних та багатовимірних регресійних та авторегресійних послідовностей.

* * *

Автор статті щиро вдячний своєму науковому керівникові професору Булдигіну Валерію Володимировичу за постійну увагу та підтримку в роботі.

1. *Булдыгин В.В.* Усиленные законы больших чисел и сходимость к нулю гауссовских последовательностей // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1978. – **19**. – С. 33–41.
2. *Булдыгин В.В., Солнцев С.А.* УЗБЧ для сумм независимых случайных векторов с операторными нормировками и сходимость к нулю гауссовских последовательностей // ТВП. – 1988. – **33**, № 4. – С. 32–46.
3. *Булдыгин В.В., Солнцев С.А.* Функциональные методы в задачах суммирования случайных величин. – К.: Наук. думка, 1989. – 186 с.
4. *V.V. Buldygin and S. A. Solntsev,* Asymptotic behavior of linearly transformed sums of random variables. Netherlands, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997, 504 pp.
5. *V.V. Buldygin and M.K. Runovska,* "On the convergence of series of autoregressive sequences", Theory of stochastic processes, vol. 15 (31), no. 1, pp. 7–4, 2009.
6. *V.V. Buldygin and M.K. Runovska,* "On the convergence of series of autoregressive sequences in Banach spaces", Ibid, vol. 16(32), no. 1, pp. 29–38, 2010.
7. *V.V. Buldygin and M.K. Runovska,* "Almost sure convergence of the series of Gaussian Markov sequences", Communication in Statistics – Theory and Methods, vol. 40, no. 19-20, pp. 3407–3424, 2011.
8. *Руновська М.К.* Збіжність рядів, складених з елементів гауссівських марковських послідовностей // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2010. – № 83. – С. 125–137.
9. *Руновська М.К.* Збіжність сум елементів авторегресійних послідовностей з випадковими коефіцієнтами // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2010. – № 4. – С. 95–99.
10. *Руновська М.К.* Збіжність рядів, складених з елементів багатовимірних гауссівських марковських послідовностей // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2011. – № 84. – С. 131–141.
11. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. – М.: Мир, 1964. – 574 с.
12. *Булдыгин В.В.* Сходимость случайных элементов в топологических пространствах. – К.: Наук. думка, 1980. – 240 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
16 квітня 2012 року