

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА КЕРУВАННЯ

УДК 519.766.4

П.І. Бідюк, М.М. Коновалюк

МОДИФІКАЦІЯ І ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛІ СТОХАСТИЧНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ

A modified structure of autoregressive stochastic volatility model is proposed and empirically studied that includes delayed historical volatility values. The structure of the model developed is refined with the use of the partial autocorrelation function computed for sample values of the conditional variance process. The volatility logarithms correspond to the stationary autoregression process that provides a possibility for forecasting of the conditional variance dynamics with known model parameters. To compute the model parameters using actual data the Markov chain Monte Carlo procedure was selected and appropriately modified to generate pseudorandom sequences for parameter estimates with necessary distribution. It was established that the model proposed provides better quality of volatility forecasts than known stochastic volatility model. The necessary computing experiments have been carried out with the developed software that is also accessible to other users via Internet. The modeling system developed can be easily expanded with new functions, methods for model parameters estimation and forecasting, and modified appropriately to meet requirements of a specific user.

Вступ

Однією з основних задач при виконанні операцій на фінансовому ринку є побудова математичних моделей для прогнозування напряму і рівня процесів ціноутворення та їх волатильності (умовної дисперсії). Такі оцінки прогнозів необхідні для формування правил прийняття рішень стосовно купівлі або продажу цінних паперів чи відсторонення від виконання будь-яких операцій [1–3]. Крім того, оцінки умовної дисперсії та їх прогнози широко застосовуються в діагностичних системах технічного і медичного призначення, а також при прийнятті економічних рішень на мікро- та макрорівнях.

Відомі різні підходи до оцінювання структури моделі волатильності. Зокрема, відомий класичний підхід на основі аналізу кореляційних функцій досліджуваних процесів [4]. Результати цього аналізу використовують для оцінювання структури моделей авторегресії з умовною гетероскедастичністю (АРУГ) і узагальненої АРУГ (УАРУГ). Подальшим ускладненням моделей цього типу є експоненціальна модель УАРУГ (Е-УАРУГ), яка забезпечує, як правило, прийнятну якість оцінок прогнозів волатильності. Вищу ступінь адекватності досліджуваним процесам має модель стохастичної волатильності, яка відображає фактичну взаємодію змінних на ринку [5].

При побудові моделей волатильності за експериментальними даними важливою задачею є коректне оцінювання параметрів моделей. Моделі зазначених вище типів належать до класу нелінійних моделей стосовно змінних. До цього ж класу належать поліноміальні моделі, що будуються за методом групового вра-

хування аргументів, білінійні та деякі інші. Для оцінювання параметрів таких моделей найчастіше застосовують звичайний метод найменших квадратів (МНК), який дає можливість отримати незміщені ефективні оцінки. Однак застосовувати МНК для оцінювання параметрів моделей гетероскедастичних процесів некоректно, оскільки розподіли фінансових процесів ціноутворення здебільшого не відповідають нормальному. Крім того, на дисперсію нестационарних процесів впливають мультиплікативні збурення, що призводить до неможливості застосування лінійних методів оцінювання. Тому для оцінювання моделей волатильності необхідно застосовувати методи, розроблені для нелінійних моделей. Наприклад, метод максимальної правдоподібності із застосуванням розподілу відповідного типу, нелінійний метод найменших квадратів (у тих випадках, коли це можливо) або метод Монте-Карло. В останні десятиліття набули особливого поширення методи Монте-Карло для марковських ланцюгів (МКМЛ), які адаптуються до моделей конкретних структур і розподілів даних. До переваг МКМЛ можна віднести можливість їх застосування для оцінювання моделей багатовимірних нестационарних гетероскедастичних процесів в умовах наявності мультиплікативних збурень. Також на сьогодні існує досить широка множина обчислювальних процедур, необхідних для належного генерування розподілів випадкових величин (у т.ч. багатовимірних) із заданими статистичними властивостями. Це дає можливість дослідникам вибирати процедури генерування для використання в різних умовах, у т.ч. для побудови комп'ютерних інформаційних технологій обробки даних у реальному ча-

сі, тобто режимі, критичному до часу виконання обчислювальних процедур.

Статтю присвячено побудові модифікованої моделі стохастичної волатильності та застосуванню адаптованого методу МКМЛ для оцінювання її параметрів. Для розв'язання цієї задачі розроблено спеціальне програмне забезпечення на мові Java, яке доступне зацікавленим користувачам через мережу Інтернет.

Поставка задачі

Мета роботи – виконати аналіз структур моделі стохастичної волатильності (МСВ); запропонувати модифіковану структуру авторегресійної моделі стохастичної волатильності, яка надасть можливість враховувати ретроспективні значення волатильності; виконати обчислювальні експерименти з метою оцінювання параметрів моделей і прогнозування волатильності.

Моделі стохастичної волатильності

Модель стохастичної волатильності Тейлора. Найбільш поширеною МСВ є лог-нормальна МСВ, яку запропонував Тейлор [5]:

$$y_t = e^{\frac{h_t}{2}} u_t, t \geq 1,$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \sigma_v v_t, t \geq 1,$$

$$h_1 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}\right),$$

де μ , ϕ , σ_v^2 – параметри моделі, y_t – значення доходності в момент часу t ($t = 1, \dots, n$), h_t – логарифм квадрата волатильності в момент часу t , u_t , v_t – два незалежних гауссових процеси білого шуму з дисперсіями 1 і σ_v^2 відповідно.

Логарифм квадрата волатильності h_t можна інтерпретувати як випадковий і нечіткий потік нової інформації, який є досить складним у моделюванні [5]. Оскільки v_t – гауссов процес, то таку модель називають лог-нормальною МСВ.

Запропонована модель стохастичної волатильності. Розглянемо докладніше наведену вище модель. Вона складається з двох рівнянь: перше описує динаміку зміни доходності фінансового ринку, а друге – поведінку логарифма волатильності. Величина доходності ко-

ливається навколо деякого середнього значення, яке на валютному ринку прийнято вважати, найчастіше, рівним нулю. Тому доходність може набувати додатних і від'ємних значень, що цілком залежить від випадкової величини u_t . Логарифм квадрата волатильності виконує роль коефіцієнта масштабування, тобто він відображає амплітуду коливань доходності.

Лог-волатильність h_t відповідає стаціонарному процесу авторегресії AP(1), що дає можливість, за умови наявності відомих параметрів, прогнозувати динаміку зміни волатильності. Значення логарифмів квадратів волатильності h_t являють собою ланцюг Маркова, оскільки наступне значення оцінки залежить тільки від поточного і не залежить від минулих у часі значень. Для покращення результатів прогнозування запропоновано враховувати значення волатильності у минулий проміжок часу або ж використовувати часткову автокореляційну функцію для оцінювання порядку авторегресійної моделі по h_t . Запропонована модель має такий вигляд:

$$y_t = e^{\frac{h_t}{2}} u_t, t \geq 1,$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \psi(h_{t-1} - \mu) + \sigma_v v_t, t \geq 1,$$

$$h_1 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}\right),$$

де введений параметр ψ , як і параметр ϕ , відображає міру сталості прихованого процесу волатильності h_t .

Оцінка параметрів моделей

Оцінка параметрів моделей виконувалась у середовищі OpenBUGS, оскільки воно дає змогу швидко вносити зміни в модель та, на відміну від мов програмування низького рівня, будь-які зміни структури моделі не потребують перепрограмування алгоритму оцінювання, що вимагає менше часу на виконання обчислювальних експериментів.

Використання описаної нижче специфікації МСВ у пакеті OpenBUGS дає можливість користувачу виконувати оцінювання параметрів моделі без знання точних формул для будь-якої апріорної щільності або ймовірності. Докладно процедуру оцінювання параметрів у системі моделювання OpenBUGS розглянуто в

праці [6]. Оцінки параметрів для обох моделей отримано на основі даних обмінного курсу валют фунт/долар.

Оцінка параметрів МСВ. Алгоритми оцінювання параметрів МСВ ґрунтуються на методі Монте-Карло для марковських ланцюгів (вони ґрунтуються на алгоритмі Гіббса). Специфікація МСВ у середовищі OpenBUGS для оцінювання параметрів моделі має такий вигляд:

```
model{
  mu ~ dnorm(0, 0.1)
  phistar ~ dbeta(20, 1.5)
  ntau ~ dgamma(2.5, 0.025)
  phi<- 2*phistar-1
  tau<- sqrt(1/ntau)
  beta<- exp(mu/2)

  theta0 ~ dnorm(mu, ntau)
  meantheta[1] <- mu + phi*(theta0 - mu)
  theta[1] ~ dnorm(meantheta[1] , ntau)
  for (i in 2 : N){
    meantheta[i] <- mu + phi * (theta[i-1] - mu)
    theta[i] ~ dnorm(meantheta[i], ntau)
  }
  for (j in 1 : N){
    meany[j] <- 1/exp(theta[j])
    y[j] ~ dnorm(0, meany[j])
  }
}
```

Будь-яке твердження у наведеній специфікації складається з відношення одного з типів:

- 1) символ “~” інтерпретується як: “є розподілим як”;
- 2) символи “<-” інтерпретуються як: “замінюється на”.

Величина з лівої сторони символу “~” є стохастичною, а з лівої сторони символу “<-” є детермінованою. Кожна величина має визначатись один і лише один раз з лівої сторони твердження. Порядок виразів у фігурних дужках ролі не грає.

Важливим є те, що OpenBUGS використовує нестандартну параметризацію розподілів у термінах точності (1/дисперсія) замість дисперсії. Це є підставою для визначення вершини “ntau”.

Оцінки параметрів, отримані в середовищі OpenBUGS (курс фунт/долар) після циклічного виконання однокрокового алгоритму Гіббса, становлять: $\varphi = 0,9325$, $\mu = -0,6893$, $\sigma_v^2 = 0,1302$.

Оцінка параметрів запропонованої МСВ. Специфікація запропонованої модифікованої МСВ у середовищі OpenBUGS має такий вигляд:

```
model{
  mu ~ dnorm(0, 0.1)
  phistar ~ dbeta(20, 1.5)
  ntau ~ dgamma(2.5, 0.025)
  psistar ~ dbeta(20, 1.5)
  phi<- 2*phistar-1
  tau<- sqrt(1/ntau)
  beta<- exp(mu/2)
  psi<- 2*psistar -1

  theta0 ~ dnorm(mu, ntau)
  meantheta[1] <- mu + phi*(theta0 - mu)
  theta[1] ~ dnorm(meantheta[1] , ntau)
  meantheta[2] <- mu + phi*(theta[1] - mu) +
    psi*(theta0 - mu)
  theta[2] ~ dnorm(meantheta[2] , ntau)
  for (i in 3 : N) {
    meantheta[i] <- mu + phi * (theta[i-1] -
      mu) + psi * (theta[i-2] - mu)
    theta[i] ~ dnorm(meantheta[i], ntau)
  }
  for (j in 1 : N){
    meany[j] <- 1/exp(theta[j])
    y[j] ~ dnorm(0, meany[j])
  }
}
```

Переформатування до такої специфікації від наведеної вище є мінімальним; для цього потрібно виконати такі дії:

- 1) додати специфікацію параметра ψ :

```
psistar ~ dbeta(20, 1.5)
psi<- 2*psistar -1
```

- 2) замінити на специфікацію:

```
meantheta[i] <- mu + phi * (theta[i-1] - mu) +
psi * (theta[i-2] - mu)
```

- 3) додати специфікацію:

```
meantheta[2] <- mu + phi*(theta[1] - mu) +
psi*(theta0 - mu)
theta[2] ~ dnorm(meantheta[2] , ntau)
```

Оцінки параметрів, отримані в середовищі OpenBUGS (курс фунт/долар) після виконання однокрокового алгоритму Гіббса, становлять: $\varphi = 0,5262$, $\psi = 0,4117$, $\mu = -0,4003$, $\sigma_v^2 = 0,127$.

Короткострокове прогнозування волатильності

Після отримання оцінок параметрів моделей можна переходити до розв'язання задачі прогнозування. Процедура прогнозування виконана за допомогою розробленої програми мовою Java. У процедурі прогнозування виділяють два підходи: статичне прогнозування та динамічне прогнозування. Ці підходи до прог-

нозування мають давати на першому кроці багатокрокового прогнозування ідентичні результати. Статичне прогнозування являє собою процедуру однокрокового прогнозування, динамічне – багатокрокового. В даній роботі реалізовано динамічне прогнозування, тобто прогнозування на кілька кроків уперед. Для його реалізації необхідно побудувати функцію прогнозування для відповідної моделі.

Функція прогнозування МСВ. У праці [7] описано процес побудови функції прогнозування для запропонованої Тейлором МСВ. Функція прогнозування на довільну кількість кроків, побудована ітераційним методом, має вигляд

$$\begin{aligned} \hat{h}(k+t) = \\ = \mu(1-\varphi)(1+\varphi+\varphi^2+\dots+\varphi^{t-1}) + \varphi^t h(k). \end{aligned}$$

Необхідно відзначити, що h_t – це логарифм квадрата волатильності, тобто

$$h_t = \ln \sigma_t^2,$$

де σ_t – волатильність у момент часу t . Процедура прогнозування виконувалась на 3, 10 і 30 кроків уперед (n_{forecast}). Нижче наведено результати прогнозування для МСВ (табл. 1).

Таблиця 1. Результати прогнозування значень волатильності на основі МСВ на 10 кроків (курс фунт/долар)

Реальне значення	Прогноз на основі МСВ
0,01408172	0,014065225
0,56596463	0,014065225
0,56034198	0,017903586
1,1443432	0,022421251
1,84682481	0,02765563
3,86364335	0,033632288
3,17861402	0,040363946
0,14487076	0,047850039
0,13373382	0,056076835
0,47339834	0,065018039

Прогнозування за запропонованою МСВ. Процедура отримання функції прогнозування загального вигляду для запропонованої моделі є достатньо складною задачею. Це питання було вирішено програмним шляхом. Різницеве рівняння, що описує зміну волатильності в часі, дає можливість досить просто прогнозувати на один крок уперед. Для цього потрібно в це різницеве рівняння підставити поточне значення

волатильності та відповідні параметри. Програма розраховує значення волатильності на один крок і підставляє отримане значення для розрахунку наступного. Нижче наведено результати прогнозування для запропонованої МСВ (табл. 2).

Таблиця 2. Результати прогнозування значень волатильності на основі запропонованої МСВ на 10 кроків (курс фунт/долар)

Реальне значення	Прогноз на основі МСВ
0,01408172	0,014065225
0,56596463	0,051412551
0,56034198	0,035363937
1,1443432	0,049522641
1,84682481	0,050681819
3,86364335	0,058931566
3,17861402	0,064409331
0,14487076	0,071816651
0,13373382	0,078884908
0,47339834	0,08667825

Аналіз прогнозованих значень

Основним елементом виконаної роботи є аналіз отриманих прогнозованих значень після проведення експерименту. На рисунку зображено графік руху волатильності в попередні проміжки часу та прогноз на n_{forecast} кроків уперед.

Для порівняння результатів прогнозування застосуємо статистичні характеристики аналізу якості оцінок моделей і прогнозів, а саме такі показники:

– середній квадрат похибки (СКП):

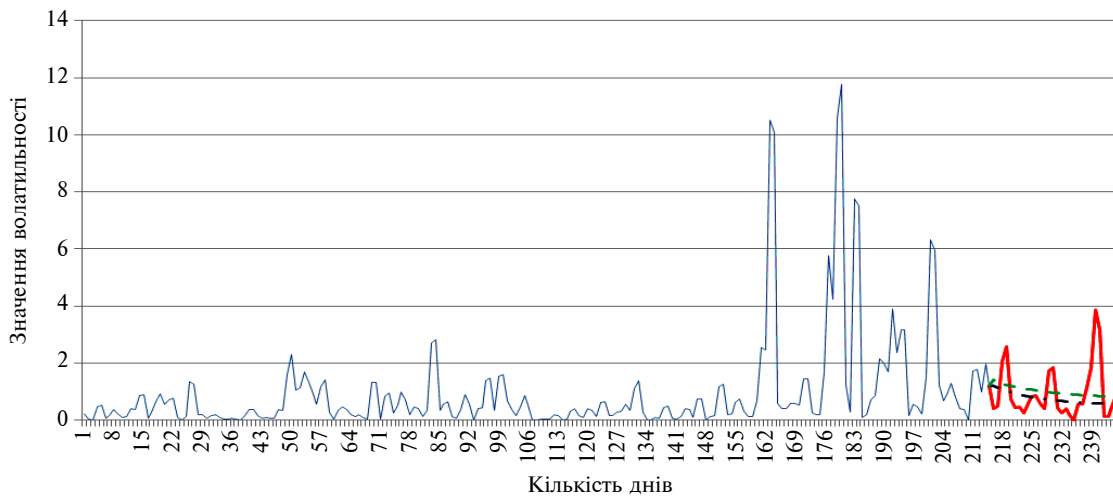
$$\text{СКП} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\sigma(k) - \hat{\sigma}(k)]^2;$$

– середня абсолютна похибка в процентах:

$$\text{САПП} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{|\sigma(k) - \hat{\sigma}(k)|}{|\sigma(k)|} \times 100\%;$$

– коефіцієнт Тейла:

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\sigma(k) - \hat{\sigma}(k)]^2}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sigma^2(k) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\sigma}^2(k)}}.$$



Значення волатильності в попередні моменти часу та прогноз на n_{forecast} кроків уперед: — навчальна вибірка; — реальні значення; - - - прогноз на основі МСВ Тейлора; - - - прогноз на основі запропонованої МСВ

Таблиця 3. Характеристики оцінок прогнозів і моделей

Кількість кроків	Тип моделі	Характеристики прогнозу			Характеристики моделі		
		СКП	САПП	Коефіцієнт Тейла	R^2	$\sum e^2$	DW
3	МСВ Тейлора	0,38118762	39,310302	0,5776105	0,001246931	0,5812160	1,536029729
	Запропонована МСВ	0,31664610	102,20979	0,3501283	0,267098578	0,4010590	1,952788991
10	МСВ Тейлора	1,66498514	81,048336	0,9612209	2,673967E-4	30,493931	0,998092810
	Запропонована МСВ	1,64849764	76,027685	0,9402736	3,278373E-4	29,892989	0,995349411
30	МСВ Тейлора	0,95823765	229,52655	0,4527192	0,044986892	28,464801	0,960608763
	Запропонована МСВ	0,93977491	332,57809	0,4002850	0,030398009	27,378483	0,973044516

Якість моделі визначаємо за такими статистичними показниками:

– коефіцієнт детермінації: $R^2 = \frac{\text{Var}[\hat{\sigma}]}{\text{Var}[\sigma]}$;

– сума квадратів похибок моделі:

$$\sum e^2 = \sum_{i=1}^N [\sigma(i) - \hat{\sigma}(i)]^2 ;$$

– статистика Дарбіна–Уотсона:

$$DW = 2 - 2\rho,$$

$$\text{де } \rho = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=2}^N [e(i) - \bar{e}][e(i-1) - \bar{e}]}{\text{Var}[e]}.$$

Результати розрахунків показників наведені в табл. 3.

З табл. 3 видно, що запропонована модель дає кращий прогноз за всіма показниками,

крім показника САПП. При прогнозуванні на 10 кроків уперед запропонована модель дає кращий прогноз за всіма показниками, крім коефіцієнта детермінації, відмінність якого перебуває в межах допустимої похибки.

Висновки

Запропонована модель, яка враховує значення волатильності в минулі проміжки часу (модель авторегресійного типу), дає точніший прогноз за класичну МСВ [5]. Для оцінювання параметрів моделей використано адаптований метод Монте-Карло для марковських ланцюгів, який забезпечив отримання незміщених оцінок параметрів створеної МСВ. На основі побудованої моделі отримано функцію прогнозування, за якою обчислено оцінки багатокрокового прогнозу волатильності досліджуваного фінансового процесу. Виконані обчислювальні експерименти свідчать про те, що запропонована модель дає можливість досягти вищої якості

прогнозування, ніж відома модель Тейлора. Очевидно, що подальше удосконалення структури цієї моделі можливе завдяки використанню часткової автокореляційної функції для аналізу ряду вибірових значень \hat{h}_t , отриманого за фактичною вибіркою фінансового проце-

су. При цьому необхідно пам'ятати, що існують різні (часто досить наближені) способи обчислення вибіркової волатильності. Тобто необхідно вибрати такий спосіб обчислення значень \hat{h}_t , який забезпечить отримання кращих результатів прогнозування.

1. *Фишер Р.* Трейдинг по Фибоначчи: практические приемы и методы. – М.: ЕВРО, 2002. – 192 с.
2. *Малюгин В.И.* Рынок ценных бумаг. – М.: Дело, 2003. – 322 с.
3. *Рынок ценных бумаг* / Под ред. В.А. Голованова, А.И. Басова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 448 с.
4. *Бідюк П.І., Меньяйленко О.С., Половцев О.В.* Методи прогнозування. – Луганськ: Альма Матер, 2008. – 607 с.
5. *S.J. Taylor*, "Financial returns modeled by the product of two stochastic processes – a study of the daily sugar prices: 1961–1975", in *Time Series Analysis: Theory and Practice*, 1. O.D. Anderson, Ed. Netherlands, Amsterdam: North-Holland, 1982, pp. 203–226.
6. *Коновалюк М.М.* Байєсівський аналіз моделі стохастичної волатильності в середовищі OpenBUGS // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2011. – № 2. – С. 77–84.
7. *Бідюк П.І., Коновалюк М.М.* Прогнозування волатильності валютного ринку за нелінійними моделями // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2011. – № 719. – С. 154–163.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
30 серпня 2012 року