УДК 517.9

В.В. Ясінський, О.А. Капустян

НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНІЄЇ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОЇ СТАБІЛІЗАЦІЇ З НЕАВТОНОМНИМИ ЗБУРЕННЯМИ В КОЕФІЦІЄНТАХ

This paper considers the optimal stabilization problem for solutions of parabolic inclusion in which nonautonomous perturbations act on the differential operator coefficients and multivalue interaction function. Such objects naturally occur in applied problems where medium characteristics change over time, and the interaction functions are discontinuous on a phase variable. Under general conditions on nonautonomous coefficients the solvability of the initial problem was proved. Given the *G*-convergence of perturbed operators to elliptic differential operator and convergence of multivalue perturbations to zero in the Hausdorff metric it was proved that any solution of the initial optimal stabilization problem converges to regulator of unperturbed linear-quadratic problem, whose explicit form is determined by the Fourier method. The main result of this paper is justification of the fact that the formula of the unperturbed problem regulator implements the approximate synthesis of the initial problem. These results make it possible to develop approximate stabilization methods for a class of infinite-dimensional evolution problems with nonautonomous multivalue perturbations.

Вступ

Розглядається задача оптимальної стабілізації на розв'язках параболічного включення з диференціальним оператором $A_\varepsilon(t)$ та неліпшицевим багатозначним збуренням $F_\varepsilon(t,y)$. Такі об'єкти природно виникають у прикладних задачах, коли характеристики середовища змінюються з часом, а функції взаємодії є розривними по фазовій змінній [1–5]. На скінченному часовому проміжку існування та властивості розв'язків таких задач оптимального керування досліджено в [6, 7]. З урахуванням результатів [8] для лінійно-квадратичних задач у працях [9, 10] обґрунтовано формулу наближеного синтезу та наближеного регулятора у випадку субдиференціальної головної частини оператора.

У даній статті за умови *G*-збіжності [11] (збурених) операторів $A_\varepsilon(t)$ до еліптичного (незбуреного) оператора A, малості F_ε та точної формули регулятора незбуреної задачі обґрунтовано наближену стабілізацію для вихідної задачі.

Постановка задачі

Нехай задано триплет гільбертових просторів $V \subset H \subset V^*$ з компактними щільними вкладеннями, $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – канонічна двоїстість між V і V^*, через $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ позначатимемо норму і скалярний добуток у H, через $\|\cdot\|_V$ – норму в просторі V. Будемо вважати, що виконується нерівність $\|u\| \le C \cdot \|u\|_V^2$.

Розглядаються задача оптимального керування з неавтономними збуреннями в коефіцієнтах і фіксованими параметрами $g \in H, \gamma > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + A_\varepsilon(t)y \in F_\varepsilon(t,y) + g \cdot v(t), t > 0, \\ y(0) = y_0 \in H, \end{cases} \tag{1}$$

$$v(\cdot) \in U = L^2(0,+\infty), \tag{2}$$

$$J(y,v) = \int_0^{+\infty} (\|y(t)\|^2 + \gamma v^2(t))dt \to \inf \tag{3}$$

і відповідна незбурена задача

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = g \cdot v(t), \\ y(0) = y_0 \in H, \end{cases} \tag{4}$$

$$v(\cdot) \in U = L^2(0,+\infty), \tag{5}$$

$$J(y,v) = \int_0^{+\infty} (\|y(t)\|^2 + \gamma v^2(t))dt \to \inf . \tag{6}$$

У статті за загальних умов на неавтономні збурення $A_\varepsilon(t)$ та $F_\varepsilon(t,y)$ доводиться розв'язність задачі (1)–(3) і обґрунтовується, що регулятор $u[y]$ задачі (4)–(6) реалізує наближену стабілізацію на розв'язках (1)–(3).

Основний результат

Нехай для $\forall \varepsilon > 0$ $\{A_\varepsilon(t) : V \mapsto V^*\}_{t \ge 0}$ – лінійні, неперервні оператори, причому $\exists\, 0 < \lambda_1 < \lambda_2$ $\forall t \ge 0$ $\forall u, v \in V$ виконані умови

$$\lambda_1 \cdot \| u \|_V^2 \le \langle A_\varepsilon(t)u, u\rangle \le \lambda_2 \cdot \| u \|_V^2, \qquad (7)$$

$$\langle A_\varepsilon(t)u, v\rangle = \langle A_\varepsilon(t)v, u\rangle, \qquad (8)$$

$$\text{функція } t \mapsto \langle A_\varepsilon(t)u, v\rangle \text{ вимірна.} \qquad (9)$$

Нехай $\forall \varepsilon > 0$ $F_\varepsilon : [0,+\infty)\times H \mapsto 2^H$ – опуклозначне, замкненозначне відображення,

$$\forall t \ge 0 \ F_\varepsilon(t,\cdot) \text{ – напівнеперервна зверху [12],} \qquad (10)$$

$$\forall y \in H \ F_\varepsilon(\cdot, y) : [0,+\infty) \mapsto 2^H \text{ – вимірна,} \qquad (11)$$

$$\forall t \ge 0 \quad \forall y \in H \quad \|F_\varepsilon(t,y)\|_+ := \sup_{\xi\in F_\varepsilon(t,y)} \|\xi\| \le$$

$$\le a_\varepsilon(t) + b_\varepsilon \|y\|, \ a_\varepsilon \in L^2(0,+\infty). \qquad (12)$$

За умов (7)–(12) відомо [7], що $\forall v(\cdot) \in U$ $\forall y_0 \in H$ $\forall T > 0$ задача (1) має розв'язок у тому сенсі, що $\exists f \in L^2(0,T;H)$ $\exists y \in W(0,T) = = \left\{ y \in L^2(0,T;H) \middle| \frac{dy}{dt} \in L^2(0,T;V^*)\right\}$ такі, що $f(t) \in F_\varepsilon(t, y(t))$ майже скрізь (м.с.) і

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + A_\varepsilon(t)y = f(t) + g\cdot v(t) := l(t), \\ y(0) = y_0 \in H. \end{cases} \qquad (13)$$

Крім того, якщо позначити розв'язок задачі (13) через $y = P^{-1}_{A_\varepsilon}(l, y_0)$, то відомо [2, 7], що $y \in C([0,T];H)$ і якщо $l_k \to l$ слабко в $L^2(0,T;H)$, $y_0^k \to y_0$ в H, то $P^{-1}_{A_\varepsilon}(l_k, y_0^k) \to$ $\to P^{-1}_{A_\varepsilon}(l, y_0)$ слабко в $W(0,T)$ і сильно в $C([0,T];H)$.

Лема. За умов (7)–(12) для достатньо малих $\varepsilon > 0$ задача оптимального керування (1)–(3) має розв'язок.

Доведення. Виведемо оцінки для розв'язку задачі (1) при фіксованому $u(\cdot) \in U$. В силу (7), (12) одержимо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 + \lambda_1 \|y(t)\|_V^2 \le \|f(t)\|\cdot\|y(t)\| +$$

$$+ \|g\|\cdot\|y(t)\|\cdot|u(t)| \le a_\varepsilon(t)\|y(t)\| + b_\varepsilon \|y(t)\|^2 +$$

$$+ \|g\|\cdot\|y(t)\|\cdot|u(t)|.$$

Тоді справедливі такі оцінки з константами $\delta > 0, C_1 > 0$, які не залежать від $\varepsilon > 0$:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \ \forall t \ge s \ge 0$$

$$\|y(t)\|^2 \le \|y(s)\|^2 e^{-\delta(t-s)} +$$

$$+ C_1 \int_s^t e^{-\delta(t-p)} (a_\varepsilon^2(p) + u^2(p))\, dp \le$$

$$\le \|y(s)\|^2 e^{-\delta(t-s)} + C_1(\|a_\varepsilon\|_U^2 + \|u\|_U^2), \qquad (14)$$

$$\int_s^t \|y(p)\|^2 dp \le \frac{1}{\delta}\left(\|y(s)\|^2 + C_1 \int_s^t (a_\varepsilon^2(p) + u^2(p))\, dp \right) \le$$

$$\le \frac{1}{\delta}(\|y(s)\|^2 + C_1(\|a_\varepsilon\|_U^2 + \|u\|_U^2)). \qquad (15)$$

З цих оцінок випливає, що $J(y,u) < \infty$. Нехай $\tilde{J}_\varepsilon$ – значення задачі (1)–(3). Виберемо $\{u_n\} \subset U$ так, щоб $J(y_n, u_n) \le \tilde{J}_\varepsilon + \frac{1}{n}$. Тоді $\|u_n\|_U^2 \le \tilde{J}_\varepsilon + 1$ $\forall n \ge n_0$. Отже, $\exists \tilde{u} \in U$ таке, що по підпослідовності $u_n \xrightarrow{w} \tilde{u}$ в $L^2(0,T)$ $\forall T > 0$. Тоді $y_n = P^{-1}_{A_\varepsilon}(f_n + g u_n, y_0)$, $f_n(t) \in F_\varepsilon(t, y_n(t))$ м.с. і за умовою (12) та оцінкою (14) $\|f_n(t)\| \le$ $\le m + a_\varepsilon(t)$ м.с. Тоді $f_n \xrightarrow{w} f$ в $L^2(0,T;H)$, $y_n \to \tilde{y}$ в $C([0,T];H)$, де $\tilde{y}_n = P^{-1}_{A_\varepsilon}(f + g\tilde{u}, y_0)$. В силу теореми Мазура $f(t) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} cl_H(co \bigcup_{k=n}^{\infty} f_k(t))$ м.с.

Отже, з умови (10) $f(t) \in F(\tilde{y}(t))$ м.с. Таким чином, $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$ – допустимий процес у задачі (1)–(3) і з нерівності

$$J(y_n, u_n) \ge J_T(y_n, u_n) := \int_0^T \|y_n(t)\|^2 dt + \gamma \int_0^T u_n^2(t)\, dt$$

маємо $\forall T > 0$

$$\tilde{J}_\varepsilon \ge \varliminf_{n\to\infty} J_T(y_n, u_n) \ge$$

$$\ge \varliminf_{n\to\infty} \int_0^T \|y_n(t)\|^2 dt + \gamma \varliminf_{n\to\infty} \int_0^T u_n^2(t)\, dt \ge J_T(\tilde{y}, \tilde{u}).$$

Тому $\tilde{J}_\varepsilon = J(\tilde{y}, \tilde{u})$, отже, $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$ – оптимальний процес у задачі. Лему доведено.

Якщо оператор A є самоспряженим і задовольняє оцінку $\langle Au, u\rangle \ge \lambda_1 \|u\|_V^2$ (а це буде, зокрема, якщо $\forall t \geq 0 \quad A_\varepsilon(t) \xrightarrow{G} A,\ \varepsilon \to 0$ [11]), то A^{-1} є компактним самоспряженим оператором у H. Отже, спектральна задача $AX = \lambda^2 X$ має власні числа $0 < \lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \ldots,\ \lambda_n^2 \to \infty,\ n \to \infty$, та власні функції $\{X_i\}_{i=1}^\infty \subset V$, які утворюють ортогональний базис у H. Тоді з [8] маємо, що лінійно-квадратична задача оптимального керування (4)–(6) має єдиний розв'язок

$$u[y] = (R, y), \tag{16}$$

де $R \in H$ визначається через $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty, \{X_i\}_{i=1}^\infty$ та коефіцієнт Фур'є функції g, $\|R\| \leq \dfrac{\|g\|}{2\gamma\lambda_1^2}$.

Розглянемо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + A_\varepsilon(t)y \in F_\varepsilon(t, y) + g \cdot u[y],\ t > 0, \\ y(0) = y_0 \in H. \end{cases} \tag{17}$$

Відображення $F_\varepsilon^1(t, y) := F_\varepsilon(t, y) + g(R, y)$ задовольняє умови (10), (11),

$$\|F_\varepsilon^1(t, y)\|_+ \leq a_\varepsilon(t) + b_\varepsilon\|y\| + \|g\| \cdot \|R\| \cdot \|y\| \leq$$

$$\leq a_\varepsilon(t) + \left(b_\varepsilon + \frac{\|g\|^2}{2\gamma\lambda_1^2}\right)\|y\|.$$

Отже, задача (17) розв'язна в $W(0,T)$ для $\forall T > 0$. Якщо ж $b_\varepsilon \to 0,\ \varepsilon \to 0$ і $\|g\|^2 < \dfrac{2\gamma\lambda_1^3}{C}$, то для достатньо малих $\varepsilon > 0$ для $\forall t \geq s \geq 0$ мають місце оцінки

$$\|y(t)\|^2 \leq \|y(s)\|^2 e^{-\delta(t-s)} + C_1\int_s^t e^{-\delta(t-p)} a_\varepsilon^2(p)\,dp \leq$$

$$\leq \|y(s)\|^2 e^{-\delta(t-s)} + C_1\|a_\varepsilon\|_U^2, \tag{18}$$

$$\int_s^t \|y(p)\|^2 dp \leq \frac{1}{\delta}\left(\|y(s)\|^2 + C_1\int_s^t a_\varepsilon^2(p)dp\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta}(\|y(s)\|^2 + C_1\|a_\varepsilon\|_U^2). \tag{19}$$

З цих оцінок, зокрема, отримаємо, що $J(y, u[y]) < \infty$.

Теорема. Нехай виконані умови (7)–(12), $b_\varepsilon \to 0, \|a_\varepsilon\|_U \to 0,\ \varepsilon \to 0$,

$$\forall t \geq 0 \quad A_\varepsilon(t) \xrightarrow{G} A,\ \varepsilon \to 0, \tag{20}$$

$$\forall \Delta > 0 \ \ \forall T > 0 \ \ \exists \tau_0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \forall \tau \in (0, \tau_0)$$

$$\sup_{t \in [0,T]} \|A_\varepsilon(t+\tau) - A_\varepsilon(t)\|_{L(V,V^*)} < \Delta. \tag{21}$$

Нехай $\{\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon\}$ – оптимальний процес у задачі (1)–(3), $\tilde{J}_\varepsilon = J(\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon)$, $\bar{y}^\varepsilon$ – розв'язок задачі (17), $\bar{J}_\varepsilon = J(\bar{y}^\varepsilon, u[\bar{y}^\varepsilon])$. Тоді

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(\tilde{J}_\varepsilon - \bar{J}_\varepsilon) = 0. \tag{22}$$

Доведення. Умови (20), (21) гарантують G-збіжність параболічних операторів $P_\varepsilon := \dfrac{d}{dt} + A_\varepsilon(t)$ до оператора $P := \dfrac{d}{dt} + A$ на $(0,T)$ [11], тобто $\forall l \in L^2(0,T;V^*)$ $\forall y_0 \in H$ $P_{A_\varepsilon}^{-1}(l, y_0^k) \to P_A^{-1}(l, y_0)$ слабко в $W(0,T)$. Звідси і з [7] випливає, що якщо $l_\varepsilon \to l$ слабко в $L^2(0,T;H)$, $y_0^\varepsilon \to y_0$ в H, то $P_{A_\varepsilon}^{-1}(l_\varepsilon, y_0^\varepsilon) \to$ $\to P_A^{-1}(l, y_0)$ слабко в $W(0,T)$ і сильно в $C([0,T];H)$.

Перейдемо до доведення граничної рівності (22). Спочатку покажемо, що $\bar{J}_\varepsilon \to J_0$, $\varepsilon \to 0$, де $J_0 = J(\tilde{y}, \tilde{u})$, $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$ – єдиний оптимальний процес у задачі (4)–(6).

Нехай $\bar{y}^\varepsilon$ – розв'язок задачі (17), $\bar{y}^\varepsilon =$ $= P_{A_\varepsilon}^{-1}(f_\varepsilon + gu[\bar{y}^\varepsilon], y_0)$, $f_\varepsilon(t) \in F_\varepsilon(t, \bar{y}^\varepsilon(t))$ м.с. З оцінок (18) і умови (12) випливає, що $\|f_\varepsilon(t)\| \leq$ $\leq a_\varepsilon(t) + m \cdot b_\varepsilon$ м.с. Тоді $f_\varepsilon \to 0$ в $L^2(0,T;H)$, $\bar{y}^\varepsilon \to \bar{y}$ в $C([0,T];H)$, $u[\bar{y}^\varepsilon(t)] \to u[\bar{y}(t)]$ $\forall t \in [0,T]$, тобто $\bar{y}$ – розв'язок задачі (4) при $v(t) = u[y](t)$. Така задача має єдиний розв'язок. Тому $J_0 = J(\bar{y}, u[\bar{y}])$, тобто $\{\bar{y}, u[\bar{y}]\}$ – оптимальний процес у задачі (4)–(6).

З оцінок (18) маємо, що $\forall t \geq 0$

$$\|\bar{y}^\varepsilon(t)\|^2 + \gamma u^2[\bar{y}^\varepsilon(t)] \leq$$

$$\leq (1 + \gamma\|R\|^2)(\|y_0\|^2 e^{-\delta t} + C_1\|a_\varepsilon\|_U^2).$$

Оскільки $\forall t \geq 0$ $\|\bar{y}^\varepsilon(t)\| \to \|\bar{y}(t)\|$, $u^2[\bar{y}^\varepsilon(t)] \to u^2[\bar{y}(t)]$ при $\varepsilon \to 0$, то за теоремою Лебега

$$\forall\, T>0 \;\; J_T(\bar{y}^{\varepsilon},u[\bar{y}^{\varepsilon}]):=$$

$$:=\int_0^T (\|\bar{y}^{\varepsilon}(t)\|^2+\gamma u^2[\bar{y}^{\varepsilon}(t)])\,dt \to J_T(\bar{y},u[\bar{y}]), \quad (23)$$

$$\varepsilon\to 0.$$

З (18), (19) одержимо, що $\forall\, T>0$

$$\int_0^{+\infty}(\|\bar{y}(t)\|^2+\gamma u^2[\bar{y}(t)])\,dt\le$$

$$\le \frac{1+\gamma\|R\|^2}{\delta}\|\bar{y}(T)\|^2 \le \frac{1+\gamma\|R\|^2}{\delta}\|y_0\|^2\cdot e^{-\delta T}, \quad (24)$$

$$\int_0^{+\infty}(\|\bar{y}^{\varepsilon}(t)\|^2+\gamma u^2[\bar{y}^{\varepsilon}(t)])\,dt\le$$

$$\le \frac{1+\gamma\|R\|^2}{\delta}\left(\|\bar{y}^{\varepsilon}(T)\|^2+C_1\int_T^{+\infty}a_{\varepsilon}^2(p)\,dp\right)\le$$

$$\le \frac{1+\gamma\|R\|^2}{\delta}\left(\|y_0\|^2 e^{-\delta T}+C_1\int_0^{+\infty}a_{\varepsilon}^2(p)\,dp\right). \quad (25)$$

Отже,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{J}_{\varepsilon}=J(\bar{y},u[\bar{y}])=J_0. \quad (26)$$

Тепер покажемо, що $\tilde{J}_{\varepsilon}\to J_0$, $\varepsilon\to 0$. Нехай $\tilde{J}_{\varepsilon}=J(\tilde{y}^{\varepsilon},(\tilde{u})^{\varepsilon})$, де $\{\tilde{y}^{\varepsilon},\tilde{u}^{\varepsilon}\}$ – оптимальний процес у (1)–(3).

Нехай z^{ε} – розв'язок задачі (1) з керуванням $u=0\in U$. Тоді з оптимальності $\tilde{u}^{\varepsilon}$ маємо

$$\|\tilde{u}^{\varepsilon}\|_U^2\le\frac{1}{\gamma}\int_0^{+\infty}\|z^{\varepsilon}(t)\|^2 dt\le\frac{(\|y_0\|^2+C_1\|a_{\varepsilon}\|_U^2)}{\gamma\delta}. \quad (27)$$

Повторюючи попередні міркування, маємо, що існує $\tilde{u}\in U$ таке, що по підпослідовності $\forall\, T>0$ $\tilde{u}^{\varepsilon}\xrightarrow{w}\tilde{u}$ в $L^2(0,T)$, $\tilde{y}^{\varepsilon}\to\tilde{y}$ в $C([0,T];H)$, де $\tilde{y}$ – розв'язок задачі (4) з $u=\tilde{u}$. Зокрема, $\forall\, T>0$

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\tilde{J}_{\varepsilon}\ge\varliminf_{\varepsilon\to 0}J_T(\tilde{y}^{\varepsilon},\tilde{u}^{\varepsilon})\ge J_T(\tilde{y},\tilde{u}),$$

тобто

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\tilde{J}_{\varepsilon}\ge J(\tilde{y},\tilde{u}). \quad (28)$$

За принципом оптимальності Беллмана $\forall\, T>0$ процес $\{\tilde{y}^{\varepsilon},\tilde{u}^{\varepsilon}\}$ на $[T,\infty)$ є оптимальним для задачі (1)–(3) з початковими даними $(T,\tilde{y}^{\varepsilon}(T))$. Отже,

$$\int_T^{+\infty}\|\tilde{y}^{\varepsilon}(t)\|^2 dt+\gamma\int_T^{+\infty}|\tilde{u}^{\varepsilon}(t)|^2 dt\le\int_T^{+\infty}\|p^{\varepsilon}(t)\|^2 dt, \quad (29)$$

де p^{ε} – розв'язок задачі (1) на $[T,+\infty)$ з керуванням $u=0$ та початковими даними $(T,\tilde{y}^{\varepsilon}(T))$. З (14), (15) маємо

$$\int_T^{+\infty}\|p^{\varepsilon}(t)\|^2\,dt\le\frac{1}{\delta}\left(\|\tilde{y}^{\varepsilon}(T)\|^2+C_1\int_T^{+\infty}a_{\varepsilon}^2(t)dt\right). \quad (30)$$

Тепер зафіксуємо $u\in U$ і відповідний розв'язок w^{ε} задачі (1). Тоді аналогічно попереднім міркуванням $\forall\, T>0$ $w^{\varepsilon}\to w$ в $C([0,T];H)$ при $\varepsilon\to 0$, де w – розв'язок задачі (4) з керуванням u. Крім того,

$$\int_T^{+\infty}\|w^{\varepsilon}(t)\|^2 dt\le.$$

$$\le\frac{1}{\delta}\left(\|w^{\varepsilon}(T)\|^2+C_1\int_T^{+\infty}(u^2(t)+a_{\varepsilon}^2(t))\,dt\right). \quad (31)$$

Тоді з нерівності $\tilde{J}_{\varepsilon}\le J(w^{\varepsilon},u)$ та оцінок (9)–(31) для $\forall\, T>0$ маємо

$$J_T(\tilde{y}^{\varepsilon},\tilde{u}^{\varepsilon})\le\int_0^T\|w^{\varepsilon}(t)\|^2 dt+\gamma\int_0^{+\infty}u^2(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\delta}\|w^{\varepsilon}(T)\|^2+\frac{C_1}{\delta}\int_T^{+\infty}u^2(t)\,dt+\frac{C_1}{\delta}\int_T^{+\infty}a_{\varepsilon}^2(t)\,dt. \quad (32)$$

Звідси

$$J_T(\tilde{y},\tilde{u})\le\varlimsup_{\varepsilon\to 0}J_T(\tilde{y}^{\varepsilon},\tilde{y}^{\varepsilon})\le\frac{1}{\delta}\|w(T)\|^2+$$

$$+\int_0^T\|w(t)\|^2 dt+\gamma\int_0^{+\infty}u^2(t)\,dt+\frac{C_1}{\delta}\int_T^{+\infty}u^2(t)\,dt. \quad (33)$$

Тоді при $T\to\infty$ маємо, що $J(\tilde{y},\tilde{u})\le$ $\le J(w,u)$ $\forall\, u\in U$.

Отже, $\{\tilde{y},\tilde{u}\}$ – оптимальний процес у задачі (4)–(6). Тепер у попередніх міркуваннях покладемо $u=\tilde{u}$. Тоді в силу єдиності $\tilde{w}^{\varepsilon}\to\tilde{y}$ в $C([0,T];H)$ і маємо оцінку

$$\gamma \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_0^{+\infty} |\tilde{u}^{\varepsilon}(t)|^2 dt \le$$

$$\le \int_0^{+\infty} \tilde{u}^2(t)\,dt + \frac{1}{\delta}|\tilde{y}(T)|^2 + \frac{C_1}{\delta}\int_T^{+\infty} \tilde{u}^2(t)\,dt, \qquad (34)$$

з якої при $T \to \infty$ отримаємо

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_0^{+\infty} |\tilde{u}^{\varepsilon}(t)|^2 dt \le \int_0^{+\infty} \tilde{u}^2(t)\,dt.$$

Таким чином, $\tilde{u}^{\varepsilon} \to \tilde{u}$ в $L^2(0,+\infty)$, і оскільки

$$\tilde{J}_{\varepsilon} \le J_T(\tilde{y}^{\varepsilon},\tilde{u}^{\varepsilon}) + \frac{1}{\delta}\|\tilde{y}^{\varepsilon}(T)\|^2 + \frac{C_1}{\delta}\int_T^{+\infty} a_{\varepsilon}^2(t)\,dt,$$

то

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \tilde{J}_{\varepsilon} \le J_T(\tilde{y},\tilde{u}) + \frac{1}{\delta}\|\tilde{y}(T)\|^2.$$

Отже, при $T \to \infty$ одержуємо

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \tilde{J}_{\varepsilon} \le J(\tilde{y},\tilde{u}) = J_0,$$

що разом із (28) гарантує збіжність $\tilde{J}_{\varepsilon} \to J_0$, $\varepsilon \to 0$. Припускаючи від супротивного, що збіжність йде не по всій послідовності $\varepsilon \to 0$, можемо повторити попередні міркування і, в силу єдиності оптимального процесу $\{\tilde{y},\tilde{u}\}$, прийдемо до протиріччя. Теорему доведено.

Висновки

У статті для задачі оптимального керування для еволюційного включення з неавтономним збуренням у коефіцієнтах на нескінченному часовому проміжку обґрунтовано процедуру наближеної стабілізації, виходячи з точної форми оптимального регулятора незбуреної задачі. Отримані результати дають можливість розвинути методи наближеної стабілізації для класу нескінченновимірних еволюційних задач з неавтономними багатозначними збуреннями.

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Пер. с фр. Л.Р. Волевича. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
2. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 410 с.
3. *Иваненко В.И., Мельник В.С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. – К.: Наук. думка, 1988. – 288 с.
4. *Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – К.: Наук. думка, 2004. – 588 с.
5. *M.Z. Zgurovsky and V.S. Melnik,* Nonlinear analysis and control of physical processes and fields. Germany, Berlin: Springer, 2004, 250 pp.
6. *N.S. Papageorgion,* “A convergence result for a sequence of distributed-parameter optimal control problems”, J. of optimization theory and applications, vol. 68, no. 2, pp. 305–320, 1991.
7. *Z. Denkovski and S. Mortola,* “Asymptotic behaviour of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations”, Ibid, vol. 78, no. 2, pp. 365–391, 1993.
8. *Капустян В.Е.* Оптимальная стабилизация ограниченным сосредоточенным управлением решений параболической краевой задачи // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 6. – С. 58–67.
9. *Ясінський В.В., Капустян О.А.* Наближені екстремальні розв’язки для еволюційних включень субдиференціального типу // Системні дослідження та інформ. технології. – 2009. – № 4. – С. 109–116.
10. *Капустян О.А., Ясінський В.В.* Наближений регулятор для еволюційного включення субдиференціального типу // Там же. – 2012. – № 1. – С. 87–93.
11. *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.* О *G*-сходимости параболических операторов // УМН. – 1981. – **36**, № 1. – С. 11–57.
12. *J.-P. Aubin and H. Frankowska*, Set-Valued Analysis. Boston: Birkhduser, 1990, 461 pp.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
7 вересня 2012 року