УДК 517.521.8

В.П. Денисюк

МЕТОД ЛІНІЙНОГО ПІДСУМОВУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ ФУР'Є

The paper considers the method of linear summation of trigonometric Fourier series of functions $f(t)$ with limited variation due to introducing into this series the factors, depending on the number of series coefficient and the parameter α. The resulting function $f(t,\alpha)$, obtained as a result of this summation, in some cases differs from the given function $f(t)$ only at certain intervals, whose length can be arbitrarily small. The corresponding Fourier series for the function $f(t,\alpha)$ converges uniformly. A specific feature of the proposed summation method is the fact that the smoothing effect of the factor $\sigma(k,\alpha)$ affects the most in the vicinity of the points, where the function $f(t)$ or its derivatives have jump type of discontinuity. When the parameter α has a countable set of discrete values, the proposed method of linear summation can be considered as a linear matrix method of summation of Fourier series. We provide quite a numbers of samples to back up theoretical data. It is feasible to study in future the properties of the proposed method of linear summation of Fourier series, specifically, the estimation of function approximations of various classes by partial sums $S_n(\alpha,t)$.

Вступ

У багатьох задачах науки і техніки часто як математичні моделі певних процесів виступають тригонометричні ряди Фур'є. Проте застосування таких рядів у задачах моделювання має певні особливості, які й аналізуються в цій статті.

Так, зокрема, зрозуміло, що в більшості випадків на практиці інтерес становлять лише моделі, які подаються рівномірно збіжними рядами Фур'є. Проте в загальному випадку отримання таких рядів вимагає застосування певних прийомів. Розглянемо це питання детальніше.

Як відомо [1], ряд Фур'є функції $f(t)$, $f(t)\in L^2_{[0,2\pi]}$ збігається до цієї функції майже всюди (теорема Карлесона, 1966 р).

Для того щоб ряд Фур'є функції $f(t)$, $f(t)\in L^2_{[0,2\pi]}$ збігався до цієї функції в деякій точці t_0, $t_0\in(0,2\pi)$, необхідне виконання, наприклад, умови Діні. Умову Діні можна замінити іншими умовами, (наприклад, ознаками Валле–Пуссена, Жордана, Лебега, Ліпшиця, Юнга тощо), але просто відкинути її не можна. Зауважимо, що хоча ознака Лебега є найсильнішою з перелічених, її практичне застосування досить складне, тому часто доводиться застосовувати ознаки більш слабкі, але зручніші для використання.

Ще в 1905 р. П. Фату відзначив [2], що кожну умову збіжності в точці можна переробити в умову рівномірної збіжності на деякому інтервалі, якщо вимагати, щоб ця умова виконувалася б рівномірно на цьому інтервалі або на більшому, що включає його. Пояснимо, що ми розуміємо під цим.

У всіх ознаках збіжності в точці доведення проводилося за таким принципом: якщо умова А виконується в даній точці x, то ряд у цій точці збігається. Думка П. Фату полягає в тому, що коли умова А виконується рівномірно на (a,b), то і ряд збігається рівномірно на (a,b). Тут лише важливо відзначити таку обставину.

Для того щоб ряд рівномірно збігався на $[0,2\pi]$, необхідно, щоб функція $f(t)$ була неперервна на $(0,2\pi)$, включаючи і його кінці. Якщо ж на кінцях є розриви, то можна очікувати рівномірної збіжності лише на відрізку $[a',b']$, який повністю міститься в $(0,2\pi)$. Тому і всі ознаки рівномірної збіжності формулюються відповідним чином [2].

Зрозуміло, що лише неперервність функції не забезпечує рівномірної збіжності її ряду Фур'є. Відомі приклади навіть неперервних функцій з $L^2_{[0,2\pi]}$, ряд Фур'є яких розбігається в окремих точках.

Для отримання рівномірної збіжності рядів Фур'є неперервних функцій часто застосовують спеціальні методи, які отримали назву лінійних матричних методів підсумовування. Частинним випадком матричних методів є методи підсумовування з трикутною матрицею, або інакше методи λ-підсумовування рядів Фур'є [3]. Одним із прикладів методів λ-підсумовування є підсумовування за методом Фейєра (Чезаро). Як відомо, цей метод полягає в тому, що замість скінченної суми ряду Фур'є розглядають середнє арифметичне цих сум. Нескладно показати, що це середнє можна подати у вигляді

$$S_n(\lambda,t) = \frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kt + b_k\sin kt),$$

де

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n+1}.$$

Ідея введення множників у скінченні суми Фур'є виявилася досить плідною і привернула увагу багатьох дослідників. Так, зокрема, було введено у розгляд множники Гаусса–Вейєрштрасса, Пуассона, Рімана, Рісса, Валле–Пуссена, Бохмана, Рогозинського тощо. Спільним для перелічених множників є те, що вони монотонно спадають (у широкому розумінні) від 1 з ростом k і n ($k<n$), залишаючись додатними.

Характерним для методів λ-підсумовування рядів Фур'є є те, що при їх застосуванні розглядають збіжність скінченних сум $S_n(\lambda,t)$ до заданої функції $f(t)$, яка залишається незмінною.

Проте звернемо увагу на один класичний результат, що належить Меньшову [2].

Теорема Меньшова. Нехай функція $f(t)$ вимірна за Лебегом та майже всюди скінченна на $[0,2\pi]$. Тоді для будь якого $\delta>0$ існує функція $\varphi(t)$ така, що $mE(f\neq\varphi)<\delta$, причому її ряд Фур'є збігається рівномірно на $[0,2\pi]$.

У цій теоремі, напевно, вперше розглядається можливість заміни функції $f(t)$ іншою функцією $\varphi(t)$, близькою до $f(t)$ у тому чи іншому розумінні, для того, щоб отримати рівномірно збіжний ряд Фур'є. Відзначимо, що така заміна функції $f(t)$ функцією $\varphi(t)$ здійснюється безпосередньо.

Постановка задачі

Метою роботи є вивчення можливості реалізувати заміну функції $f(t)$ іншою функцією $\varphi(t)$, змінюючи лише коефіцієнти ряду Фур'є функції $f(t)$; зрозуміло, при цьому ми вважаємо, що змінений ряд має збігатися рівномірно.

Дослідження методу лінійного підсумовування із множником $\sigma(\alpha,k)$ на функціях різних класів

Розглянемо метод лінійного підсумовування рядів Фур'є функції $f(t)$, який полягає в тому, що коефіцієнти ряду домножуються на деякий множник, що залежить лише від номера коефіцієнта та від параметра α. Отримана в результаті такого підсумовування функція $f(\alpha,t)$ відрізняється від заданої функції $f(t)$ на визначених відрізках, довжина яких може бути як завгодно малою; ряд же Фур'є функції $f(\alpha,t)$ збігається рівномірно.

Викладення цього методу лінійного підсумовування рядів Фур'є почнемо з розгляду класичних прикладів теорії рядів Фур'є [2].

***Приклад* 1.** На відрізку $[0,2\pi]$ розглянемо прямокутний імпульс

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0\le t\le\pi; \\ -\frac{\pi}{4}, & \pi<t<2\pi. \end{cases}$$

Ряд Фур'є цієї функції, періодично продовженої з періодом 2π, має вигляд

$$S(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}. \qquad (1)$$

Цей ряд збігається рівномірно на відрізках $[a',b']$, $0<a'<b'<\pi$ і $[a'',b'']$, $\pi<a''<b''<2\pi$; у точках $k\pi$ ($k=0,\pm1,\pm2,\ \ldots$) ряд збігається до 0. Зауважимо, коефіцієнти цього ряду мають порядок $O(k^{-1})$. Графік функції $f(t)$, періодично продовженої з періодом 2π, та скінченної суми $S_{10}(t)$ цього ряду наведено на рис. 1.

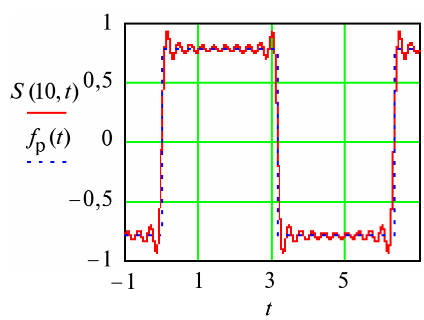


Рис. 1. Графік функції $f_p(t)$, періодично продовженої з періодом 2π, та скінченної суми $S_{10}(t)$ її ряду Фур'є

Привертають увагу розриви функції у точках $k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), які подаються вертикальними лініями; в околах цих точок спостерігається явище Гіббса.

Для усунення розривів функції $f(t)$ та отримання рівномірно збіжного ряду Фур'є застосуємо метод лінійного підсумовування рядів Фур'є. Для цього задамо деякий параметр α ($0 < \alpha < \pi$) і розглянемо ряд

$$S(t,\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(2k-1,\alpha)\frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}, \qquad (2)$$

де

$$\sigma(\alpha,k) = \frac{\sin\left(k\frac{\alpha}{2}\right)}{k\frac{\alpha}{2}}.$$

Наведемо графіки скінченних сум цього ряду за різних значень параметра α (рис. 2).

Легко бачити, що ряд (2) збігається до періодичної з періодом 2π функції $f(t,\alpha)$, яку на проміжку $[0, 2\pi)$ подано виразом

$$f(t,\alpha) = \begin{cases} f(t), & t \in \left[\frac{\alpha}{2}, \pi - \frac{\alpha}{2}\right] \cup \left[\pi + \frac{\alpha}{2}, 2\pi - \frac{\alpha}{2}\right]; \\ \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2\alpha}\left(t - \pi + \frac{\alpha}{2}\right), & t \in \left(\pi - \frac{\alpha}{2}, \pi + \frac{\alpha}{2}\right); \\ -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2\alpha}\left(t + \frac{\alpha}{2}\right), & t \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right); \\ -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2\alpha}\left(t - 2\pi + \frac{\alpha}{2}\right), & t \in \left(2\pi - \frac{\alpha}{2}, 2\pi\right), \end{cases}$$

причому ця збіжність є рівномірною.

Нескладно порахувати, що сумарна довжина відрізків, на яких функція $f(t,\alpha)$ відрізняється від функції $f(t)$, дорівнює 2α. Зрозуміло, що за рахунок вибору значення α цю величину можна зробити як завгодно малою. Проте за малих значень параметра α уповільнюється швидкість збіжності ряду в точках $\alpha/2$, $\pi \pm \alpha/2$ і $2\pi - \alpha/2$, тому при виборі значення цього параметра доцільно дотримуватися певного компромісу.

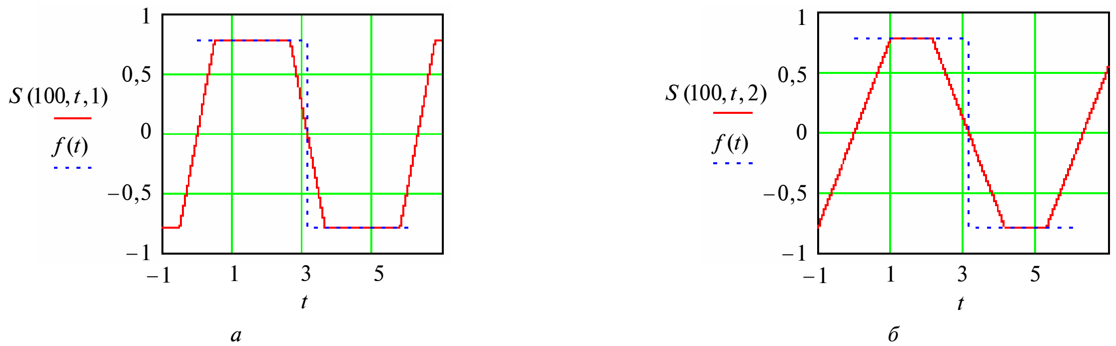


Рис. 2. Графік скінченних сум $S_{100}(t,\alpha)$: *а* — $\alpha = 1$; *б* — $\alpha = 2$

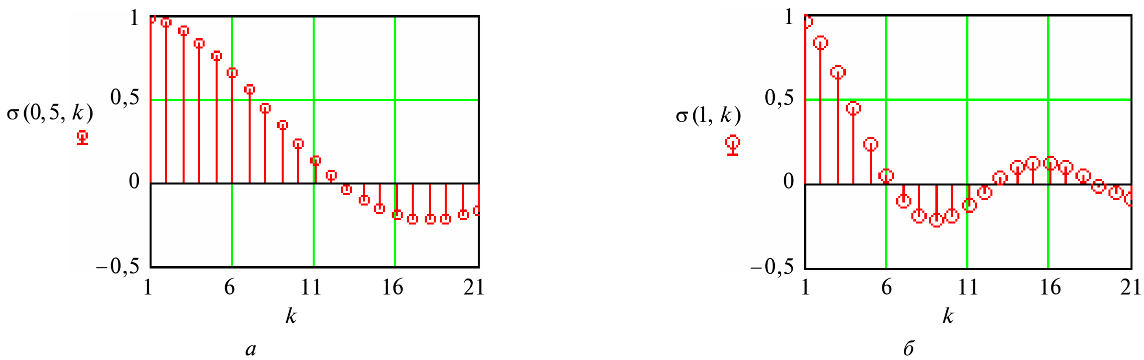


Рис. 3. Графік множника $\sigma(\alpha,k)$ як функція k: *а* — $\alpha = 0{,}5$; *б* — $\alpha = 1$

Наведемо графік множника $\sigma(\alpha,k)$ як функцію k за деяких значень параметра α (рис. 3).

Відзначимо, що множник $\sigma(\alpha,k)$ визначений для довільних натуральних значень k, залежить від параметра α і набуває як додатних, так і від'ємних значень. Ці властивості принципово відрізняють цей множник від відомих множників λ-підсумовування, про які ми згадували раніше.

***Приклад* 2.** На відрізку $[0,2\pi]$ розглянемо неперервну функцію

$$f(t)=t-\pi,\ t\in[0,2\pi].$$

Ряд Фур'є цієї функції має вигляд

$$S(t)=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k}. \tag{3}$$

Періодичну функцію $f_{\text{р}}(t)$, до якої збігається ряд Фур'є і з якою збігається функція $f(t)$ на проміжку $(0,2\pi)$, та скінченну суму ряду (3) наведено на рис. 4.

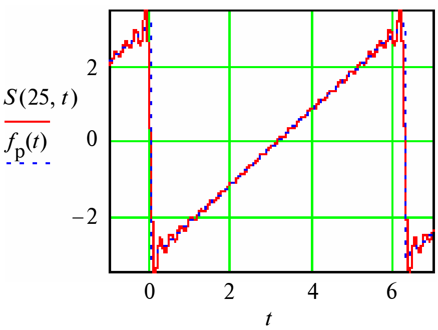


Рис. 4. Періодична функція $G_{\text{р}}(t)$, до якої збігається ряд Фур'є і з якою збігається функція $G(t)$ на проміжку $(0,2\pi)$. Розриви функції в точках 0 і 2π, що виникають при періодичному продовженні, подаються вертикальними лініями графіка

Хоча в середині інтервалу збіжність можна вважати задовільною, на кінцях інтервалу в околах точок 0 і 2π збіжність порушується. Більше того, порушення збіжності шкідливо впливає також на поведінку скінченних сум і в середній частині інтервалу розкладу. Тут у чистому вигляді спостерігається роль розривів функції, які утворюються при періодичному продовженні розглядуваної функції $f(t)$.

Як і раніше, застосуємо метод лінійного підсумовування з множником $\sigma(\alpha,k)$. Отримуємо ряд

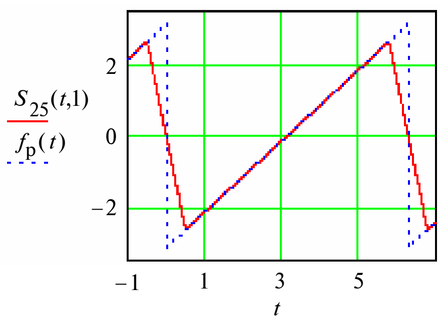
$$S(t,\alpha)=-2\sum_{k=1}^{\infty}\sigma(\alpha,k)\frac{\sin kt}{k}. \tag{4}$$

Графік скінченних сум цього ряду за різних значень параметра α наведено на рис. 5.

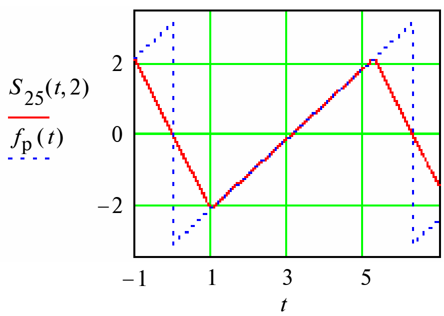
І в цьому випадку ряд (4) збігається до періодичної з періодом 2π функції $f(t,\alpha)$, яку на проміжку $[0,\,2\pi)$ подано виразом

$$f(t,\alpha)=\begin{cases} f(t), & t\in\left[\dfrac{\alpha}{2},\ 2\pi-\dfrac{\alpha}{2}\right];\\[2mm] \dfrac{\alpha-2\pi}{\alpha}t, & t\in\left(0,\ \dfrac{\alpha}{2}\right);\\[2mm] \dfrac{\alpha-2\pi}{\alpha}(t-2\pi), & t\in\left(2\pi-\dfrac{\alpha}{2},\ 2\pi\right).\end{cases}$$

Нескладно порахувати, що в цьому випадку сумарна довжина відрізків, на яких функція $f(t,\alpha)$ відрізняється від функції $f(t)$, дорівнює α. За рахунок вибору значення α цю величину можна зробити як завгодно малою. Проте і в цьому випадку за малих значень параметра α уповільнюється швидкість збіжності ряду; тепер у точках $\alpha/2$ і $2\pi-\alpha/2$, як і раніше, при виборі значення цього параметра доцільно дотримуватися певного компромісу.



а



б

Рис. 5. Графік частинних сум $S_{25}(t,1)$ і $S_{25}(t,2)$ ряду (4): *а* – $\alpha=1$; *б* – $\alpha=2$

***Приклад* 3.** На відрізку $[0, 2\pi]$ розглянемо неперервну функцію

$$f(t) = \sin\frac{3}{4}t,\ t \in [0, 2\pi].$$

Ряд Фур'є цієї функції має вигляд

$$S(t) = \frac{2\pi}{3} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{12}{16k^2-9}\cos kt - \frac{16k}{16k^2-9}\sin kt\right). \quad (5)$$

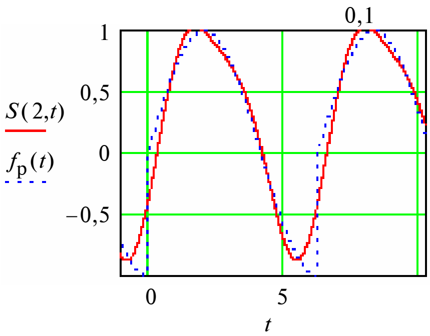


Рис. 6. Періодична функція $f_p(t)$, до якої збігається ряд Фур'є і з якою збігається функція $f(t)$ на проміжку $(0, 2\pi)$. Розриви функції в точках 0 і 2π, що виникають при періодичному продовженні, подаються вертикальними лініями графіка

Періодичну функцію $f_p(t)$, до якої збігається ряд Фур'є і з якою збігається функція $f(t)$ на проміжку $(0, 2\pi)$, та скінченну суму ряду (5) наведено на рис. 6.

Хоча в середині інтервалу збіжність можна вважати задовільною, на кінцях інтервалу в околах точок 0 і 2π збіжність порушується. Більше того, порушення збіжності шкідливо впливає також на поведінку скінченних сум і в середній частині інтервалу розкладу. І знову виявляється роль розривів функції, які утворюються при періодичному продовженні розглядуваної функції $f(t)$ (рис. 7).

Як і раніше, застосуємо метод лінійного підсумовування з множником $\sigma(\alpha, k)$. Отримуємо ряд

$$S(t,\alpha) = \frac{2\pi}{3} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sigma(\alpha,k)\left[\frac{12}{16k^2-9}\cos kt - \frac{16k}{16k^2-9}\sin kt\right].(6)$$

Графік скінченних сум цього ряду за різних значень параметра α наведено на рис. 8.

І в цьому випадку ряд (6) збігається до періодичної з періодом 2π функції $f(t,\alpha)$, яку на проміжку $[0, 2\pi)$ подано виразом

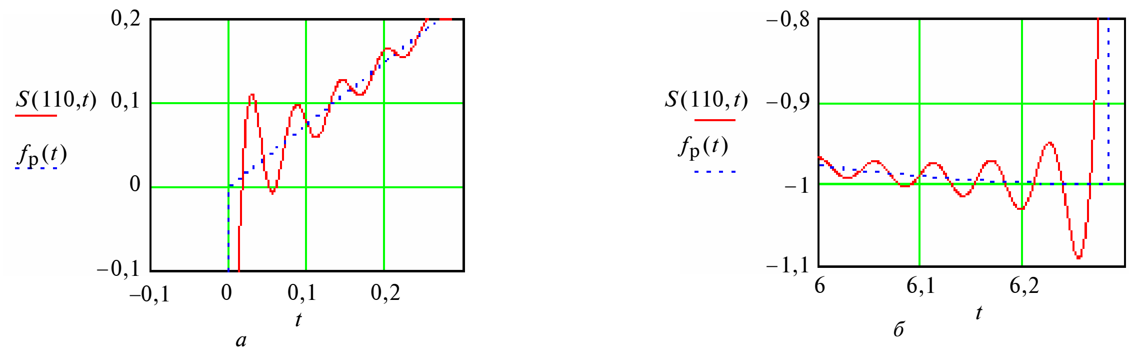


Рис. 7. Поведінка скінченної суми $S_{110}(t)$ ряду Фур'є в околах точок розриву: *а* — в околі 0; *б* — в околі 2π

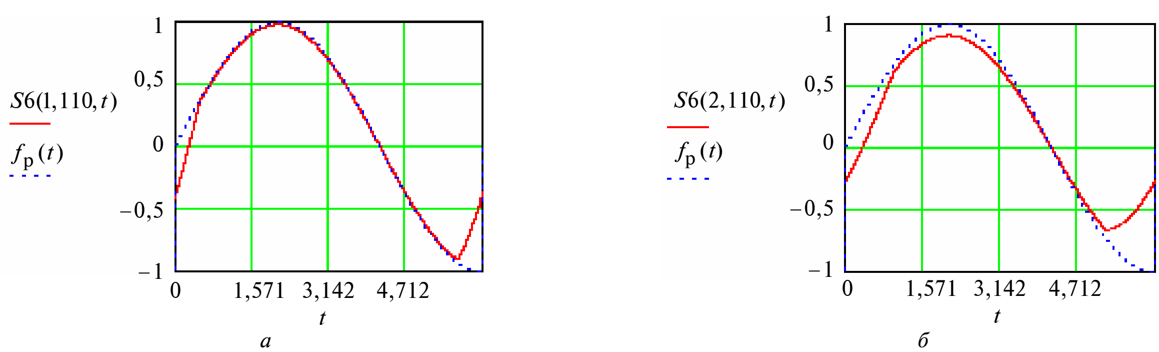
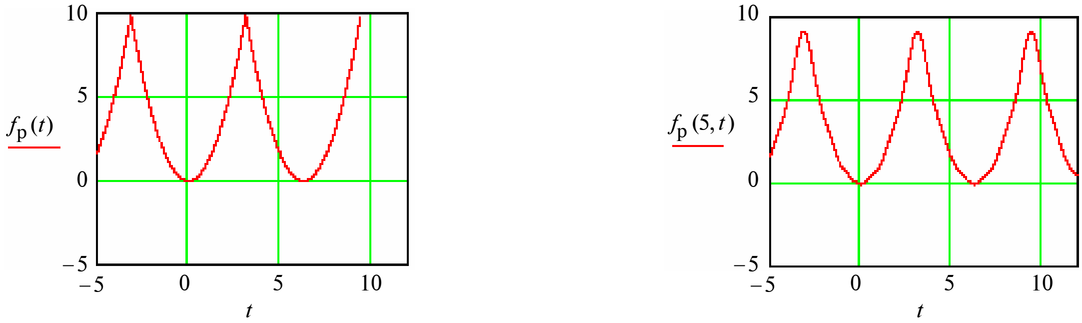


Рис. 8. Графік частинних сум $S_{25}(t,1)$ і $S_{25}(t,2)$ ряду (6): *а* — $\alpha = 1$; *б* — $\alpha = 2$



а *б*

Рис. 9. Періодична функція $f_{\mathrm{p}}(t)$, до якої збігається ряд Фур'є і з якою збігається функція $f(t)$ на проміжку $[-\pi,\pi]$, та графік скінченної суми $S_5(t)$ ряду: *а* – $f_{\mathrm{p}}(t)$; *б* – $S_5(t)$

$$f(t,\alpha)=\sin\frac{3}{4}t,\ t\in\left[\frac{\alpha}{2},2\pi-\frac{\alpha}{2}\right].$$

Проте тут на проміжках $\left(0,\frac{\alpha}{2}\right)$ і $\left(2\pi-\frac{\alpha}{2},2\pi\right)$ функція $f(\alpha,t)$ продовжується вже не лінійно, як це було раніше. Пояснюється це нелінійністю самої функції $f(t)$. Більше того, згладжуюча властивість множника $\sigma(\alpha,k)$ впливає на скінченні суми ряду і в середині інтервалу $\left(\frac{\alpha}{2},2\pi-\frac{\alpha}{2}\right)$, про що свідчить зсув функції по вісі OY, причому цей зсув збільшується із збільшенням значення α.

До цього часу ми розглядали приклади рядів Фур'є, які не збігалися рівномірно. Дослідимо тепер вплив множника $\sigma(\alpha,k)$ на рівномірно збіжний ряд Фур'є.

***Приклад* 4.** На відрізку $[0,2\pi]$ розглянемо неперервну функцію

$$f(t)=t^2,\ t\in[-\pi,\pi].$$

Ряд Фур'є цієї функції має вигляд

$$S(t)=\frac{\pi^2}{3}-4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kt}{k^2} \qquad (7)$$

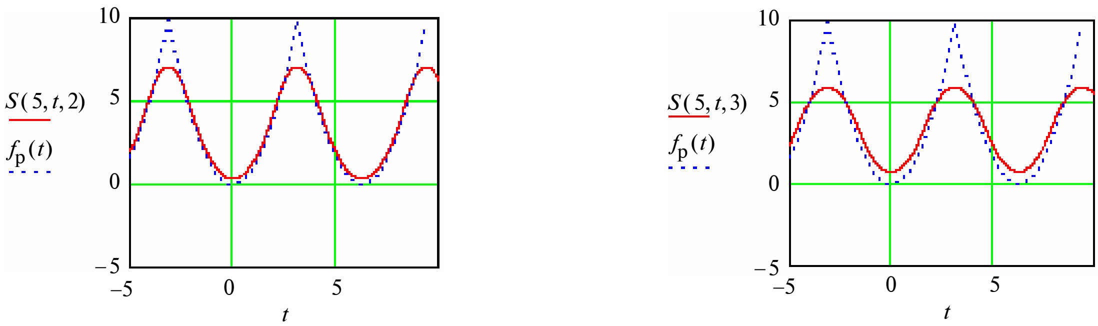
і збігається рівномірно до періодичної функції $f_{\mathrm{p}}(t)$. Цю функцію та скінченні суми ряду (7) наведено на рис. 9. Зрозуміло, що з ростом порядку суми пікові значення в точках $\pi(2k+1)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ наближаються як завгодно точно.

Як і раніше, застосуємо метод лінійного підсумовування з множником $\sigma(\alpha,k)$. Отримуємо ряд

$$S(t,\alpha)=\frac{\pi^2}{3}-4\sum_{k=1}^{\infty}\sigma(\alpha,k)(-1)^k\frac{\cos kt}{k^2}. \qquad (8)$$

Графік скінченних сум цього ряду за різних значень параметра α наведено на рис. 10.

У цьому випадку згладжуюча дія множника $\sigma(\alpha,k)$ проявляється іншим чином. Оскіль-



а *б*

Рис. 10. Графік частинних сум $S_{25}(t,1)$ і $S_{25}(t,2)$ ряду (8): *а* – $S_5(t,2)$; *б* – $S_5(t,3)$

ки тепер відсутні точки розриву функції, в яких порушується рівномірна збіжність, множник $\sigma(\alpha, k)$ згладжує поведінку частинних сум ряду в пікових точках, у яких збіжність є повільною, тобто в точках $\pi(2k+1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Проте, як і раніше, за великих значень параметра α збільшується зсув функції на проміжках між піковими точками.

Висновки

Запропоновано метод лінійного підсумовування тригонометричних рядів Фур'є функцій $f(t)$ з обмеженою варіацією з допомогою введення в цей ряд множника $\sigma(\alpha, k)$, що залежить від неперервного параметра α ($0 < \alpha < \pi$ для прямокутного імпульса і $0 < \alpha < 2\pi$ у загальному випадку). В разі задання нескінченної множини дискретних значень цього параметра ми отримуємо добре відомий лінійний матричний метод підсумовування. Застосування запропонованого методу приводить до зміни функції $f(t)$ на певних частинах відрізку $[0, 2\pi]$, довжина яких може бути зроблена як завгодно малою. При виборі значення параметра α необхідно дотримуватися певного компромісу, оскільки за малих значень цього параметра погіршується швидкість збіжності ряду в певних точках відрізку, але забезпечується малий зсув функції, а за більших значень параметра α, навпаки, покращується збіжність ряду, але збільшується зсув функції.

Безумовно, доцільним є подальше вивчення властивостей запропонованого методу лінійного підсумовування рядів Фур'є, зокрема дослідження оцінок швидкості збіжності частинних сум $S_n(\alpha, t)$ до функцій різних класів.

1. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. – М.: Техносфера, 2004. – 280 с.
2. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. – М.: Госиздат физ.-мат.лит., 1961. – 936 с.
3. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, Глав. ред физ.-мат. лит., 1977. – 512 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
16 травня 2012 року