

УДК 621.395.6

В.І. Найденко, О.С. Постульга

**ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК L-ПОДІБНОГО І КРОС-ХВИЛЕВОДУ
ВАРІАЦІЙНИМ МЕТОДОМ**

Waveguides with one and two cuts (L-shaped waveguide and waveguide with two corner cuts) are used in microwave devices. Therefore, there is a need for new effective and rapid methods for calculating the characteristics of such waveguides. The variational method is used to calculate the eigenvalues of waves of L-shaped waveguide and waveguide with two corner cuts with arbitrary geometrical parameters. Polynomials orthogonal over the area of considered waveguides are unknown. We consider several types of the field approximation: on the basis of trigonometric and power functions. Field approximation by trigonometric functions gives more accurate results in calculating eigenvalues and requires less mathematical operations. Increase of the system order leads to an increase of the condition number and instability of the solution. Variational method gives eigenvalues of the waves with great accuracy for large cuts and a small number of transactions. Results can be used in design and synthesis of microwave devices based on the L-shaped waveguide and waveguide with two corner cuts.

Вступ

Хвилеводи з однією та двома вставками часто використовуються в різних НВЧ-пристроях. Такі хвилеводи можуть забезпечувати специфічний розподіл поля й виконувати певні функції. L-подібний хвилевід використовується для повороту поляризації на 90° [1] – між взаємно перпендикулярними вхідним і вихідним прямокутними хвилеводами. Геометрія L-подібного хвилеводу змінюється таким чином, щоб критична частота основної хвилі була постійною. Це забезпечує потрібні характеристики узгодження. L-подібний хвилевід також використовується як частина двомодових хвилевідних фільтрів [2]. Такі фільтри не вимагають додаткових узгодження штирями і підстроювання, вони прості у виготовленні, надійні та недорогі.

Останнім часом отримали застосування хвилеводи із двома діагонально розміщеними вставками, так звані крос-хвилеводи. Однією з особливостей таких хвилеводів є наявність двох перших мод хвилі типу H із взаємно ортогональними площинами поляризації, орієнтованими вздовж діагоналей. Ці дві хвилі поширюються у хвилеводі з різними фазовими швидкостями. Тому стає можливим створення на основі таких хвилеводів пристроїв для повороту поляризації на 90° . Розглянутий у [3] повертач має дуже малу довжину: у п'ять разів меншу, ніж довжина хвилі у вхідному й вихідному хвилеводах на центральній частоті, а також простий у виготовленні. Крос-хвилевід використовується в перетворювачі поляризації з лінійної на колову [4]. Оскільки дві перші моди типу H крос-хвилеводу мають взаємно перпендикуляр-

ні площини поляризації та різні фазові швидкості, можна підібрати таку довжину секції крос-хвилеводу, щоб на виході фазовий зсув між двома модами становив 90° . За умови рівності амплітуд цих мод на виході матимемо хвилю з коловою поляризацією. Такі перетворювачі поляризації мають менші порівняно з аналогами розміри й легкі у виготовленні.

У [5] досліджено залежності власних значень хвиль типу E і H квадратного симетричного крос-хвилеводу із квадратними вставками від розмірів вставок. Також наведено розподіли полів у поперечній площині хвилеводу для мод типу E і H .

Постановка задачі

У статті розглядаються хвилі L-подібного й кросу-хвилеводу. Застосовується варіаційний метод, що отримав широке застосування в електродинаміці, зокрема в синтезі випромінюючих систем.

Хвилі типу E

L-подібний і крос-хвилевід, а також їх геометричні розміри й введена система координат зображені на рис. 1.

Розіб'ємо поперечний переріз хвилеводів на області 1 і 2, як показано на рис. 1. Області мають перекриття – область v . Подамо поле як суму полів у областях 1 і 2:

$$E_z = E_{z_1} + E_{z_2}, \quad (1)$$

де E_{z_1} і E_{z_2} – поля, визначені в областях 1 і 2 відповідно.

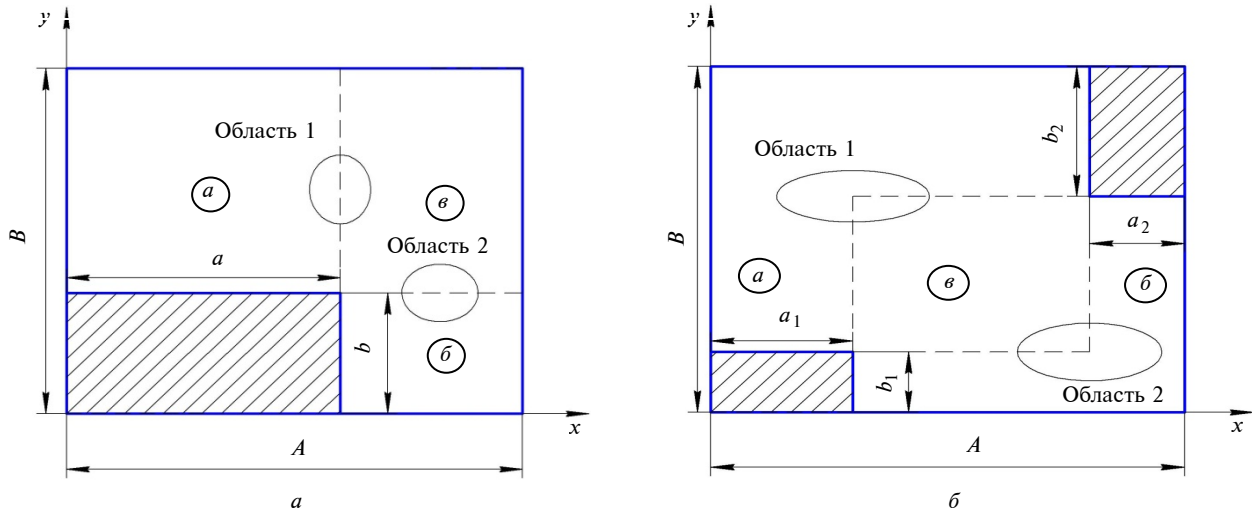


Рис. 1. Досліджувані хвильоводи: *a* – L-подібний; *b* – крос-хвильовід

В області *v* поле записане як сума полів, у області *a* (див. рис. 1) – тільки E_{z_1} , в області *б* – тільки E_{z_2} . Зображення (1) задовольняє граничні умови на всьому контурі хвильоводу

$$E_z|_L = 0. \tag{2}$$

Для хвиль типу *E* маємо граничну задачу Діріхле, для якої відомий функціонал [6–8]

$$J = \int_S (\nabla_{\perp} E_z)^2 dS - 2 \oint_L E_z \frac{\partial E_z}{\partial n} dl - k^2 \int_S (E_z)^2 dS, \tag{3}$$

де $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число, *n* – внутрішня нормаль до поверхні хвильоводу, $\nabla_{\perp} = \mathbf{e}_x \partial/\partial x + \mathbf{e}_y \partial/\partial y$ – поперечний оператор набла. Інтегрування проводиться по площі поперечного перерізу *S* і контуру *L* хвильоводів. Функціонал (3) набуває стаціонарного значення на власних хвилях хвильоводу [8]. Враховуючи (2), з (3) маємо

$$J = \int_S (\nabla_{\perp} E_z)^2 dS - k^2 \int_S (E_z)^2 dS. \tag{4}$$

Для розв’язання варіаційної задачі застосуємо метод Релея–Рітца [7], згідно з яким значення функціонала (4) розглядається на поданні рішення у вигляді

$$E_z(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x, y),$$

де $W_i(x, y)$ – функції порівняння, або координатні функції, α_i – вагові коефіцієнти. На таких лінійних комбінаціях функціонал перетворю-

ється на функцію $J(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ знаходяться розв’язанням системи рівнянь

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{5}$$

При $n \rightarrow \infty$ матимемо точне розв’язання варіаційної задачі. На практиці обмежуються *n* першими членами. При цьому наближене значення мінімуму знаходиться з надлишком, максимуму – з недостаткою [7].

Слід зауважити, що вибір послідовності функцій $W_i(x, y)$ сильно впливає на ступінь складності подальших обчислень. Власне, функції, що вносяться у функціонал (3), а саме $W_i(x, y)$, не обов’язково мають задовольняти граничні умови на контурі хвильоводу. Доданок $2 \oint_L E_z \frac{\partial E_z}{\partial n} dl$ у (3) забезпечує виконання граничних умов Діріхле на границі області. Але якщо функції задовольняють граничні умови (т.зв. природні функції), то при заданому числі координатних функцій одержимо більш точне розв’язання варіаційної задачі.

Апроксимація поля степеневими і тригонометричними функціями. Зобразимо поле в області 1 і 2 у вигляді суми степеневих функцій з ваговими коефіцієнтами $C_{i,j}$ і $D_{i,j}$ відповідно. Для L-подібного хвильоводу маємо

$$E_z = \underbrace{\sum_{i,j=1}^M C_{i,j} \left(\frac{x}{A}\right)^i \left(1 - \left(\frac{x}{A}\right)^i\right) \left(\frac{y-b}{B-b}\right)^j \left(1 - \left(\frac{y-b}{B-b}\right)^j\right)}_{E_{z_1}} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{i,j=1}^M D_{i,j} \left(\frac{x-a}{A-a} \right)^i \left(1 - \left(\frac{x-a}{A-a} \right)^i \right) \left(\frac{y}{B} \right)^j \left(1 - \left(\frac{y}{B} \right)^j \right)}_{E_{z_2}}. \quad (6)$$

Для крос-хвильоводу маємо

$$E_z = \sum_{i,j=1}^M C_{i,j} \left(\frac{x}{A-a_2} \right)^i \left(1 - \left(\frac{x}{A-a_2} \right)^i \right) \times \underbrace{\left(\frac{y-b_1}{B-b_1} \right)^j \left(1 - \left(\frac{y-b_1}{B-b_1} \right)^j \right)}_{E_{z_1}} + \sum_{i,j=1}^M D_{i,j} \left(\frac{x-a_1}{A-a_1} \right)^i \left(1 - \left(\frac{x-a_1}{A-a_1} \right)^i \right) \times \underbrace{\left(\frac{y}{B-b_2} \right)^j \left(1 - \left(\frac{y}{B-b_2} \right)^j \right)}_{E_{z_2}}. \quad (7)$$

Апроксимація поля сумою тригонометричних функцій буде мати такий вигляд для L-подібного хвильоводу:

$$E_z = \underbrace{\sum_{i,j=1}^M C_{ij} \cdot \sin \frac{i\pi}{A} x \cdot \sin \frac{j\pi}{B-b} (y-b)}_{E_{z_1}} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^M D_{ij} \cdot \sin \frac{i\pi}{A-a} (x-a) \cdot \sin \frac{j\pi}{B} y}_{E_{z_2}}, \quad (8)$$

для крос-хвильоводу:

$$E_z = \underbrace{\sum_{i,j=1}^M C_{ij} \cdot \sin \frac{i\pi}{A-a_2} x \cdot \sin \frac{j\pi}{B-b_1} (y-b_1)}_{E_{z_1}} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^M D_{ij} \cdot \sin \frac{i\pi}{A-a_1} (x-a_1) \cdot \sin \frac{j\pi}{B-b_2} y}_{E_{z_2}}. \quad (9)$$

Хвильовий множник $e^{j(\omega t - \Gamma z)}$ у (6)–(9) опущений, оскільки він скорочується й не впливає на результати подальших обчислень. Комбінації i, j в (6)–(9) перебираються від 1, 1 до M, M . Число таких комбінацій буде M^2 . Для тригонометричної апроксимації (8), (9) поле в областях 1 і 2 розглядається як сума хвиль $E_{11},$

$E_{12}, E_{22}, \dots, E_{MM}$ з ваговими коефіцієнтами $C_{11}, C_{12}, C_{21}, \dots, C_{MM}$ в області 1 і $D_{11}, D_{12}, D_{21}, \dots, D_{MM}$ в області 2. Очевидно, що подання поля (6)–(9) задовольняє граничні умови на контурах хвильоводів.

Після підстановки одного з виразів (6)–(9) у функціонал (4) і диференціювання по $C_{i,j}, D_{i,j}$ (метод Релея–Рітца) одержимо однорідну систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) порядку $2M^2$ для відповідного хвильоводу й типу апроксимації. При цьому інтеграли по площі поперечного перерізу S беруться аналітично. За використання тригонометричної апроксимації вирази для інтегралів набагато простіші, що істотно впливає на швидкість обчислення.

Необхідною умовою існування ненульових рішень однорідної СЛАР є рівність нулю її визначника. З цієї умови знаходимо власні значення для хвиль типу E L-подібного й крос-хвильоводу.

Для квадратних симетричних хвильоводів ($A = B, a = b, a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = a$) при тригонометричній апроксимації, $M = 1$, маємо не СЛАР, а одне рівняння, бо внаслідок симетрії амплітуди хвиль у кожній області можемо покласти однаковими. Тому після підстановки (8), (9) в (4), прирівнявши (4) до нуля, одержуємо формулу для власного значення k^2 хвиль типу E L-подібного й кросу-хвильоводу відповідно:

$$\left(\frac{kA}{\pi} \right)^2 = \frac{1-s + \frac{1}{1-s} + 8 \frac{(1-s)^2}{(2-s)^2} \text{sinc}^2 \pi s}{1-s + 4 \frac{(1-s)^2}{(2-s)^2} \text{sinc}^2 \pi s}, \quad (10)$$

$$\left(\frac{kA}{\pi} \right)^2 = 2 \frac{1 + \frac{1}{(1-s)^2} \left[(1-2s)^2 \cos^2 \frac{\pi s}{1-s} - s^2 \text{sinc}^2 \frac{\pi s}{1-s} \right]}{(1-s)^2 + \left[(1-2s) \cos \frac{\pi s}{1-s} + s \cdot \text{sinc} \frac{\pi s}{1-s} \right]^2}. \quad (11)$$

Результати розрахунків. На рис. 2 наведено відносні похибки обчислених власних значень ka першої моди типу E (у відсотках) при степеневій апроксимації для L-подібного хвильоводу. Результати розрахунку порівнювалися з наведеними в [9] (будемо називати їх опорними значеннями), розрахованими методом частинних областей з урахуванням особливості на

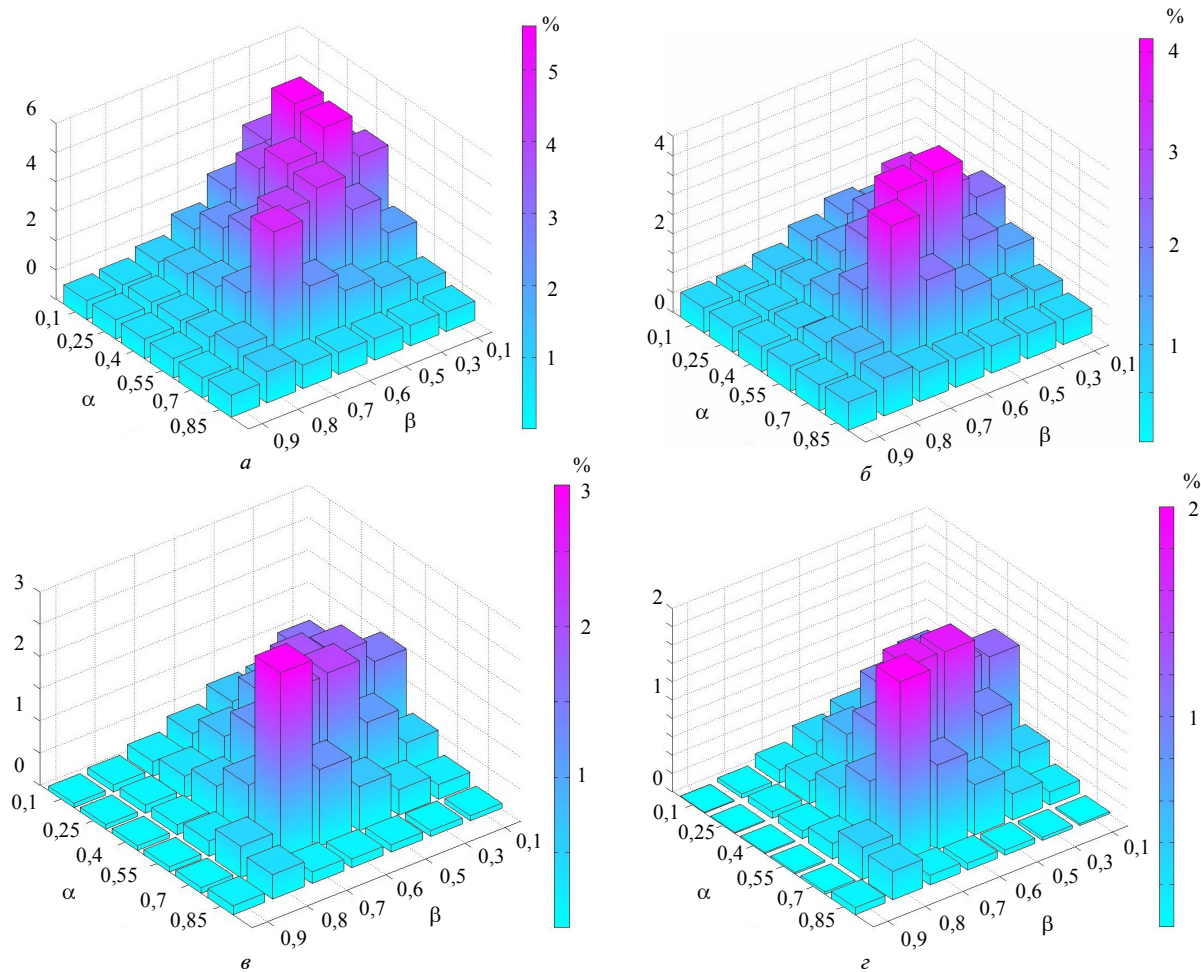


Рис. 2. Відносні похибки обчислених власних значень ka першої моди типу E за різних M , апроксимація степеневими функціями: $a - M = 1$; $б - M = 2$; $в - M = 3$; $г - M = 4$

ребрі. Видно, що зі збільшенням M похибка зменшується й має найбільші значення за приблизно однакових α і β , де $\alpha = a/A$, $\beta = b/B$. При $M = 4$ (32 порядок СЛАР) похибка не перевищує 2%. При цьому знайдені варіаційним методом власні значення ka при всіх M більші опорних – стаціонарне значення функціонала на власних хвилях найменше [7].

Власні значення $ka/\pi = 2A/\lambda$ першої моди типу E , розраховані при апроксимації степеневими й тригонометричними функціями, залежно від параметра $s = a/A$ при $M = 2, 4$ наведені на рис. 3 для L-подібного хвилеводу й на рис. 4 – для крос-хвилеводу. Розрахунки проводилися для квадратних симетричних хвилеводів із квадратними вставками ($A = B$, $a = b$, $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = a$).

Видно, що при відповідних апроксимаціях зі збільшенням M власні значення зменшуються. При $s = 0$ маємо квадратний хвилевід з від-

повідним йому власним значенням $ka/\pi = \sqrt{2}$. Видно, що при $s = 0$ криві на рис. 3, 4 наближаються до цього значення. У випадку крос-хвилеводу при $s = 0,5$ маємо два квадратні хвилеводи зі сторонами $a/2$. Власне значення, що відповідає такому хвилеводу, $ka/\pi = 2\sqrt{2}$. Як видно з графіка на рис. 4, власні значення при $s = 0,5$ наближаються до $2\sqrt{2}$.

Власні значення, розраховані при апроксимації тригонометричними функціями, менші за відповідні їм значення при апроксимації степеневими функціями для однакових M . Це свідчить про те, що апроксимація сумою тригонометричних функцій має кращу збіжність при розрахунку власних значень. Тому для одержання власних значень хвилі типу E з тією ж точністю вона вимагає меншого порядку СЛАР, ніж апроксимація степеневими функціями.

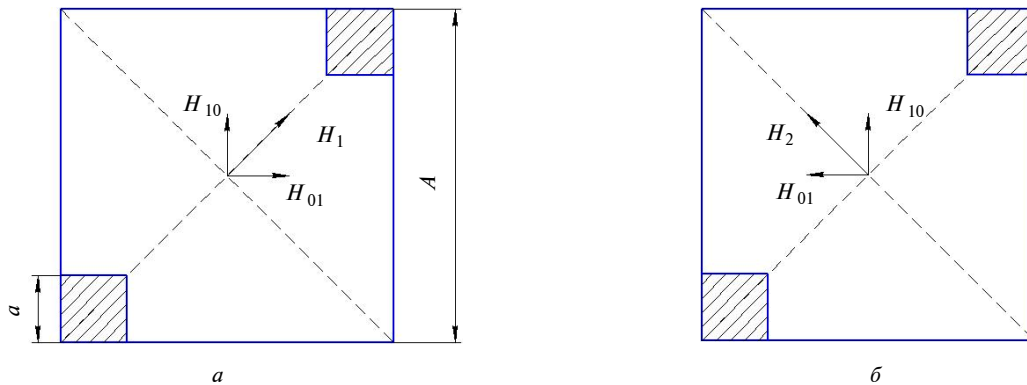


Рис. 6. Орієнтація площин поляризації хвиль H_1 (а) і H_2 (б) та подання їх сумою або різницею хвиль H_{10} і H_{01}

H_{m0} і H_{0m} ; хвилями H_{10} і H_{01} ; сумою хвиль H_{10} , H_{30} і H_{01} , H_{03} . Парні індекси хвиль пропущені внаслідок симетрії поля й хвилеводу щодо площин, що проходять через діагоналі хвилеводу.

Поле H_z при апроксимації сумою хвиль H_{m0} і H_{0m} :

$$H_z = \sum_{m=1,3}^M X_m \left(\cos \frac{m\pi x}{A} \pm \cos \frac{m\pi y}{A} \right), \quad (13)$$

де X_m – амплітуда хвиль H_{0m} і H_{m0} , M – максимальний порядок мод (H_{0M} і H_{M0}), що апроксимують поле, A – довжина сторони крос-хвилеводу (див. рис. 6). З цієї апроксимації одержуємо найпростішу апроксимацію хвилями H_{10} і H_{01} :

$$H_z = \left[\underbrace{\cos \frac{\pi x}{A}}_{H_{10}} \pm \underbrace{\cos \frac{\pi y}{A}}_{H_{01}} \right], \quad (14)$$

і наступну за складністю апроксимацію хвилями H_{10} , H_{30} і H_{01} , H_{03} :

$$H_z = X_1 \underbrace{\cos \frac{\pi x}{A}}_{H_{10}} + X_3 \underbrace{\cos \frac{3\pi x}{A}}_{H_{30}} \pm \left(X_1 \underbrace{\cos \frac{\pi y}{A}}_{H_{01}} + X_3 \underbrace{\cos \frac{3\pi y}{A}}_{H_{03}} \right), \quad (15)$$

де X_1 , X_3 – амплітуди хвиль H_{10} , H_{01} і H_{30} , H_{03} .

Знак “плюс” або “мінус” у (13)–(15) відповідає модам H_1 і H_2 відповідно. Амплітуди хвиль H_{0m} і H_{m0} в (13), (15) взяті рівними між собою внаслідок симетрії поля й хвилеводу. Зображення поля (13)–(15) задовольняє граничні умови на стінках хвилеводу, але не на вставках. Однак, як зазначалося вище, пробні функції функціонала (12) не обов’язково мають задовольняти граничні умови.

Функціонал (12) записуємо у вигляді

$$J = \int_S (\nabla_{\perp} H_z)^2 dS - k^2 \int_S (H_z)^2 dS. \quad (16)$$

Для апроксимацій поля (13), (15) методом Релея–Рітца одержимо однорідну СЛАР. З умови рівності нулю визначника СЛАР маємо рівняння для знаходження власних значень хвиль типу H квадратного симетричного крос-хвилеводу. Для апроксимації (14) після підстановки її в (12) одержуємо власні значення хвиль H_2 і H_1 квадратного симетричного крос-хвилеводу у вигляді формули

$$\left(\frac{kA}{\pi} \right)^2 = \frac{1 - 2s^2 + \frac{s}{\pi} \operatorname{sinc} 2\pi s}{1 - 2s^2 - \frac{s}{\pi} \operatorname{sinc} 2\pi s \mp \frac{4}{\pi^2} \sin^2 \pi s}. \quad (17)$$

Знаки “мінус” і “плюс” у (17) відповідають модам H_1 і H_2 відповідно.

Результати розрахунків. Розраховані власні значення двох перших мод типу H залежно від параметра s наведені на рис. 7. В апроксимації (13) взято $M = 9$. Видно, що критичні частоти (власні значення) різні для двох хвиль і мають різний характер залежності від величини параметра s . Зі збільшенням s різниця між критичними частотами збільшується. При $s = 0$ маємо звичайний квадратний хвилевід. Тому його критична частота $ka/\pi = 1$, що підтверджується графіками на рис. 7.

За більших s власні значення моди H_2 , розраховані при апроксимації (15), стають помітно меншими власних значень, розрахованих при апроксимації (14). Але для апроксимацій (13), (15) різниця між відповідними власними значеннями стає істотною лише при s , близьких до 0,5. Для хвилі H_1 немає істотної різниці між власними значеннями при різних апроксимаціях.

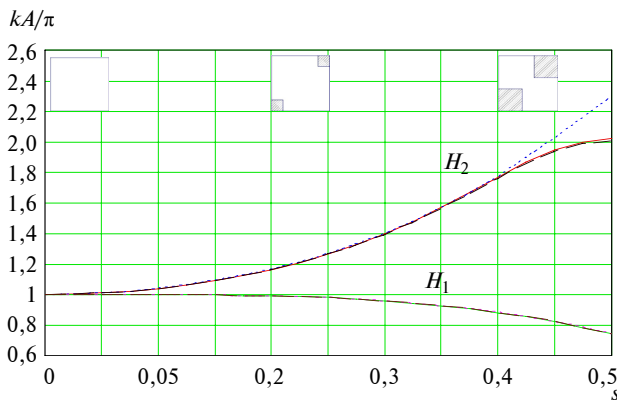


Рис. 7. Власні значення хвиль типу H крос-хвильоводу:
 - - - - - апроксимація поля хвилями H_{10} і H_{01} ,
 — — — — H_{10} , H_{30} і H_{01} , H_{03} , — · — · — H_{m0} , H_{0m}

Власні значення хвилі H_2 при $s = 0,5$ при апроксимації (13), (15) прямують до 2. Фактично, при $s \rightarrow 0,5$ відбувається перехід до двох квадратних хвильоводів з удвічі меншими сторонами. Слід очікувати, що в таких хвильоводах будуть поширюватися хвилі типу H_{10} із власним значенням $ka/\pi = 2$.

Розраховані власні значення хвиль типу H крос-хвильоводу за невеликих s мають високу точність. Криві, наведені на рис. 7, добре узгоджуються з даними, наведеними в [3, 5].

Висновки

Для розрахунку власних значень хвиль L -подібного й крос-хвильоводу з довільними геомет-

ричними параметрами застосований варіаційний метод. Розглянуто кілька видів апроксимацій поля: на основі сум тригонометричних і степеневих функцій. Результати розрахунку власних значень хвиль типу E мають високу точність: похибка не перевищує 2 % при 32-му порядку СЛАР. Апроксимація поля тригонометричними функціями дає більш точні власні значення й вимагає меншої кількості арифметичних операцій. Для обох видів апроксимацій поля збільшення порядку системи приводить до поліпшення точності отриманих результатів. Однак порядок можна збільшувати тільки до певного числа: збільшення порядку СЛАР призводить до збільшення числа обумовленості матриці, що веде за собою збільшення нестабільності й неточності знайдених розв'язків.

Варіаційний метод застосований і для хвиль типу H квадратного симетричного крос-хвильоводу. Поле представлено сумою або різницею хвиль типу H у квадратному хвильоводі без вставок. Такий підхід дає можливість за невеликої кількості обчислювальних операцій одержати власні значення з великою точністю при невеликих вставках.

Формули (10), (11), (17) досить точні і можуть бути використані в подальшому для розрахунку пристроїв для повороту і перетворення поляризації, а також як початкові значення при аналізі методом частинних областей.

1. *H.F. Lenzingand and M.J. Gans*, "Machined waveguide twist", IEEE Trans. Microw. Theory and Tech., vol. 38, no. 7, pp. 942–944, 1990.
2. *X.-P. Liang et al.*, "Dual mode coupling by square corner cut in resonators and filters," IEEE Trans. Microw. Theory Tech., vol. 40, no. 12, pp. 2294–2302, 1992.
3. *A.A. Kirilenko et al.*, "Compact 90 Twist Formed by a Double-Corner-Cut Square Waveguide Section", IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech., vol. 56, no. 7, pp. 1633–1637, 2008.
4. *L.A. Rud and K.S. Shpachenko*, "Polarizer Based on Waveguide with Complex Cross-Section", in Proc. 2010 Int. Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves, Kharkiv, 2010, CD-ROM, E-7.
5. *L.A. Rud and K.S. Shpachenko*, "Eigen Modes of a Square Waveguide With Two Inner Diagonally-Placed Square Ridges", IEEE Trans. on Math. Methods in Electromagnetic Theory, Kyiv, Sep. 2010.
6. *Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н.* Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции: Монография. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
7. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
8. *Морс Ф.М., Фейнбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. – 942 с.
9. *Волноводы сложных сечений / Г.Ф. Заргано, В.П. Ляпин, В.С. Михалевский и др.* – М.: Радио и связь, 1986. – 124 с.
10. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справ. пособие. – К.: Наук. Думка, 1986. – 544 с.