УДК 517.9

Н.Л. Денисенко

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

The differential-functional equations with linear deviations of the argument have been the main object of the research by many mathematicians. Currently many directions are quite well studied. However, in the modern theory of such equations there are a number of vague issues. Specifically, among them are issues on asymptotic properties of continuously differentiable solutions for systems of linear differential-functional equations with linear transformed argument. Here we focus on equations in cases when deviation of the argument $\Delta_i(t) = (1-\lambda_i)t,\ \ i = 1,2,...,$ can be either positive or negative. We utilize basic methods of the theory of ordinary differential and differential-functional equations in the study, in particular, the method of successive approximations. We obtain new sufficient conditions of the existence of continuously differentiable, bounded on $\mathbb{R}$ solutions for systems of linear differential-functional equations with linear transformed argument and study the structure of a set of such solutions. Because such equations play an important role in the theory of differential equations and are widely used in the study of many problems of science and engineering, it is reasonable to hope that these results will be applied in the study of important practical problems.

Вступ

Різні частинні випадки систем диференціально-функціональних рівнянь із лінійними відхиленнями аргументу досліджувались багатьма математиками, і на сьогодні ряд питань їх теорії досить добре вивчений (див. [1–6] і наведену там бібліогр.). Так, наприклад, в [1] досить повно досліджено асимптотичні властивості розв'язків лінійного скалярного рівняння; в [2] одержано достатні умови існування та єдиності обмеженого на всій дійсній осі розв'язку системи нелінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу; в [3] вивчено асимптотичні властивості неперервно диференційовних розв'язків лінійних і нелінійних систем рівнянь із багатьма лінійними відхиленнями аргументу.

Постановка задачі

Основною метою роботи є вивчення асимптотичних властивостей неперервно диференційовних розв'язків систем диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} B_i(t)x(\lambda_i t), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$; A – стала $(n\times n)$-матриця, $B_i(t)$, $i = 1,2,\ldots$, – дійсні матричні функції розмірності $n\times n$; та дослідження структури їх множини. Ця робота є продовженням дослідження питань, які вивчались у статті [3].

Основні результати

1. Дослідимо спочатку асимптотичні властивості неперервних розв'язків системи рівнянь (1) у випадку, коли $0 < \lambda_i < 1$ при $i = 1,\ldots, j$, $\lambda_i > 1$ при $i = j+1, j+2,\ldots,$ $(j \in \mathbb{N})$.

Має місце така теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

1) всі власні значення $a_i(A)$, $i = \overline{1,n}$, матриці A такі, що

$$\operatorname{Re} a_i(A) < 0 \text{ при } i = 1,\ldots, p,$$

$$\operatorname{Re} a_j(A) > 0 \text{ при } j = p+1,\ldots, n,$$

$$0 < p \le n,$$

тобто існують проектори $P_1 = \operatorname{diag}(E_p, 0)$, $P_2 = \operatorname{diag}(0, E_{n-p})$, $P_1 + P_2 = E$ такі, що $\exists K > 0, \alpha > 0$:

$$|e^{At}P_1| \le Ke^{-\alpha t} \text{ при } t \ge 0,$$

$$|e^{At}P_2| \le Ke^{\alpha t} \text{ при } t \le 0;$$

2) всі елементи матриць $B_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,$ є неперервними обмеженими при $t \in \mathbb{R}$ функціями і

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|B_i(t)|\le b_i<\infty,\ i=1,2,\ldots,$$

де $|B(t)|=\max\limits_{1\le k\le n}\sum\limits_{l=1}^{n}|b_{kl}(t)|$ для матричної функції $B(t)=(b_{kl}(t))$;

3) виконується співвідношення $\dfrac{2K}{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{+\infty}b_i<1$.

Тоді справедливі твердження:

1) існує сім'я неперервно диференційовних обмежених при $t\in\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$ розв'язків $x(t)=x(t,c)$, де $c=(c_1,\ldots,c_p,0,\ldots,0)$, c_i, $i=\overline{1,p}$, – довільні сталі, системи рівнянь (1), які прямують до нуля при $t\to+\infty$;

2) існує сім'я неперервно диференційовних обмежених при $t\in\mathbb{R}^-=(-\infty,0]$ розв'язків $x(t)=x(t,c)$, де $c=(0,\ldots,0,c_{p+1},\ldots,c_n)$, c_i, $i=\overline{p+1,n}$, – довільні сталі, системи рівнянь (1), які прямують до нуля при $t\to-\infty$.

Доведення. Довільний неперервно диференційовний обмежений на $\mathbb{R}^+$ розв'язок системи рівнянь (1) задовольняє також систему інтегральних рівнянь

$$x(t)=e^{At}P_1c+\int_0^t e^{A(t-\tau)}P_1\sum_{i=1}^{+\infty}B_i(\tau)x(\lambda_i\tau)d\tau-$$
$$-\int_t^{+\infty}e^{A(t-\tau)}P_2\sum_{i=1}^{+\infty}B_i(\tau)x(\lambda_i\tau)d\tau, \qquad (2)$$

де $c=(c_1,\ldots,c_p,0,\ldots,0)$, c_i, $i=\overline{1,p}$, – довільні сталі. Покажемо, що довільний неперервний обмежений при $t\in\mathbb{R}^+$ розв'язок системи інтегральних рівнянь (2) є розв'язком системи диференціально-функціональних рівнянь (1). Дійсно, диференціюючи рівність (2), отримаємо

$$\dot{x}(t)=Ae^{At}P_1c+\int_0^t Ae^{A(t-\tau)}P_1\sum_{i=1}^{+\infty}B_i(\tau)x(\lambda_i\tau)d\tau+$$
$$+P_1\sum_{i=1}^{+\infty}B_i(t)x(\lambda_it)+\int_{+\infty}^t Ae^{A(t-\tau)}P_2\sum_{i=1}^{+\infty}B_i(\tau)x(\lambda_i\tau)d\tau+$$
$$+P_2\sum_{i=1}^{+\infty}B_i(t)x(\lambda_it)=Ax(t)+$$
$$+(P_1+P_2)\sum_{i=1}^{+\infty}B_i(t)x(\lambda_it)=Ax(t)+\sum_{i=1}^{+\infty}B_i(t)x(\lambda_it).$$

Отже, для доведення твердження 1 теореми достатньо довести, що система рівнянь (2) має сім'ю неперервних обмежених при $t\in\mathbb{R}^+$ розв'язків $x(t)=x(t,c)$, де $c=(c_1,\ldots,c_p,0,\ldots,0)$, c_i, $i=\overline{1,p}$, – довільні сталі. Для цього використаємо метод послідовних наближень, які визначимо співвідношеннями:

$$x_0(t)\equiv 0,$$

$$x_m(t)=e^{At}P_1c+\int_0^t e^{A(t-\tau)}P_1\sum_{i=1}^{+\infty}B_i(\tau)x_{m-1}(\lambda_i\tau)d\tau-$$
$$-\int_t^{+\infty}e^{A(t-\tau)}P_2\sum_{i=1}^{+\infty}B_i(\tau)x_{m-1}(\lambda_i\tau)d\tau, \qquad (3)$$
$$m=1,2,\ldots$$

Розмірковуючи за індукцією покажемо, що при всіх $m=1,2,\ldots$, $t\ge 0$ виконується співвідношення

$$|x_m(t)-x_{m-1}(t)|\le\theta_{m-1}e^{-\alpha\lambda_*^{m-1}t}, \qquad (4)$$

де

$$\lambda_*:=\min\{\lambda_i,i=1,2,\ldots\},$$

$$\theta_0:=K|c|,\ \theta_m:=\theta_{m-1}\frac{2K}{\alpha(1-\lambda_*^{2m})}\sum_{i=1}^{+\infty}b_i,\ m=1,2,\ldots$$

Дійсно, в силу умов теореми і (3) при $t\ge 0$ маємо

$$|x_1(t)-x_0(t)|=|e^{At}P_1c|\le Ke^{-\alpha t}|c|,$$

тобто при $m=1$ оцінка (4) має місце. Припустимо, що оцінка (4) уже доведена для деякого $m\ge 1$ і покажемо, що вона не зміниться при переході від m до $m+1$. Дійсно, беручи до уваги умови теореми і (3), (4), одержуємо

$$|x_{m+1}(t)-x_m(t)|\le$$
$$\le\int_0^t|e^{A(t-\tau)}P_1|\sum_{i=1}^{+\infty}|B_i(\tau)||x_m(\lambda_i\tau)-x_{m-1}(\lambda_i\tau)|d\tau+$$
$$+\int_t^{+\infty}|e^{A(t-\tau)}P_2|\sum_{i=1}^{+\infty}|B_i(\tau)||x_m(\lambda_i\tau)-x_{m-1}(\lambda_i\tau)|d\tau\le$$
$$\le\int_0^t Ke^{-\alpha(t-\tau)}\sum_{i=1}^{+\infty}b_i\theta_{m-1}e^{-\alpha\lambda_*^{m-1}\lambda_i\tau}d\tau+$$

$$+\int\limits_t^{+\infty} Ke^{\alpha(t-\tau)}\sum_{i=1}^{+\infty} b_i\theta_{m-1}e^{-\alpha\lambda_*^{m-1}\lambda_i\tau}d\tau \le$$

$$\le \theta_{m-1}K\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\sum_{i=1}^{+\infty} b_i e^{-\alpha\lambda_*^m\tau}d\tau +$$

$$+\ \theta_{m-1}K\int\limits_t^{+\infty} e^{\alpha(t-\tau)}\sum_{i=1}^{+\infty} b_i e^{-\alpha\lambda_*^m\tau}d\tau =$$

$$=\theta_{m-1}K\sum_{i=1}^{+\infty} b_i\Big(e^{-\alpha t}\int\limits_0^t e^{\alpha(1-\lambda_*^m)\tau}d\tau + e^{\alpha t}\int\limits_t^{+\infty} e^{-\alpha(1+\lambda_*^m)\tau}d\tau\Big).$$

Оскільки

$$e^{-\alpha t}\int\limits_0^t e^{\alpha(1-\lambda_*^m)\tau}d\tau = \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha(1-\lambda_*^m)}(e^{\alpha(1-\lambda_*^m)t}-1) <$$

$$< \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha(1-\lambda_*^m)}e^{\alpha(1-\lambda_*^m)t} = \frac{e^{-\alpha\lambda_*^m t}}{\alpha(1-\lambda_*^m)},$$

$$e^{\alpha t}\int\limits_t^{+\infty} e^{-\alpha(1+\lambda_*^m)\tau}d\tau = \frac{e^{-\alpha\lambda_*^m t}}{\alpha(1+\lambda_*^m)},$$

то

$$|x_{m+1}(t)-x_m(t)| \le$$

$$\le \theta_{m-1}K\sum_{i=1}^{+\infty} b_i\left(\frac{e^{-\alpha\lambda_*^m t}}{\alpha(1-\lambda_*^m)}+\frac{e^{-\alpha\lambda_*^m t}}{\alpha(1+\lambda_*^m)}\right)=$$

$$=\theta_{m-1}\frac{2K\sum\limits_{i=1}^{+\infty} b_i}{\alpha(1-\lambda_*^{2m})}e^{-\alpha\lambda_*^m t} = \theta_m e^{-\alpha\lambda_*^m t}.$$

Цим самим доведено, що оцінка (4) має місце для довільного $m=1,2,\dots$

Оскільки (в силу (4)) при всіх $m=1,2,\dots$, $t\ge 0$ виконуються оцінки

$$|x_m(t)-x_{m-1}(t)| \le \theta_{m-1}e^{-\alpha\lambda_*^{m-1}t} \le \theta_{m-1}$$

і

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{\theta_{m+1}}{\theta_m} = \lim_{m\to+\infty}\frac{2K\sum\limits_{i=1}^{+\infty} b_i}{\alpha(1-\lambda_*^{2(m+1)})} = \frac{2K}{\alpha}\sum_{i=1}^{+\infty} b_i,$$

то, в силу умови 3 теореми, ряд

$$\sum_{m=1}^{+\infty}(x_m(t)-x_{m-1}(t))$$

рівномірно збігається для довільного $t\in\mathbb{R}^+$, $|c|\le c^*$ (c^* – додатна стала) до деякої неперервної вектор-функції $x(t)$, яка є розв'язком системи інтегральних рівнянь (2). Це легко показати, якщо в (3) перейти до границі при $m\to+\infty$. Таким чином, система рівнянь (2) має сім'ю неперервних обмежених при $t\in\mathbb{R}^+$ розв'язків $x(t)=x(t,c)$, які прямують до нуля при $t\to+\infty$ (внаслідок (4)).

Щоб довести неперервну диференційовність розв'язків рівняння (2), продиференціюємо співвідношення (3):

$$\dot x_0(t)\equiv 0,$$

$$\dot x_m(t) = Ax_m(t)+\sum_{i=1}^{+\infty} B_i(t)x_{m-1}(\lambda_i t),\ m=1,2,\dots$$

Отже,

$$|\dot x_1(t)-\dot x_0(t)| \le |A|\,|x_1(t)-x_0(t)|,$$

$$|\dot x_m(t)-\dot x_{m-1}(t)| \le |A|\,|x_m(t)-x_{m-1}(t)| +$$

$$+\sum_{i=1}^{+\infty}|B_i(t)|\,|x_{m-1}(\lambda_i t)-x_{m-2}(\lambda_i t)|,\ m=2,3,\dots \quad (5)$$

Позначивши $\mu_m := \sup\limits_{t\ge 0}|\dot x_m(t)-\dot x_{m-1}(t)|$, $\nu_m := \sup\limits_{t\ge 0}|x_m(t)-x_{m-1}(t)|$, $m=1,2,\dots$, із (5) отримаємо

$$\mu_1 \le |A|\nu_1,$$

$$\mu_m \le |A|\nu_m + \sum_{i=1}^{+\infty} b_i\nu_{m-1},\ m=2,3,\dots$$

Звідси маємо

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\mu_m \le (|A|+\sum_{i=1}^{+\infty} b_i)\sum_{m=1}^{+\infty}\nu_m.$$

Із збіжності ряду $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\nu_m$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\mu_m$. Твердження 1 теореми доведено.

Доведення твердження 2 теореми проводиться за тією ж схемою. При цьому послідовні наближення визначаються формулами

$$x_0(t)\equiv 0,$$

$$x_m(t) = e^{At}P_2c + \int\limits_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)}P_1\sum_{i=1}^{+\infty} B_i(\tau)x_{m-1}(\lambda_i\tau)d\tau -$$

$$-\int_t^0 e^{A(t-\tau)} P_2 \sum_{i=1}^{+\infty} B_i(\tau) x_{m-1}(\lambda_i \tau)\, d\tau, \qquad (6)$$

$$m = 1, 2, \dots,$$

і задовольняють, в силу умов теореми, співвідношення

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \le \theta_{m-1} e^{\alpha\lambda_*^{m-1} t} \text{ при } t \le 0,$$

де

$$\lambda_* = \min\{\lambda_i,\ i = 1, 2, \dots\},\ \theta_0 = K|c|,$$

$$\theta_m = \theta_{m-1} \frac{2K}{\alpha(1-\lambda_*^{2m})} \sum_{i=1}^{+\infty} b_i,\ m = 1, 2, \dots$$

Цим самим теорему 1 доведено.

2. Розглянемо тепер систему диференціально-функціональних рівнянь (1) у випадку, якщо $\lambda_i > 1$, $i = 1, 2, \dots$, і дослідимо властивості її неперервно диференційовних розв'язків.

Має місце така теорема.

Теорема 2. Нехай виконуються умови 1, 2 теореми 1 і умова

3′) $\dfrac{2K}{\alpha - \alpha_*} \sum_{i=1}^{+\infty} b_i < 1,$

де $0 < \alpha_* < \alpha$. Тоді справедливі твердження:

1) існує сім'я неперервно диференційовних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $x(t) = x(t, c)$, де $c = (c_1, \dots, c_p, 0, \dots, 0)$, c_i, $i = \overline{1, p}$, – довільні сталі, системи рівнянь (1), які прямують до нуля при $t \to +\infty$;

2) існує сім'я неперервно диференційовних обмежених при $t \in \mathbb{R}^-$ розв'язків $x(t) = x(t, c)$, де $c = (0, \dots, 0, c_{p+1}, \dots, c_n)$, c_i, $i = \overline{p+1, n}$, – довільні сталі, системи рівнянь (1), які прямують до нуля при $t \to -\infty$.

Для доведення твердження 1 теореми достатньо, очевидно, показати, що система інтегральних рівнянь (2) має сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $x(t) = x(t, c)$, що прямують до нуля при $t \to +\infty$. Беручи до уваги умови теореми, це можна здійснити за допомогою методу послідовних наближень, які визначаються співвідношеннями (3).

Розмірковуючи за індукцією покажемо, що при всіх $m = 1, 2, \dots$, $t \ge 0$ виконуються співвідношення

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \le N\theta^{m-1} e^{-\alpha_* t}, \qquad (7)$$

де

$$0 < \alpha_* < \alpha,\ N := K|c|,\ \theta := \frac{2K}{\alpha - \alpha_*} \sum_{i=1}^{+\infty} b_i.$$

Справді, беручи до уваги умови теореми і (3), при $t \ge 0$ маємо

$$|x_1(t) - x_0(t)| = |e^{At} P_1 c| \le K e^{-\alpha t} |c| = N e^{-\alpha_* t},$$

тобто при $m = 1$ оцінка (7) має місце. Припустимо, що оцінка (7) уже доведена для деякого $m \ge 1$ і покажемо, що вона не зміниться при переході від m до $m+1$. Дійсно, беручи до уваги умови теореми і (3), (7), одержуємо

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \le$$

$$\le \int_0^t |e^{A(t-\tau)} P_1| \sum_{i=1}^{+\infty} |B_i(\tau)| |x_m(\lambda_i\tau) - x_{m-1}(\lambda_i\tau)|\, d\tau +$$

$$+ \int_t^{+\infty} |e^{A(t-\tau)} P_2| \sum_{i=1}^{+\infty} |B_i(\tau)| |x_m(\lambda_i\tau) - x_{m-1}(\lambda_i\tau)|\, d\tau \le$$

$$\le \int_0^t K e^{-\alpha(t-\tau)} \sum_{i=1}^{+\infty} b_i N\theta^{m-1} e^{-\alpha_*\lambda_i\tau} d\tau +$$

$$+ \int_t^{+\infty} K e^{\alpha(t-\tau)} \sum_{i=1}^{+\infty} b_i N\theta^{m-1} e^{-\alpha_*\lambda_i\tau} d\tau \le$$

$$\le KN\theta^{m-1} \Big(e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha\tau} \sum_{i=1}^{+\infty} b_i e^{-\alpha_*\tau} d\tau +$$

$$+ e^{\alpha t} \int_t^{+\infty} e^{-\alpha\tau} \sum_{i=1}^{+\infty} b_i e^{-\alpha_*\tau} d\tau\Big) \le$$

$$\le N\theta^{m-1} K \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \Big(e^{-\alpha t} \int_0^t e^{(\alpha-\alpha_*)\tau} d\tau + e^{\alpha t} \int_t^{+\infty} e^{-(\alpha+\alpha_*)\tau} d\tau\Big) \le$$

$$\le N\theta^{m-1} K \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \left(e^{-\alpha t} \frac{e^{(\alpha-\alpha_*)t}}{\alpha - \alpha_*} + e^{\alpha t} \frac{e^{-(\alpha+\alpha_*)t}}{\alpha + \alpha_*} \right) =$$

$$= N\theta^{m-1} K \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \alpha_*^2} e^{-\alpha_* t} \le$$

$$\le N\theta^{m-1} K \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \frac{2}{\alpha - \alpha_*} e^{-\alpha_* t} = N\theta^m e^{-\alpha_* t}.$$

Цим самим доведено, що оцінка (7) має місце для довільного $m \ge 1$.

Оскільки при всіх $m \ge 1$, $t \ge 0$ виконується оцінка

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \le N\theta^{m-1}e^{-\alpha_* t} \le N\theta^{m-1},$$

то, в силу умови 3′ теореми, ряд

$$\sum_{m=1}^{+\infty}(x_m(t) - x_{m-1}(t))$$

рівномірно збігається для довільного $t \in \mathbb{R}^+$, $|c| \le c^*$ (c^* – додатна стала) до деякої неперервної вектор-функції $x(t,c)$, яка є розв'язком системи інтегральних рівнянь (2). Це легко показати, якщо в (3) перейти до границі при $m \to +\infty$. При цьому (внаслідок (7)) для вектор-функції $x(t,c)$ справедлива оцінка

$$|x(t,c)| \le \sum_{m=1}^{+\infty}|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \le \frac{N}{1-\theta}e^{-\alpha_* t},$$

звідки безпосередньо випливає, що $\lim\limits_{t\to+\infty}|x(t,c)| = 0$. Неперервна диференційовність розв'язків рівняння (2) доведена в теоремі 1.

Таким чином, система рівнянь (2) має сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $x(t) = x(t,c)$, які прямують до нуля при $t \to +\infty$.

Д о в е д е н н я твердження 2 теореми проводиться за тією ж схемою. При цьому послідовні наближення визначаються за допомогою (6) і задовольняють, в силу умов теореми, співвідношення

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \le N\theta^{m-1}e^{\alpha_* t},\ m = 1, 2, \ldots, t \in (-\infty, 0],$$

де

$$0 < \alpha_* < \alpha,\ N = K|c|,\ \theta = \frac{2K}{\alpha - \alpha_*}\sum_{i=1}^{+\infty} b_i,$$

і для вектор-функції $x(t,c)$ справедлива оцінка

$$|x(t,c)| \le \sum_{m=1}^{+\infty}|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \le \frac{N}{1-\theta}e^{\alpha_* t},$$

звідки випливає, що $\lim\limits_{t\to-\infty}|x(t,c)| = 0$.

Теорему 2 доведено.

Висновки

У роботі встановлено нові достатні умови існування неперервно диференційовних розв'язків систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь із лінійними відхиленнями аргументу вигляду (1), вивчено асимптотичні властивості таких розв'язків і досліджено структуру їх множини. Оскільки такі рівняння відіграють важливу роль у теорії диференціальних рівнянь та широко використовуються при дослідженні багатьох задач науки і техніки, то є всі підстави сподіватись, що ці результати також знайдуть своє застосування при вивченні важливих практичних задач. Розроблена в роботі методика побудови неперервно диференційовних розв'язків дає можливість в майбутньому довести існування асимптотично періодичних розв'язків і дослідити їх властивості.

1. *T. Kato and J.B. McLeod,* "The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 77, pp. 891–937, 1971.
2. *Самойленко А.М., Пелюх Г.П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 737–747.
3. *Денисенко Н.Л.* Асимптотичні властивості неперервних розв'язків систем диференціально-функціональних рівнянь з лінійними перетвореннями аргументу // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 135–141.
4. *M. Kwapisz,* "On the existence and uniqueness of solutions of a certain integral-differential equation", Ann. Pol. Math., vol. 31, no. 1, pp. 23–41, 1975.
5. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
6. *Митропольський Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. – К.: Наук. думка, 1985. – 216 с.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу"факультету НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
1 червня 2012 року