УДК 519.21

Л.П. Голубовська, О.В. Іванов, І.В. Орловський

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ У ВИПАДКУ СИЛЬНОЗАЛЕЖНИХ РЕГРЕСОРІВ

The paper considers linear regression model with long-range/weak dependent random noise and time dependent regressors which are observed with long-range dependent errors. Parameter estimation of these models is an important problem of statistics of random processes. We choose widely used least squares estimator for the estimation. The aim of this work is to prove consistency and asymptotic normality of least squares estimator of the regression model. Theory of stationary Gaussian random processes with long-range and weak dependence, properties of slowly varying functions and Hцlder–Young–Brascamp–Lieb inequality are used to derive the results. In this paper, we obtain sufficient conditions for consistency and asymptotic normality of least squares estimator of regression parameters.

Вступ

Оцінювання параметрів лінійної та нелінійної регресій є важливою задачею статистики випадкових процесів. Однією з важливих лінійних моделей регресії є класична модель типу “сигнал + шум”, але з регресорами, які спостерігаються з помилками. Для оцінювання параметрів таких моделей виберемо оцінку найменших квадратів (о.н.к.) — одну з найважливіших та широко використовуваних оцінок параметрів регресійних моделей.

При оцінюванні параметрів моделей регресії дуже важливу роль відіграють асимптотичні властивості використовуваних оцінок. Консистентність та асимптотична нормальність — це перші дві властивості, які потрібно досліджувати, оскільки вони є необхідними для подальшого детальнішого вивчення асимптотичної поведінки оцінок.

Асимптотичні властивості о.н.к. параметрів лінійних моделей з регресорами, які спостерігаються з помилками, розглядались у книзі А.Я. Дороговцева [1]. Дана стаття продовжує ці дослідження, розширюючи їх на випадок, коли помилки у спостереженнях і випадковий шум можуть бути як слабко-, так і сильнозалежними.

Постановка задачі

Розглянемо модель регресії

$$X(t)=\sum_{i=1}^{q}\theta_i z_i(t)+\varepsilon(t),\ t\in[0,T],$$
$$z_i(t)=a_i(t)+y_i(t),\ i=\overline{1,q}, \tag{1}$$

де $\theta^*=(\theta_1,\ldots,\theta_q)\in\mathbb{R}^q$ — вектор невідомих параметрів (* означає транспонування), $a_i:[0,\infty)\to\mathbb{R}^1$, $i=\overline{1,q}$ — деякі невипадкові неперервні функції і

1) $y_i(t),\ t\in\mathbb{R}^1$, $i=\overline{1,q}$, — незалежні, неперервні у середньоквадратичному, вимірні стаціонарні гауссові процеси, $Ey_i(0)=0$;

2) випадковий шум $\varepsilon(t),\ t\in\mathbb{R}^1$, — неперервний у середньому квадратичному, вимірний гауссов стаціонарний процес, що не залежить від $y_i(t),\ t\in\mathbb{R}^1$, $i=\overline{1,q}$, $E\varepsilon(0)=0$.

Означення **1.** О.н.к. невідомого параметра θ, одержаною за спостереженнями $\{X(t),z_i(t),$ $i=\overline{1,q},\ t\in[0,T]\}$ вигляду (1), називається будь-який випадковий вектор $\widehat{\theta}_T=\widehat{\theta}_T(X(t),z_i(t),$ $i=\overline{1,q},\ t\in[0,T])$, для якого

$$Q_T(\widehat{\theta}_T)=\inf_{\tau\in\mathbb{R}^q}Q_T(\tau),$$
$$Q_T(\tau)=\int_0^T\left[X(t)-\sum_{i=1}^{q}\tau_i z_i(t)\right]^2dt.$$

Введемо такі позначення:

$$A^*(t)=(a_1(t),\ldots,a_q(t)),$$
$$Y^*(t)=(y_1(t),..,y_q(t)),\ \ Z(t)=A(t)+Y(t),$$
$$f_1\underset{T\to\infty}{\sim}f_2 \text{ означає, що } \frac{f_1(t)}{f_2(t)}\underset{T\to\infty}{\to}1.$$

Тоді

$$\widehat{\theta}_T=\Lambda_T^{-1}\frac{1}{T}\int_0^T Z(t)X(t)dt=$$

$$= \theta + \Lambda_T^{-1} \frac{1}{T} \int_0^T Z(t)\varepsilon(t)dt, \qquad (2)$$

де

$$\Lambda_T = (\Lambda_T^{il})_{i,\,l=1}^q = \frac{1}{T} \int_0^T Z(t) Z^*(t)\, dt.$$

У статті увагу зосереджено на отриманні сильної консистентності та асимптотичної нормальності о.н.к. $\widehat{\theta}_T$.

Допоміжні твердження

Розглянемо деякі твердження, необхідні для отримання основних результатів роботи.

Нехай для процесів додатково виконується припущення

3) $y_i(t),\, t \in \mathbb{R}^1,\, i = \overline{1,q}$, – процеси, що задовольняють умову сильної залежності, тобто коваріаційні функції (к.ф.) $B_i(t) = Ey_i(0)y_i(t) = = \dfrac{L_i(|t|)}{|t|^{\alpha_i}}$, $L_i(t),\, t > 0$, – повільно змінні на нескінченності функції (п.з.ф.), обмежені на кожному скінченному інтервалі з $(0,\infty)$, $\alpha_i \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right),\, i = \overline{1,q}$.

Сформулюємо одну властивість п.з.ф., яка буде використовуватися далі і є узагальненням теореми 2.7 з [2, с. 65–67].

Лема 1. Нехай число $\eta \ge 0$ та вимірна функція $f(t,s)$, визначена на $(0,\infty)\times(0,\infty)$, такі, що інтеграл

$$\int_0^\beta \int_0^\beta \frac{f(t,s)}{|t-s|^\eta} dtds$$

збігається при деякому $0 < \beta < \infty$. Нехай п.з.ф. L обмежена на кожному скінченному інтервалі з $\mathbb{R}_+$. Тоді при $\eta > 0$ виконується співвідношення

$$\int_0^\beta \int_0^\beta L(T|t-s|) f(t,s) dtds \underset{T\to\infty}{\sim} L(T) \int_0^\beta \int_0^\beta f(t,s) dtds.$$

У випадку $\eta = 0$ для виконання цього співвідношення достатньо неспадання на півосі $(0,\infty)$ функції L.

Літерами k будемо позначати додатні константи. Нехай також

$$d_T^2 = \operatorname{diag}(d_{iT}^2)_{i=1}^q,\; d_{iT}^2 = \int_0^T a_i^2(t)dt,\; i = \overline{1,q}.$$

Введемо додаткові умови на функції $a_i(t)$, $t \in [0,+\infty),\, i = \overline{1,q}$:

4) $\lim\limits_{T\to\infty} T^{-1} d_{iT}^2 = k_i,\; 0 < k_i < \infty,\; i = \overline{1,q}$.

5) $a_i(t),\, t \in \mathbb{R}^1,\; i = \overline{1,q}$ – обмежені функції.

Введемо позначення $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^1} |a_i(t)| = \tilde{k}_i < \infty$, $i = \overline{1,q}$. Запишемо

$$J_T = (J_T^{il})_{i,\,l=1}^q,\; J_T^{il} = \frac{1}{T} \int_0^T a_i(t) a_l(t) dt.$$

6) $\lim\limits_{T\to\infty} J_T = J$, де $J = (J^{il})_{i=1}^q$ – деяка додатно визначена матриця.

Введемо також позначення

$$\Lambda = R(0) + J,\; R(0) = \operatorname{diag}(B_i(0))_{i=1}^q.$$

Дослідимо асимптотичну поведінку Λ_T .

Лема 2. Якщо виконано умови 1, 3–6, то

$$\Lambda_T \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda, \quad \text{майже напевно (м.н.).}$$

Д о в е д е н н я. Для фіксованих i, l розглянемо загальний елемент матриці Λ_T

$$\Lambda_T^{il} = \frac{1}{T}\int_0^T y_i(t) y_l(t) dt + \frac{1}{T}\int_0^T a_i(t) y_l(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{T}\int_0^T y_i(t) a_l(t) dt + \frac{1}{T}\int_0^T a_i(t)\, a_l(t)\, dt =$$

$$= \Delta^{il}(T) + \Delta_i^l(T) + \Delta_l^i(T) + J_T^{il}. \qquad (3)$$

Нехай $i \ne l$. Тоді для достатньо великих T $(T > T_0)$

$$E(\Delta^{il}(T))^2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T B_i(t-s) B_l(t-s) dtds =$$

$$= \frac{1}{T^{\alpha_i+\alpha_l}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{L_i(T(t-s))\, L_l(T(t-s))}{|t-s|^{\alpha_i+\alpha_l}} dtds.$$

Застосуємо до останнього інтеграла лему 1, поклавши як $f(t,s) = \dfrac{1}{|t-s|^{\alpha_i+\alpha_l}}$, яка задовольняє умови леми завдяки тому, що $\alpha_i \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $i = \overline{1,q}$. Тоді, взявши до уваги, що

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dt\,ds}{|t-s|^{\alpha_i+\alpha_l}} = \frac{2}{(1-\alpha_i-\alpha_l)(2-\alpha_i-\alpha_l)},$$

отримаємо

$$E(\Delta^{il}(T))^2 \underset{T\to\infty}{\sim} \frac{2B_i(T)B_l(T)}{(1-\alpha_i-\alpha_l)(2-\alpha_i-\alpha_l)}. \quad (4)$$

Покладемо $T_n = n^{\frac{1}{\alpha_i+\alpha_l}+\nu}$, де $\nu > 0$. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} B_i(T_n)B_l(T_n) < \infty$, і, відповідно,

$$\Delta^{il}(T_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ м.н.}$$

Нехай $T \in [T_n, T_{n+1}]$. Тоді

$$|\Delta^{il}(T)| \le \sup_{T_n \le T \le T_{n+1}} |\Delta^{il}(T) - \Delta^{il}(T_n)| + |\Delta^{il}(T_n)|.$$

Покажемо, що

$$\sup_{T_n \le T \le T_{n+1}} |\Delta^{il}(T) - \Delta^{il}(T_n)| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ м.н.}$$

Очевидно,

$$\Delta^{il}(T) - \Delta^{il}(T_n) = \frac{1}{T}\int_0^T y_i(t)y_l(t)dt -$$

$$-\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} y_i(t)y_l(t)dt = \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_n}\right)\int_0^{T_n} y_i(t)y_l(t)dt +$$

$$+\frac{1}{T}\int_{T_n}^{T} y_i(t)y_l(t)dt = I_1 + I_2. \quad (5)$$

З того, що $\frac{T_{n+1}-T_n}{T_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha_i+\alpha_l}+\nu} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{\alpha_i+\alpha_l}+\nu}{n}$, випливає

$$|I_1| \le \frac{T_{n+1}-T_n}{T_n}\cdot\left|\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} y_i(t)y_l(t)dt\right| \underset{n\to\infty}{\sim}$$

$$\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{\alpha_i+\alpha_l}+\nu}{n}|\Delta^{il}(T_n)|,$$

і, відповідно, $I_1 \underset{n\to\infty}{\to} 0$ м.н.

Розглянемо другий доданок (5):

$$|I_2| \le \frac{1}{T_n}\int_{T_n}^{T_{n+1}} |y_i(t)|\cdot|y_l(t)|\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_n}\int_{T_n}^{T_{n+1}} (y_i(t))^2 dt + \frac{1}{T_n}\int_{T_n}^{T_{n+1}} (y_l(t))^2 dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(I_3^i(n) + I_3^l(n)),$$

$$I_3^i(n) =$$

$$= \frac{1}{T_n}\int_{T_n}^{T_{n+1}} [(y_i(t))^2 - B_i(0)]dt + \frac{T_{n+1}-T_n}{T_n}B_i(0) =$$

$$= I_4^i(n) + I_5^i(n).$$

Очевидно,

$$I_5^i(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

З іншого боку,

$$I_4^i(n) = \frac{T_{n+1}}{T_n}I_6^i(n+1) - I_6^i(n),$$

де

$$I_6^i(n) = \frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} [(y_i(t))^2 - B_i(0)]dt.$$

Покажемо, що

$$I_6^i(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ м.н.} \quad (6)$$

Використовуючи формулу Ісерліса (див., напр., [3, с. 30]), отримаємо

$$E(I_6^i(n))^2 =$$

$$= \frac{1}{T_n^2}\int_0^{T_n}\int_0^{T_n} (E(y_i(t))^2(y_i(s))^2 - B_i^2(0))dtds =$$

$$= \frac{2}{T_n^2}\int_0^{T_n}\int_0^{T_n} B_i^2(t-s)dtds \sim \frac{2B_i^2(T_n)}{(1-2\alpha_i)(1-\alpha_i)},$$

$$T \to \infty.$$

Тепер, якщо покласти в T_n $\nu > \max\left\{0; \frac{\alpha_l - \alpha_i}{2\alpha_i(\alpha_i+\alpha_l)}\right\}$, то з попередньої еквівалентності випливає, що $\sum_{n=1}^{\infty} E(I_6^i(n))^2 < \infty$ і, відповідно, (6) виконується. Оскільки для $I_3^l(n)$ цей факт доводиться так само, то $I_2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$ м.н., і тому

$$\Delta^{il}(T) \underset{T\to\infty}{\to} 0 \text{ м.н.} \quad (7)$$

Доведемо, що

$$\Delta_i^l(T) \underset{T\to\infty}{\to} 0 \quad \text{м.н.}, \ i,l = \overline{1,q}. \quad (8)$$

Очевидно, $E\Delta_i^l(T) = 0$,

$$E(\Delta_i^l(T))^2 \le \tilde{k}_i^2 \int_0^1\int_0^1 |B_l(T(t-s))|\,dtds =$$

$$= \frac{\tilde{k}_i^2}{T^{\alpha_l}} \int_0^1\int_0^1 \frac{|L_l(T(t-s))|}{|t-s|^{\alpha_l}} dtds.$$

Аналогічно до (4),

$$E(\Delta_i^l(T))^2 \le \frac{\tilde{k}_i^2}{T^{\alpha_l}} \int_0^1\int_0^1 \frac{|L_l(T(t-s))|}{|t-s|^{\alpha_l}} dtds \underset{T\to\infty}{\sim}$$

$$\underset{T\to\infty}{\sim} \frac{2\tilde{k}_i^2 B_l(T)}{(1-\alpha_l)(2-\alpha_l)}.$$

Покладемо $T_n = n^{\frac{1}{\alpha_l}+\nu}$, де $\nu > 0$. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} B_l(T_n) < \infty$, і, відповідно,

$$\Delta_i^l(T_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ м.н.}$$

Подальше доведення (8) є аналогічним до (7).

З (7), (8) та умови 6 випливає, що при $i \ne l$,

$$\Lambda_T^{il} \underset{T\to\infty}{\to} J^{il} \text{ м.н.}$$

Нехай тепер $i = l$. Тоді (3) перепишеться у вигляді

$$\Lambda_T^{ii} = \Delta^{ii}(T) + 2\Delta_i^i(T) + J_T^{ii}.$$

Із застосуванням міркувань, які використовувалися при доведенні (7), можна отримати, що

$$\Delta^{ii}(T) \underset{T\to\infty}{\to} B_i(0) \text{ м.н.} \quad (9)$$

Дійсно, $E\Delta^{ii}(T) = B_i(0)$, а за формулою Ісерліса

$$E[\Delta^{ii}(T) - B_i(0)]^2 = \frac{2}{T^2}\int_0^T\int_0^T B_i^2(t-s)dtds \underset{T\to\infty}{\sim}$$

$$\underset{T\to\infty}{\sim} \frac{2B_i^2(T)}{(1-2\alpha_i)(1-\alpha_i)}.$$

Якщо покласти $T_n = n^{\frac{1}{2\alpha_i}+\nu}$, де $\nu > 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} B_i^2(T_n) < \infty$, і, відповідно,

$$\Delta^{ii}(T_n) \underset{n\to\infty}{\to} B_i(0) \text{ м.н.}$$

Подальше доведення (9) проводиться аналогічно до (7).

Тоді з умови 6, (8) і (9) випливає, що

$$\Lambda_T^{ii} \underset{T\to\infty}{\to} B_i(0) + J^{ii} \text{ м.н.},$$

і лему 2 доведено.

З доведеної леми випливає таке твердження.

Наслідок. Якщо виконано умови 1, 3–6, то для майже всіх $\omega \in \Omega$ існує таке $T_0 = T_0(\omega)$, що для всіх $T > T_0$ о.н.к. $\hat{\theta}_T$, яку задано (2), є визначеною.

Сформулюємо частинний випадок однорідної нерівності Гельдера–Юнга–Браскампа–Ліба для простору $\mathbb{R}^1$ (більш детально див. [4, 5]). Будемо позначати $r(A)$ – ранг матриці A.

Лема 3. Нехай $l_j(x) = x^*\beta_j$, $j = \overline{1,k}$ є лінійними функціоналами $l_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, $\beta_j \in \mathbb{R}^m$, $j = \overline{1,k}$, M – матриця, стовпцями якої є β_j, $j = \overline{1,k}$.

Якщо функції $f_j \in L_{p_j}(\mathbb{R}^1)$, $j = \overline{1,k}, 1 \le p_j \le \infty$, причому для величин $z_j = \frac{1}{p_j}$, $j = \overline{1,k}$, виконується одна з умов:

(i) $\sum_{j=1}^{k} z_j = m$ і для довільних $1 \le d \le k$ та $\{s_1,..., s_d\} \subset \{1,...,k\}$ виконується

$$\sum_{i=1}^{d} z_{s_i} \le r(A),$$

де $A = (\beta_{s_1} \ldots \beta_{s_d})$;

$(ii)\sum_{j=1}^{k} z_j = m$ і для довільних $1 \le d \le k$ та $\{s_1,..., s_d\} \subset \{1,...,k\}$ виконується

$$\sum_{i=1}^{d} z_{s_i} \ge r(M) - r(A^c),$$

де $A = (\beta_{s_1} ... \beta_{s_d})$, A^c – матриця, складена з тих стовпців з M, які не належать до A.

Тоді

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} \prod_{j=1}^{k} f_j(l_j(x))dx \right| \le K \prod_{j=1}^{k} \| f_j \|_{p_j},$$

де $K = K(z_1,...,z_k)$ – деяка константа, яка залежить лише від значень $(z_1,...,z_k)$ (щодо визначення значеня K див. [5]), $\|\cdot\|_{p_j}$ – норма в $L_{p_j}(\mathbb{R}^1)$.

Сильна консистентність о.н.к.

Зробимо додаткове припущення стосовно процесу $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}^1$.

7) Випадковий процес $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}^1$, має інтегровну к.ф. $B(t) = E\varepsilon(0)\varepsilon(t)$.

Теорема 1. Якщо виконано умови 1–7, то о.н.к. $\hat{\theta}_T$ є сильно консистентною оцінкою параметра θ, тобто $\hat{\theta}_T \underset{T\to\infty}{\to} \theta$ м.н.

Доведення. З леми 2 та подання о.н.к. у вигляді (2) випливає, що для доведення теореми достатньо показати, що

$$\frac{1}{T}\int_0^T Z(t)\varepsilon(t)dt \underset{T\to\infty}{\to} 0 \quad \text{м.н.} \qquad (10)$$

Для фіксованого i

$$\frac{1}{T}\int_0^T z_i(t)\varepsilon(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T a_i(t)\varepsilon(t)dt +$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T y_i(t)\varepsilon(t)dt = I_7(T) + I_8(T). \qquad (11)$$

Очевидно,

$$EI_8(T) = 0,$$

$$EI_8^2(T) = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T B_i(t-s)B(t-s)dtds,$$

$B_i(t)B(t) \in L_1(\mathbb{R}^1)$, і за теоремою Лебега про можаровану збіжність

$$\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T B_i(t-s)B(t-s)dtds =$$

$$= \int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)B_i(t)B(t)dt \underset{T\to\infty}{\to} \int_{-\infty}^{\infty} B_i(t)B(t)dt = b_i.$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ і для $T > T_0(\varepsilon) > 0$

$$EI_8^2(T) < (b_i + \varepsilon)T^{-1}.$$

Покладемо $T_n = n^{1+\nu}, \nu > 0$ – деяке число. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} EI_8^2(T_n) < +\infty$ і, відповідно, $I_8^2(T_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ м.н.

Подальше доведення є аналогічним до доведення (7) з леми 2.

Нехай замість умови 7 виконано умову

8) випадковий шум $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}^1$, має к.ф. $B(t) = \frac{L(|t|)}{|t|^{\alpha}}$, $L(t), t > 0$, – п.з.ф., яка обмежена на кожному скінченному інтервалі з $(0,\infty)$, $\alpha \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Теорема 2. Якщо виконано умови 1–6 і 8, то $\hat{\theta}_T \underset{T\to\infty}{\to} \theta$ м.н.

Доведення. Аналогічно до доведення теореми 1 нам достатньо показати, що за умов теореми виконується (10).

Для фіксованого i розглянемо подання (11). Доведення того, що $I_7(T) \underset{T\to\infty}{\to} 0$ м.н. та $I_8(T) \underset{T\to\infty}{\to} 0$ м.н. повторює доведення збіжності до нуля м.н. $\Delta_i^l(T)$ і $\Delta^{il}(T)$ з леми 2 відповідно.

Зауважимо, що для випадку, коли деякі з $k_i = \infty$, можна довести аналогічні результати. В цьому випадку умови 4–6 переформулюються таким чином:

4′) $\lim_{T\to\infty} T^{-1}d_{iT}^2 = k_i, 0 < k_i \le \infty, i = \overline{1,q}$, якщо для деякого i, $k_i = \infty$, то існує таке $\mu_i > 0$, що $Td_{iT}^{-2} = o(T^{-\mu_i})$.

5′) $\sup\limits_{t\in[0,T]} \dfrac{|a_i(t)|}{d_{iT}} \le \breve{k}_i T^{-\frac{1}{2}}$, $i=\overline{1,q}$.

Запишемо

$$\tilde{J}_T = (\tilde{J}_T^{il})_{i,\,l=1}^q,\ \tilde{J}_T^{il} = d_{iT}^{-1} d_{lT}^{-1} \int_0^T a_i(t)\, a_l(t)\, dt.$$

6′) $\lim\limits_{T\to\infty} \tilde{J}_T = \tilde{J}$, де $\tilde{J} = (\tilde{J}^{il})_{i=1}^q$ – деяка додатно визначена матриця.

Теорема 3. Якщо виконано умови 1–3, 7 і 4′–6′, то $T^{-1/2} d_T (\hat{\theta}_T - \theta) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$ м.н.

Теорема 4. Якщо виконано умови 1–3, 8 і 4′–6′, то $T^{-1/2} d_T (\hat{\theta}_T - \theta) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$ м.н.

Асимптотична нормальність о.н.к.

Введемо матричну міру $\mu_T(dx)$ на $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ з матрицею щільності:

$$(\mu_T^{jl}(x))_{j,\,l=1}^q,$$

$$\mu_T^{jl}(x) =$$

$$= a_T^j(x)\overline{a_T^l(x)} \left(\int_{\mathbb{R}^1} |a_T^j(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}^1} |a_T^l(x)|^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$a_T^j(x) = \int_0^T e^{ixt} a_j(t)\, dt,\ j, l = \overline{1,q}.$$

Зауважимо, що $d_{jT}^2 = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^1} |a_T^j(x)|^2 dx$, $j=\overline{1,q}$.

Зазначимо також, що з умови 7 випливає, що випадковий процес $\varepsilon(t), t\in\mathbb{R}^1$, має неперервну та обмежену спектральну щільність f_ε.

9) Сім'я мір $\mu_T(\cdot)$ слабко збігається до міри $\mu(\cdot)$ при $T\to\infty$ та $\int_{\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\mu(dx)$ – додатно визначена матриця.

***Означення* 2.** Матрична міра $\mu(\cdot)$ називається спектральною мірою функції регресії $\sum\limits_{i=1}^q \theta_i a_i(t)$ (детальніше див. [6–8]).

Введемо деякі позначення:

$$\Gamma = \mathrm{diag}(k_i)_{i=1}^q,$$

де k_i задано в умові 4; $b_i = \int_{-\infty}^{\infty} B_i(t) B(t)\, dt$, $i=\overline{1,q}$; $\sigma = 2\pi\cdot\Gamma^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\mu(dx)\right)\Gamma^{1/2} + \mathrm{diag}(b_i)_{i=1}^q$.

Теорема 5. Якщо виконано умови 1–7 і 9, то розподіл нормованої о.н.к.

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta)$$

при $T\to\infty$ збігається до гауссового розподілу $N(0, \Lambda^{-1}\sigma\Lambda^{-1})$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $\sqrt{T}(\theta_T - \theta) = \Lambda_T^{-1}\Psi_T$, де

$$\Psi_T = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T Z(t)\,\varepsilon(t)\, dt,$$

та в силу леми 2 для доведення достатньо розглянути асимптотичний розподіл вектора Ψ_T.

Нехай $\lambda^* = (\lambda_1, ..., \lambda_q) \in \mathbb{R}^q$ – довільний фіксований вектор, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра, яку породжено $\{Y(t), t\in\mathbb{R}^1\}$. Умовний розподіл випадкової величини $\lambda^*\Psi_T$ відносно $\mathcal{F}$ є гауссовим із середнім $E\{\lambda^*\Psi_T \mid \mathcal{F}\} = 0$ та дисперсією

$$E\{(\lambda^*\Psi_T)^2 \mid \mathcal{F}\} =$$

$$= \lambda^* \left(\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T Z(t) Z^*(s) B(t-s)\, dt\, ds \right) \lambda = \lambda^* \sigma_T \lambda,$$

де рівності є правильними м.н. [1]. Тому для характеристичної функції вектора Ψ_T маємо

$$\varphi_T(\lambda) = Ee^{\lambda^*\Psi_T} = E\{E(e^{\lambda^*\Psi_T} \mid \mathcal{F}\} = Ee^{-\frac{1}{2}\lambda^*\sigma_T\lambda}.$$

Розглянемо поведінку елементів матриці σ_T при $T\to\infty$. Для i-го діагонального елемента σ_T^{ii} матриці σ_T маємо

$$\sigma_T^{ii} = \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T B(t-s)\, a_i(t)\, a_i(s)\, dt\, ds +$$

$$+ \frac{2}{T}\int_0^T\int_0^T B(t-s)\, a_i(s)\, y_i(t)\, dt ds +$$

$$+ \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T B(t-s)\, y_i(t)\, y_i(s)\, dt\, ds = I_{11} + I_{12} + I_{13}. \quad (12)$$

Для першого доданка легко отримати, використовуючи умову 4, що

$$I_{11} \underset{T\to\infty}{\to} \frac{k_i}{d_{iT}^2}\int_0^T\int_0^T B(t-s)a_i(t)\,a_i(s)dtds =$$

$$= 2\pi k_i \int_{\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\mu_T^{ii}(dx) \underset{T\to\infty}{\to}$$

$$\underset{T\to\infty}{\to} 2\pi k_i \int_{\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\mu^{ii}(dx;\theta). \qquad (13)$$

Далі,

$$EI_{12}^2 =$$

$$= \frac{4}{T^2}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T B(t-s)B(u-v)B_i(t-u)a_i(s)\times$$

$$\times a_i(v)dtdsdudv = \frac{4}{T^2}\int_{\mathbb{R}^4} f_1(t-s)f_2(u-v)\times$$

$$\times f_3(t-u)f_4(s)f_5(v)f_6(t)f_7(u)dtdsdudv,$$

де

$$f_1(t) = f_2(t) = B(t), \ \ t\in\mathbb{R}^1,$$

$$f_3(t) = \frac{L_i(|t|)}{|t|^{\alpha_i}}\chi_T(|t|), \ \ t\in\mathbb{R}^1,$$

$$f_4(t) = f_5(t) = a_i(t)\,\chi_T(t), \ \ t\in\mathbb{R}^1,$$

$$f_6(t) = f_7(t) = \chi_T(t), \ \ t\in\mathbb{R}^1.$$

Застосуємо до останнього інтеграла нерівність Гельдера–Юнга–Браскампа–Ліба (лема 4). Якщо покласти $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, $p_4 = p_5 = \infty$, $p_6 = p_7 = 2$, то можна показати, що умови леми 4 виконано. Тоді

$$EI_{12}^2 \le \frac{4c^2K_1}{T^2}\int_{-T}^T \frac{|L_i(|t|)|}{|t|^{\alpha_i}}dt\cdot \|a_i\cdot\chi_T\|_\infty^2\cdot\|\chi_T\|_2^2 \le$$

$$\le \frac{8c^2\tilde{k}_i^2K_1}{T^{\alpha_i}}\int_0^1\frac{|L_i(T|t|)|}{|t|^{\alpha_i}}dt \underset{T\to\infty}{\sim} \frac{8c^2\tilde{k}_i^2K_1B_i(T)}{1-\alpha_i}, \qquad (14)$$

де $K_1 = K_1\left(1, 1, 1, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $c = \int_{-\infty}^{\infty}|B(t)|dt$.

Розглянемо тепер поведінку останнього доданка (12). $B_i(t)B(t)\in L_1(\mathbb{R}^1)$, і за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$EI_{13} = \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T B(t-s)B_i(t-s)dtds =$$

$$= \int_{-T}^T\left(1-\frac{|t|}{T}\right)B_i(t)B(t)dt \underset{T\to\infty}{\to} b_i. \qquad (15)$$

Використовуючи те, що процеси $y_i(t)$, $t\in\mathbb{R}^1$, $i=\overline{1,q}$ є гауссовими, отримаємо

$$E(I_{13}-EI_{13})^2 =$$

$$= \frac{2}{T^2}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T B(t-s)B(u-v)B_i(t-u)\times$$

$$\times B_i(s-v)dtdsdudv =$$

$$= \frac{2}{T^2}\int_{\mathbb{R}^4} f_1(t-s)f_2(u-v)f_3(t-u)f_4(s-v)\times$$

$$\times f_5(t)f_6(s)f_7(u)f_8(v)dtdsdudv,$$

де

$$f_1(t) = f_2(t) = B(t), t\in\mathbb{R}^1,$$

$$f_3(t) = f_4(t) = \frac{L_i(|t|)}{|t|^{\alpha_i}}\chi_T(|t|), t\in\mathbb{R}^1,$$

$$f_j(t) = \chi_T(t), t\in\mathbb{R}^1, \ j = 5,6,7,8.$$

Застосуємо до останнього інтеграла нерівність Гельдера–Юнга–Браскампа–Ліба (лема 4). Якщо покласти $p_1 = p_2 = 1$, $p_3 = p_4 = 2$, $p_j = 4$, $j = 5,6,7,8$, то можна показати, що умови леми 4 виконано. Тоді, аналогічно до (14),

$$E(I_{13}-EI_{13})^2 \le \frac{4c^2K_2}{T^{2\alpha_i}}\int_0^1\frac{L_i^2(T|t|)}{|t|^{2\alpha_i}}dt \underset{T\to\infty}{\sim}$$

$$\underset{T\to\infty}{\sim} \frac{4c^2K_2B_i^2(T)}{1-2\alpha_i}, \qquad (16)$$

де $K_2 = K_2\left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

З (13)–(16) випливає, що

$$\sigma_T^{ii} \underset{T\to\infty}{\to} \sigma^{ii} \qquad (17)$$

за ймовірністю.

Аналогічно можна показати, що для елементів σ_T^{il} з $i\ne l$

$$\sigma_T^{il} \underset{T\to\infty}{\to} \sigma^{il} \tag{18}$$

за ймовірністю.

Таким чином, з (17) і (18) випливає, що $\sigma_T \underset{T\to\infty}{\to} \sigma$ за ймовірністю. Зауважимо також, що $\lambda^* \sigma_T \lambda \geq 0$. Тоді за теоремою Лебега про мажоровану збіжність маємо

$$\lim_{T\to\infty} \varphi_T(\lambda) = \lim_{T\to\infty} E e^{-\frac{1}{2}\lambda^* \sigma_T \lambda} = e^{-\frac{1}{2}\lambda^* \sigma \lambda},$$

тобто теорему 3 доведено.

Для випадку, коли деякі з $k_i = \infty$, теорема 5 переформулюється таким чином.

Теорема 6. Якщо виконано умови 1–3, 4′–6′, 7 і 9, то розподіл нормованої о.н.к.

$$d_T(T)(\widehat{\theta}_T - \theta)$$

при $T \to \infty$ збігається до гауссового розподілу $N(0, \tilde{\Lambda}^{-1}\sigma\tilde{\Lambda}^{-1})$, де

$$\sigma = 2\pi \int_{\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\mu(dx) + \mathrm{diag}\left(\frac{b_i}{k_i}\right)_{i=1}^q,$$

$$b_i = \int_{-\infty}^{\infty} B_i(t)B(t)dt, \quad \tilde{\Lambda} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{k_i} B_i(0)\right)_{i=1}^q + \tilde{J}$$

(вважатимемо, що $\frac{1}{k_i} = 0$ у випадку $k_i = \infty$).

Висновки

Отримані в роботі достатні умови консистентності та асимптотичної нормальності о.н.к. параметрів лінійних моделей регресії дають можливість охопити моделі з регресорами, які залежать від часу та спостерігаються з похибками, що задавольняють умову сильної залежності.

У подальших дослідженнях було б доцільно розглянути асимптотичну нормальність о.н.к. у складнішому для аналізу випадку, коли й помилки у регресорах, й випадковий шум одночасно є сильнозалежними випадковими процесами.

1. *Дороговцев А.Я.* Теория оценок параметров случайных процессов. – К.: Вища шк., 1982. – 192 с.
2. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
3. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
4. *F. Avram et al.,* "On a Szegö type limit theorem, the Hölder–Young–Brascamp-Lieb inequality, and the asymptotic theory of integrals and quadratic forms of stationary fields", ESAIM: PS, vol. 14, pp. 210–255, 2010.
5. *Lieb E.H.* Inequalities: selecta of Elliott H. Lieb. Germany, Berlin: Springer, 2000, 712 pp.
6. *Иванов А.В., Леоненко Н.Н.* Статистический анализ случайных полей. – К.: Вища шк., 1986. – 216 с.
7. *Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А.* Гауссовские случайные процессы. – М.: Наука, 1970. – 384 с.
8. *U. Grenander and M. Rosenblatt,* Statistical Analysis of Stationary Time Series. Sweden, Stockholm: Almqvist and Wiksell, 1956, 300 pp.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
24 лютого 2012 року