УДК 519.21

Ю.О. Грегуль, О.І. Клесов

ЗБІЖНІСТЬ УЗАГАЛЬНЕНИХ РЯДІВ СПІЦЕРА

The sequence of random variables $\{Y_n, n \ge 1\}$ completely converges to a constant c if the series $\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n - c| \ge \varepsilon)$ converges for all $\varepsilon > 0$. In this paper, we consider generalized Spitzer series $\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} L(n) P(|S_n| \ge n^{1/r}\varepsilon)$ for sequence of independent identically distributed random variables with values $t = 0$ and $r = 1$. For $t = 1$ and $L(x) = 1$, the convergence of last series means complete convergence to zero of sequence $\{S_n / n^{1/r}, n \ge 1\}$. The main difference between the Spitzer generalized series and ordinary Spitzer series is the presence of slowly varying function in the series. The main purpose of this paper is to find sufficient conditions of convergence of the series for not necessarily monotonic and continuous slowly varying function. If function L is not monotonically increasing than the condition $E[|X| L(|X|)] < \infty$ does not yield finiteness of the expectation. In turn, it means that in general case we should study the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n} P(|S_n - \mathrm{med}(S_n)| > \varepsilon n)$ instead of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n} P(|S_n| > \varepsilon n)$. Generalized Spitzer series includes medians of sums of random variables in case of non-monotonic functions. Our results generalize the theorem of Heyde and Rohatgi in case of non-monotonic slowly varying function. The proposed method for proving the convergence of Spitzer series can be applied for other classes of functions are studied in the theory of pseudo-regularly varying (PRV) functions.

Вступ

Послідовність випадкових величин $\{Y_k, k \ge 1\}$ називається повністю збіжною до константи c, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n - c| \ge \varepsilon)$ для всіх $\varepsilon > 0$. Поняття повної збіжності до нуля послідовності випадкових величин в теорії ймовірностей вперше було введено у роботі Сюя та Роббінса [1]. Нас цікавлять умови збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} L(n) P(|S_n| \ge n^{1/r}\varepsilon) \qquad (1)$$

для різних значень параметрів $t \ge 0$ і $0 < r < 2$ і функцій $L(x)$, де $S_1 = X_1, S_n = X_1 + \ldots + X_n, n > 1$ – часткові суми послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{X_k, k \ge 1\}$. При $t = 1$ і $L(x) = 1$ збіжність ряду (1) означає повну збіжність до нуля послідовності $\{S_n / n^{1/r}, n \ge 1\}$. Зазначимо також, що при $t < 0$ ряд (1) збіжний для будь-яких послідовностей випадкових величин і функцій $L(x)$ при довільному $\varepsilon > 0$. Сюй і Роббінс [1] знайшли достатню умову збіжності ряду (1) для $t = 1$, $r = 1$ і $L(x) = 1$, а саме: послідовність $\{S_n / n, n \ge 1\}$ збігається до нуля повністю, якщо $E[X_1] = 0$ і $E[X_1^2] < \infty$. Необхідність цієї умови була доведена Ердешем [2]. Наступні дослідження проведені для $t = 0$, $r = 1$ і $L(x) = 1$ Спіцером [3]. Згодом Катц і Баум [4, 5] узагальнили результати Сюя, Роббінса, Ердеша та Спіцера для $t \ge 0$, $0 < r < 2$ і $L(x) = 1$. Вагомим внеском у дослідження збіжності ряду (1) стала праця Хейді та Рохатгі [6], в якій були знайдені необхідні та достатні умови збіжності ряду (1) для $t \ge 0$, $0 < r < 2$ та невід'ємної неспадної неперервної повільно змінної функції $L(x)$.

Постановка задачі

Теорема 2, що наведена нижче, є узагальненням одного з результатів [6] на випадок немонотонної функції L. Метою роботи є знаходження достатніх умов збіжності ряду (1) для $t = 0$, $r = 1$ і не обов'язково монотонної або неперервної повільно змінної функції $L(x)$.

Якщо функція L не є монотонно зростаючою, то з умови $E[|X|L(|X|)] < \infty$ не випливає існування першого моменту. Це своєю чергою означає, що в загальному випадку замість ря $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n} P(|S_n| > \varepsilon n)$ необхідно вивчати ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n} P(|S_n - \mathrm{med}(S_n)| > \varepsilon n)$, який включає медіани сум $\mathrm{med}(S_n)$.

Основні результати

Теорема 1. Нехай $L(n)$ – невід'ємна повільно змінна функція. Якщо

$$E[|X|L(|X|)] < \infty, \tag{2}$$

то для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n} P(|S_n - \mathrm{med}(S_n)| > \varepsilon n) < \infty. \tag{3}$$

Якщо до умови (2) додати припущення про існування математичного сподівання, то медіан в умові (3) можна позбутися.

Теорема 2. Якщо $E[|X|L(|X|)] < \infty$ і, додатково, $E[X] = 0$, то ряд (3) збігається для будь-якого $\varepsilon > 0$ і, крім того,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n} P(|S_n| > \varepsilon n) < \infty. \tag{4}$$

При доведенні результатів нам знадобиться наведений нижче факт [7].

Лема. Для довільної повільно змінної функції $L(x)$ і для будь-якого $\gamma > 0$ знайдуться повільно змінні функції $L_1(x)$ та $L_2(x)$ такі, що $L(x) \sim L_1(x)$ і $L(x) \sim L_2(x)$, $x \to \infty$, і $L_1(x)/x^{\gamma}$ – монотонно спадає, а $L_2(x)x^{\gamma}$ – монотонно зростає при $x \to \infty$.

Тому при доведенні теорем і тверджень, що будуть наведені далі, ми будемо заміняти функцію $L(x)$ на еквівалентні при $x \to \infty$ функції $L_1(x)$ і $L_2(x)$, які мають відповідну властивість монотонності. Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що існують додатні константи C_1, C_2 і C_3, для яких

$$C_1 L_1(x) \le L(x) \le C_2 L_2(x) \le C_3 L_1(x), x > 0.$$

Для доведення теореми нам знадобляться кілька допоміжних тверджень.

Твердження 1. Нехай $t \ge 0$. Тоді для будь-якої випадкової величини X та будь-якого $a > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t L(n) P(|X| > na) < \infty \Leftrightarrow E[|X|^{t+1} L(|X|)] < \infty. \tag{5}$$

Доведення.

Крок 1. Доведемо твердження для $a = 1$. Нехай спочатку $E[|X|^{t+1} L(|X|)] < \infty$. Доведемо збіжність ряду у лівій частині (5). Виберемо $\gamma < t$. Тоді оскільки

$$\sum_{n=1}^{k} n^{t-\gamma} \le C_{t-\gamma} k^{t-\gamma+1}, \text{ то}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t L(n) P(|X| > n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^t L(n) \sum_{k=n}^{\infty} P(k < |X| \le k+1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} n^t L(n) \right) P(k < |X| \le k+1) \le$$

$$\le C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} n^t L_2(n) \right) P(k < |X| \le k+1) \le$$

$$\le C_2 C_{t-\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} k^{t+1} L_2(k) \int_{k < |X| \le k+1} dP \le$$

$$\le C_3 C_{t-\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k < |X| \le k+1} |X|^{t+1} L_1(|X|) dP =$$

$$= C_3 C_{t-\gamma} \int_{|X| > 1} |X|^{t+1} L_1(|X|) dP \le$$

$$\le \frac{C_3 C_{t-\gamma}}{C_1} E[|X|^{t+1} L(|X|)] < \infty.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^t L(n) P(|X| > n)$ збігається. Доведемо тепер, що і навпаки права частина (5) випливає з лівої. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} n^t L(n) P(|X| > n) < \infty$. Покажемо скінченність математичного сподівання $E[|X|^{t+1} L(|X|)]$:

$$E[|X|^{t+1} L(|X|)] = \int_{\Omega} |X|^{t+1} L(|X|) dP =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1 < |X| \le k} |X|^{t+1} L(|X|) dP \le$$

$$\le C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1 < |X| \le k} |X|^{t+1} L_2(|X|) dP \le$$

$$\le C_2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{t+1} L_2(k) \int_{k-1 < |X| \le k} dP \le$$

$$\leq C_3 \sum_{k=1}^{\infty} k^{t+1} L_1(k) \int_{k-1<|X|\leq k} dP \leq$$

$$\leq C C_3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} n^t L_1(n) P(k-1<|X|\leq k) =$$

$$= C C_3 \sum_{n=1}^{\infty} n^t L_1(n) \sum_{k=n}^{\infty} P(k-1<|X|\leq k) =$$

$$= C C_3 \sum_{n=1}^{\infty} n^t L_1(n) P(|X|>n-1) \leq$$

$$\leq C C_3 (L_1(1) P(|X|>0) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} n^t L_1(n) P(|X|>n-1)) =$$

$$= C C_3 (C' + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^t}{(n-1)^t} \frac{L_1(n)}{L_1(n-1)} \times$$

$$\times (n-1)^t L_1(n-1) P(|X|>n-1)).$$

Оскільки $\frac{n^t}{(n-1)^t} \leq 2$ та для повільно змінної функції $L_1(x)$ знайдеться константа K така, що $\frac{L_1(n)}{L_1(n-1)} \leq K$ для достатньо великих n, то

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^t}{(n-1)^t} \frac{L_1(n)}{L_1(n-1)} \times$$

$$\times (n-1)^t L_1(n-1) P(|X|>n-1) \leq$$

$$\leq 2K \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)^t L_1(n-1) P(|X|>n-1) =$$

$$= 2K \sum_{n=1}^{\infty} n^t L_1(n) P(|X|>n).$$

Остаточно маємо:

$$E[|X|^{t+1} L(|X|)] \leq$$

$$\leq C C_3 C' + 2K C C_3 \sum_{n=2}^{\infty} n^t L_1(n) P(|X|>n-1) \leq$$

$$\leq C C_3 C' + \frac{2KCC_3}{C_1} \sum_{n=1}^{\infty} n^t L(n) P(|X|>n) < \infty.$$

Крок 2. Твердження 1 для довільного $a>0$ випливає з доведеної вище частини для випадкових величин $Y_n = \frac{X_n}{a}$.

Твердження 2. Нехай X^s – симетризована випадкова величина. Тоді

$$E[|X^s| L(|X^s|)] < \infty \Leftrightarrow E[|X| L(|X|)] < \infty.$$

Доведення. Згідно із твердженням 1 для довільної випадкової величини X, $a>0$ при $t=0$ виконуються такі співвідношення:

$$E[|X^s| L(|X^s|)] < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} L(n) P(|X^s|> an) < \infty$$

і

$$E[|X| L(|X|)] < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} L(n) P(|X|> an) < \infty.$$

Отже, для доведення твердження 2 достатньо показати, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(n) P(|X^s|> an) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} L(n) P(|X|> an) < \infty.$$

Для цього використаємо слабкі нерівності симетризації [8]:

$$\frac{1}{2} P(|X - \mathrm{med}(X)| > x) \leq$$

$$\leq P(|X^s| > x) \leq 2P(|X| > x/2)$$

для $x>0$.

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} L(n) P(|X|> an)$ збігається для довільного $a>0$. Тоді, використавши відповідну слабку нерівність симетризації, отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(n) P(|X^s| > n) \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} L(n) P(|X| > n/2),$$

що і доводить його збіжність.

Припустимо тепер, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} L(n) P(|X^s| > an)$ збіжний. Застосувавши відповідну нерівність симетризації, отримаємо

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} L(n) P(|X - \mathrm{med}(X)| > an) < \infty.$$

Тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(n) P(|X| > n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} L(n) P(|X - \mathrm{med}(X) + \mathrm{med}(X)| > n) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} L(n) P(|X - \mathrm{med}(X)| > n/2) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} L(n)\,P(|\mathrm{med}(X)| > n/2) < \infty,$$

оскільки починаючи з деякого номера n всі доданки в другому ряді дорівнюють нулю.

Доведення теореми 1. Розглянемо симетричні випадкові величини $\{X_n, n\ge 1\}$. Покладемо для $n\ge 1$ $Y_{k,n} = X_k I\{|X_k| \le n\}$, $k=1, 2,\dots,n$, і $S'_n = \sum_{k=1}^{n} Y_{k,n}$. Використавши нерівність Чебишева, отримуємо

$$P(|S_n| > \varepsilon n) \le \frac{\mathrm{var}\,Y_{1,n}}{n\varepsilon^2} + n P(|X| > n).$$

Звідси

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(n)}{n} P(|S_n| > \varepsilon n) \le C_3 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_1(n)}{n} P(|S_n| > \varepsilon n) \le$$

$$\le \frac{C_3}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_1(n)}{n^2}\mathrm{var}\,Y_{1,n} + C_3\sum_{n=1}^{\infty} L_1(n) P(|X| > n).$$

Другий ряд збігається згідно з твердженням 1. Оцінімо перший ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_1(n)}{n^2}\mathrm{var}\,Y_{1,n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_1(n)}{n^2} E[Y_{1,n}^2] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_1(n)}{n^2} E[X^2 I\{|X| \le n\}] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_1(n)}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E[X^2 I\{k-1 < |X| \le k\}] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{L_1(n)}{n^2}\right) E[X^2 I\{k-1 < |X| \le k\}] \le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L_1(k)}{k} E[X^2 I\{k-1 < |X| \le k\}] \le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L_1(k)}{k}\int_{k-1<|X|\le k} |X|^2 dP \le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k-1<|X|\le k} |X|\,L_1(|X|)\,dP = CE[|X|\,L_1(|X|)].$$

Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_1(n)}{n} P(|S_n| > \varepsilon n) < \infty. \qquad (6)$$

Для випадку симетричних випадкових величин теорему доведено. Нехай тепер $\{X_n, n\ge 1\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин. Якщо $E[|X|L(|X|)] < \infty$, то з твердження 2 випливає, що $E[|X^s|L(|X^s|)] < \infty$. Тому згідно з доведеною частиною теореми $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(n)}{n} P(|S_n^s| > \varepsilon n) < \infty$. Використавши слабкі нерівності симетризації, доводимо тепер збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(n)}{n} P(|S_n - \mathrm{med}(S_n)| > \varepsilon n).$$

Доведення теореми 2. Згідно з теоремою 1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(n)}{n} P(|S_n - \mathrm{med}(S_n)| > \varepsilon n)$ збігається, оскільки $E[|X|L(|X|)] < \infty$. Покажемо, що ряд (4) збігається. При додатковій умові $E[X]=0$ виконується посилений закон великих чисел і $\frac{S_n}{n}\to 0$ майже напевно. Звідси також випливає закон великих чисел для збіжності за ймовірністю, тобто $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P} 0$, звідки отримуємо $\frac{\mathrm{med}(S_n)}{n}\to 0$, $n\to\infty$. Розглянемо ймовірність

$$P(|S_n| > n\varepsilon) \le P\left(|S_n - \mathrm{med}(S_n)| > \frac{n\varepsilon}{2}\right) +$$

$$+ P\left(\frac{|\mathrm{med}(S_n)|}{n} > \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Другий доданок дорівнює нулю починаючи з деякого номера n. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(n)}{n} P(|S_n| > \varepsilon n) \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(n)}{n} P\left(|S_n - \mathrm{med}(S_n)| > \frac{\varepsilon n}{2}\right) < \infty.$$

Звідки отримуємо, що ряд (4) збігається для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Висновки

Було розглянуто узагальнений ряд Спіцера $\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} L(n) P(|S_n| \ge n^{1/r}\varepsilon)$ для послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин і значень $t=0$ і $r=1$. Наведені теореми узагальнюють деякі результати, отримані Хейді та Рохатгі [6] для монотонної та неперервної повільно змінної функції, оскільки було знайдено достатні умови збіжності ряду (1) для не обов'язково монотонної або неперервної повільно змінної функції $L(x)$. Відсутність умови монотонності призвела до появи в узагальненому ряді Спіцера медіан сум випадкових величин. Запропонований метод доведення збіжності ряду Спіцера можна застосувати до інших класів функцій, які вивчаються в теорії псевдорегулярно змінних (PRV) функцій. Надалі плануємо отримати результати для більш загальних класів функцій $L(x)$, наприклад, OSV-функцій [9].

1. *P.L. Hsu and H. Robbins,* "Complete convergence and the law of large numbers", Proc. Nat. Acad. Sci.USA, vol. 33, pp. 25–31, 1947.
2. *P. Erdös,* "On a theorem of Hsu and Robbins", Ann. Math. Statist., vol. 20, pp. 287–291, 1949.
3. *F. Spitzer,* "A combinatorial lemma and its probability interpretation", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 82, pp. 323–339, 1956.
4. *M. Katz,* "The probability in the tail of distribution", Ann. Math. Statist., vol. 34, pp. 312–318, 1963.
5. *L.E. Baum and M. Katz,* "Convergence rates in the law of large numbers", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 120, P. 108–123, 1965.
6. *C.C. Heyde and V.K. Rohatgi,* "A pair of complementary theorems on convergence rates in the law of large numbers", Proc. Camb. Phil. Soc., vol. 63, pp. 73–82, 1967.
7. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
8. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1965. – 720 с.
9. *Псевдорегулярні* функції та узагальнені процеси відновлення / В.В. Булдигін, К.-Х. Індлекофер, О.І. Клесов, Й.Г. Штайнебах. – К.: ТВіМС, 2012. – 442 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
29 травня 2012 року