УДК 517.988; 517.947

А.Ю. Мальцев

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ІСТОТНО НЕСКІНЧЕННОВИМІРНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

This paper presents the theoretical study of the infinite-dimensional analysis field. It is inspired by Paul Levy's scientific works and grabbed the attention of many mathematicians. The Laplace—Levy operator has many very interesting properties and many applications for stochastic analysis. The essentially infinite-dimensional operator is a generalization of well-known Levy—Laplace operator. Specifically, the operator of the formally second order satisfies the Leibniz property. This paper deals with studying non-stationary parabolic differential equations of the second order for functions defined for infinite dimensional equations in the Hilbert space. Differential operators of the second order related to these equations have no finite-differential analogs. We construct a solution to the Cauchy problem for any other non-stationary differential equation with essentially infinite-dimensional operator. In addition, we prove that this problem is equally correct.

Вступ

Подану статтю присвячено дослідженню нестаціонарних параболічних диференціальних рівнянь другого порядку для функцій, визначених на нескінченновимірному сепарабельному дійсному гільбертовому просторі. Диференціальні оператори другого порядку, що пов'язані з цими рівняннями, не мають скінченновимірних аналогів, тому вони називаються істотно нескінченновимірними.

Протягом двадцятого століття нескінченновимірний аналіз, інспірований науковими працями Поля Леві, привертав до себе увагу багатьох математиків. Це пояснюється дуже цікавими властивостями лапласіана Леві, а також його різноманітними застосуваннями. В 1922 р. Поль Леві навів означення лапласіана для функцій на нескінченновимірних просторах, вказав на його особливості, розвинув теорію середніх, дав через середні за гільбертовою сферою розв'язки задачі Діріхле для рівняння Лапласа та Пуассона для областей у просторі послідовностей і в просторі функцій, отримав узагальнений розв'язок квазілінійного рівняння.

У 50-х рр. минулого століття завдяки Є.М. Поліщуку інтерес до праць Леві ще посилився. Є.М. Поліщук помітив півгрупову властивість середніх Леві. Завдяки цьому стало можливим використовувати в дослідженнях методи теорії (C_0)-півгруп. Зв'язок аналізу Леві з працями О.Я. Хінчина з обґрунтування класичної статистичної механіки, на який було вказано Є.М. Поліщуком, і досі залишається маловідомим. З 1965 р. нескінченновимірні еліптичні рівняння з операторами типу Лапласа—Леві розглядаються в працях українського науковця М.Н. Феллера. Він дослідив різноманітні рівняння з оператором Лапласа—Леві: зокрема, довів єдність розв'язку відповідної задачі Діріхле, побудував у певних функціональних просторах диференціальні оператори будь-якого парного порядку, що породжені диференціальним виразом Лапласа—Леві. Значний внесок у розроблення теорії Леві зробив Г.Є. Шилов, який використовував у своїх дослідженнях методи новоствореної тоді теорії нормованих алгебр.

У 2002 р. виходить праця [1] Л. Акарді та О.Г. Смолянова, в якій отримано розв'язки рівнянь теплопровідності, Шредінгера і Лапласа, до яких входить лапласіан Леві. В наведеній праці також роз'яснюється зв'язок лапсасіана з квантовою теорією випадкових процесів. Це викликало інтерес до істотно нескінченновимірних рівнянь. Крім того, важливо згадати, що до рівнянь з операторами типу Лапласа—Леві приводять деякі задачі теорії надпровідності й теорії керованих систем. Отже, вказана теорія вже виходить за рамки цілковито математичного інтересу. Все сказане вище пояснює необхідність систематичного дослідження рівнянь із істотно нескінченновимірними операторами.

Постановка задачі

Мета цієї статті — побудувати розв'язок одного нестаціонарного істотно нескінченновимірного рівняння та дослідити властивості цього розв'язку. Результати, отримані в статті, спираються на результати, отримані автором у [2] і [3].

Вихідні дані

Нехай H — дійсний сепарабельний нескінченновимірний гільбертів простір, $L(H)$ —

простір обмежених лінійних операторів в H, $B_C(H)$ — банахів простір обмежених самоспряжених операторів в H. Нехай j — лінійний неперервний функціонал на $B_C(H)$. Функціонал j називається додатним, якщо $(\forall D \geq 0):$ $: j(D) \geq 0$. Відповідно до [4] функціонал j будемо називати істотно нескінченновимірним, якщо його ядру належать всі оператори скінченого рангу.

Позначимо через $Q_{n,c}$ множину всіх лінійних обмежених операторів, ранг яких не перебільшує n, а норма не перебільшує c. Множину $M \subset L(H)$ назвемо майже компактною, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує компактна множина $K \subset L(H)$ та числа $n \in \mathbb{N}$, $c > 0$, такі, що $K + Q_{n,c}$ є ε-сіткою для M. Клас майже компактних множин розглядався, наприклад, у [4]. У [4] також впроваджено алгебру функцій $\mathfrak{A}$. В $\mathfrak{A}$ входять ті й тільки ті функції з $C^2(H)$ для яких:

- $\forall R > 0$ існує майже компактна множина $M \subset L(H)$ така, що $\forall x \in \{x : \| x \| \leq$ $\leq R\} : u''(x) \in M$;
- $u''(\cdot)$ рівномірно неперервна на обмежених в H множинах.

Через $\mathfrak{A}_0$ будемо позначати підалгебру алгебри $\mathfrak{A}$, до якої входять функції, що мають обмежений носій. В $\mathfrak{A}_0$ впроваджується норма $\|\varphi\| = \sup\limits_{x \in H} |\varphi(x)|$. Нехай X — поповнення $\mathfrak{A}_0$ за вказаною нормою.

З кожним додатним істотно нескінченновимірним оператором пов'яжемо лінійний оператор L^j в просторі X, що має $\mathfrak{A}_0$ своєю областю визначення: $(L^j\varphi)(x) = \dfrac{1}{2} j(\varphi''(x))$. Такий оператор будемо називати істотно нескінченновимірним. Істотно нескінченновимірний оператор узагальнює класичний оператор Лапласа—Леві (якщо вибрати певним чином j, L^j — це в точності лапласіан Леві). Оператор L^j, формально другого порядку, успадковує всі добрі властивості класичного лапсасіана Леві, зокрема, лейбніцівську властивість.

Будемо вважати, що векторне поле Z в просторі H є полем класу $\mathfrak{A}_0$, якщо:

- Z має обмежений носій;
- Z двічі неперевно диференційовне на H, і при цьому друга похідна Z є рівномірно неперервною на H операторнозначною функцією;
- $\{Z'(x) : x \in H\}$ — майже компактна множина;
- $\{(\xi, Z)''(x) : \|\xi\| \leq 1; x \in H\}$ — майже компактна множина.

Необхідні означення наведено. Тепер перейдемо безпосередньо до постановки задачі.

Нехай $j : [0, T] \to (B_C(H))^*$ — відображення, що ставить у відповідність кожній точці відрізку $[0, T]$ додатний істотно нескінченновимірний функціонал. Будемо вважати, що $j(\cdot)$ на цьому відрізку задовольняє умову Ліпшиця: $(\exists\, C > 0)(\forall\, t_1, t_2 \in [0, T] : \| j(t_1) - j(t_2) \| \leq C \,|\, t_1 - t_2 \,|)$. Розглянемо в банаховому просторі X таке диференційне рівняння:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = L^{j(t)} u(t,x) + (Zu)(t,x) + (\lambda \cdot u)(t,x), \quad (1)$$

де Z — стаціонарне векторне поле класу $\mathfrak{A}_0$, а λ — неперервне відображення відрізку $[0, T]$ в $\mathfrak{A}_0$ (при кожному фіксованому $t_0 \in [0, T]$ функція $\lambda(t_0, \cdot)$ належить класу $\mathfrak{A}_0$). Нашою метою є побудова розв'язку задачі Коші на відрізку $[\tau, T]\ (0 \leq \tau < T)$ для рівняння (1) з початковою умовою в точці τ:

$$u(\tau, \cdot) = \varphi(\cdot) \in \mathfrak{A}_0. \quad (2)$$

Також будуть досліджені властивості розв'язку задачі (1)—(2).

Основні результати

У [2] доведено, що задача Коші для рівняння $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = L^{j(t)} u(t,x) + (Zu)(t,x)$ з початковою умовою (2) має до того ж єдиний розв'язок. У [2] також побудовано еволюційну сім'ю для цього рівняння, яку будемо позначати як $\tilde{W}(t, \tau)$. Покладемо за означенням $K(t,s)\varphi = \tilde{W}(t,s)(\lambda(s,\cdot)\varphi)$.

Теорема 1. Задача Коші (1)—(2) на кожному відрізку $[\tau, T]\ (0 \leq \tau < T)$ має і при тому єдиний розв'язок. Відповідна еволюційна сім'я $U(t, \tau)$ обчислюється за формулою

$$U(t,\tau) = \tilde{W}(t,\tau) + \int_\tau^t K(t,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau)dt_1 +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \int_\tau^t \int_\tau^{t_n} \ldots \int_\tau^{t_2} K(t,t_n)K(t_n,t_{n-1}) \ldots K(t_2,t_1) \times$$

$$\times\,\tilde{W}(t_1,\tau)dt_1\ldots dt_n. \qquad (3)$$

Доведення. Розглянемо лінійний простір $C([\tau,T],\,X)$ — простір неперервних функцій, що визначені на відрізку $[\tau,T]$ та набувають значення в X. Впровадимо в просторі норму: якщо $u\in C([\tau,T],\,X)$, покладемо за означенням $|||\,u\,|||=\sup\limits_{t\in[\tau,T]}\|\,u(t,\cdot)\|$. Норму елемента $u\in C([\tau,T],\,X)$ будемо позначати символом $|||\,u\,|||$, щоб відрізняти її від норми $\|u(t_0,\cdot)\|$ функції $u(t_0,\cdot)$ в просторі X. Тепер покажемо, що будь-який розв'язок $u(t,\cdot)$ задачі Коші (1)–(2) є розв'язком наступного інтегрального рівняння в просторі $C([\tau,T],\,X)$:

$$u(t,\cdot)=(\tilde{W}(t,\tau)\varphi)(\cdot)+\int\limits_{\tau}^{t}\tilde{W}(t,s)\,(\lambda(s,\cdot)\,u(s,\cdot))\,ds. \quad (4)$$

Дійсно, розглянемо тотожність $\dfrac{du(s,\cdot)}{ds}=$ $=(L^{j(s)}+Z)u(s,\cdot)+\lambda(s,\cdot)u(s,\cdot)$. Застосувавши до обох частин наведеної рівності обмежений оператор $\tilde{W}(t,s)$ і використовуючи формулу (3.5) глави 2 [5], будемо мати

$$\frac{\partial}{\partial s}(\tilde{W}(t,s)u(s,\cdot))=\tilde{W}(t,s)\,(\lambda(s,\cdot)u(s,\cdot)).$$

Права, а тому й ліва частина наведеної рівності, є неперервною функцію за $s\in[\tau,T]$. Проінтегрувавши цю рівність за s у межах від τ до t і враховуючи, що $\tilde{W}(t,t)=I$ (I — тотожний оператор в X), отримаємо (4). За допомогою теореми Банаха про нерухому точку доведемо, що інтегральне рівняння (4), а отже, і вихідна задача Коші не можуть мати більше одного розв'язку. В просторі $C([\tau,T],\,X)$ розглянемо таке відображення:

$$(Bu)\,(t,\cdot)=(\tilde{W}(t,\tau)\varphi)\,(\cdot)+\int\limits_{\tau}^{t}\tilde{W}(t,s)\,(\lambda(s,\cdot)\,u(s,\cdot))\,ds. \quad (5)$$

Доведемо, що якщо в $C([\tau,T],\,X)$ належним чином вибрати норму, відображення, визначене формулою (5), буде відображенням стиску. В [3] з'ясовано, що $\|\tilde{W}(t,s)\|\le 1$ для всіх $(t,s)\in T_\Delta=\{(t_1,t_2):0\le t_2\le t_1\le T\}$. Звідси для будь-яких $t\in[\tau,T]$ і для будь-яких $u_1,u_2\in C([\tau,T],\,X)$ має місце оцінка

$$\|(Bu_1)\,(t,\cdot)-(Bu_2)\,(t,\cdot)\|_X\le$$

$$\le M\int\limits_{\tau}^{t}\|\,u_1(s,\cdot)-u_2(s,\cdot)\,\|_X\,ds, \qquad (6)$$

де $M=\sup\limits_{\tau\in[0,T]}\|\lambda(\tau,\cdot)\|<+\infty$ внаслідок неперервності λ. Впровадимо в просторі $C([\tau,T],\,X)$ ще одну норму:

$$|||\,u\,|||_2=\max_{\tau\le t\le T}\{\exp\{-k(t-\tau)\}\|u(t,\cdot)\|_X\},$$

де $k>0$ — фіксоване число, яке буде вибране пізніше. З подвійної нерівності

$$\exp\{-k(T-\tau)\}\,|||\,u\,|||\le|||\,u\,|||_2\le|||u|||$$

випливає, що норми $|||\cdot|||$ та $|||\cdot|||_2$ є еквівалентними. Звідси, $C([\tau,T],\,X)$ з нормою $|||\cdot|||_2$ є банаховим простором. З (6) та означення норми $|||\cdot|||_2$ випливає, що

$$\exp\{-k(t-\tau)\}\,\|\,(Bu_1)\,(t,\cdot)-(Bu_2)\,(t,\cdot)\,\|_X\le$$

$$\le M\int\limits_{\tau}^{t}\exp\{-k(t-s)\}\exp\{-k(s-\tau)\}, \qquad (7)$$

де $u\in C([\tau,T],\,X)$, а $k>0$ — фіксоване число, яке буде вибране пізніше. З подвійної нерівності $\exp\{-k(T-\tau)\}\,|||\,u\,|||\le|||\,u\,|||_2\le|||\,u\,|||$ випливає, що норми $|||\cdot|||$ та $|||\cdot|||_2$ є еквівалентними. Звідси, $C([\tau,T],\,X)$ з нормою $|||\cdot|||_2$ є банаховим простором. З (6) та з означення $|||\cdot|||_2$ будемо мати, що

$$\exp\{-k(t-\tau)\}\,\|\,(Bu_1)\,(t,\cdot)-(Bu_2)\,(t,\cdot)\,\|_X\le$$

$$\le M\int\limits_{\tau}^{t}e^{-k(t-s)}e^{-k(s-\tau)}\;\;\|\,u_1(s,\cdot)-u_2(s,\cdot)\,\|_X\;ds\;\le$$

$$\le M\,||||\,u_1-u_2\,|||\int\limits_{\tau}^{t}\exp\{-k(t-s)\}ds=$$

$$=M\,|||\,u_1-u_2\,|||\,\frac{1}{k}(1-\exp\{-k(t-\tau)\})\le$$

$$\le\frac{M}{k}\,|||\,u_1-u_2\,|||_2.$$

Звідси випливає, що $|||\,Bu_1-Bu_2\,|||_2\le$ $\le q\,|||\,u_1-u_2\,|||$, де $q=\dfrac{M}{k}$. Якщо константу k в означенні норми $|||\cdot|||_2$ вибрати так, що $q<1$, то B буде відображенням стиску. Тому інтегральне рівняння (4) та задача Коші (1)–(2) не можуть мати більше одного розв'язку. Як випливає з результатів праці [5], задача Коші (1)–(2) розв'язок має. Звідси, розв'язавши інтегральне рівняння (4), отримаємо розв'язок вихідної задачі Коші.

Введемо в розгляд лінійний оператор A_ξ в просторі $\mathfrak{A}_0$. $\forall \mu \in X : (A_\xi \mu)(x) = \xi(x)\mu(x)$, де ξ – функція класу $\mathfrak{A}_0$. Неважко перевірити, що оператор A_ξ є обмеженим, а його норма дорівнює $\| \xi \|$. Нехай $\chi(t,x) = (\tilde{W}(t,\tau)\varphi)(x)$. Розв'язок (4) будемо шукати як границю: $u(t,\cdot) = \lim\limits_{n\to\infty} (B^n \chi)(t,\cdot)$. Нехай $u \in C([\tau, T], X)$. З'ясуємо, чому дорівнює $(B^n u)(t,\cdot)$. Для цього зауважимо, що $\tilde{W}(t,s)\lambda(s,\cdot)u(s,\cdot) = \tilde{W}(t,s)A_{\lambda(s,\cdot)}(u(s,\cdot)) = K(t,s)u(s,\cdot)$, де за означенням $K(t,s) = \tilde{W}(t,s)A_{\lambda(s,\cdot)}$ – неперервний лінійний оператор у просторі X. В цих позначеннях відображення B буде мати такий вигляд: $(Bu)(t,\cdot) = \chi(t,\cdot) + \int\limits_\tau^t K(t,s)u(s,\cdot)ds$.

За індукцією встановлюється, що

$$\begin{aligned}(B^n u)(t,\cdot) &= \chi(t,\cdot) + \int\limits_\tau^t K(t,t_1)\chi(t_1,\cdot)\,dt_1 + \\ &+ \int\limits_\tau^t \int\limits_\tau^{t_2} K(t,t_2)K(t_2,t_1)\chi(t_1,\cdot)\,dt_1 dt_2 + \ldots + \\ &+ \int\limits_\tau^t \int\limits_\tau^{t_{n-1}} \ldots \int\limits_\tau^{t_2} K(t,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1)\chi(t_1,\cdot)\,dt_1 \ldots dt_{n-1} + \\ &+ \int\limits_\tau^t \int\limits_\tau^{t_n} \ldots \int\limits_\tau^{t_2} K(t,t_n)K(t_n,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1) \times \\ &\times u(t_1,\cdot)dt_1 dt_2 \ldots dt_n. \end{aligned} \tag{8}$$

Отже, розв'язок інтегрального рівняння (4) може бути поданий у вигляді ряду

$$\begin{aligned}u(t,\cdot) &= \chi(t,\cdot) + \int\limits_\tau^t K(t,t_1)\chi(t_1,\cdot)\,dt_1 + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \int\limits_\tau^t \int\limits_\tau^{t_n} \ldots \int\limits_\tau^{t_2} K(t,t_n)K(t_n,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1)u(t_1,\cdot) \times \\ &\times dt_1 dt_2 \ldots dt_n. \end{aligned}$$

Розглянемо сім'ю лінійних операторів

$$\begin{aligned}U(t,\tau) &= \tilde{W}(t,\tau) + \int\limits_\tau^t K(t,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau)\,dt_1 + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \int\limits_\tau^t \int\limits_\tau^{t_n} \ldots \int\limits_\tau^{t_2} K(t,t_n)K(t_n,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau) \times \\ &\times dt_1 \ldots dt_n. \end{aligned} \tag{9}$$

Зараз ми доведемо, що ряд, який знаходиться в правій частині (9), збігається за операторною нормою рівномірно в трикутнику $T_\Delta = \{(t,\tau) : 0 \le \tau \le T\}$:

$$\| K(t,s) \| \le \| \tilde{W}(t,s) \| \cdot \| A_{\lambda(s,\cdot)} \| \le \| A_{\lambda(s,\cdot)} \| = $$
$$= \| \lambda(s,\cdot) \| \le M.$$

Нехай $V_n = \int\limits_\tau^t \int\limits_\tau^{t_n} \ldots \int\limits_\tau^{t_2} K(t,t_n)K(t_n,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1) \times$ $\times \tilde{W}(t_1,\tau)dt_1 dt_2 \ldots dt_n$. За індукцією встановлюється, що $\| V_n \| \le \dfrac{(MT)^n}{n!}$. Звідси робимо висновок, що наш ряд збігається за нормою рівномірно в T_Δ. Зрозуміло, що крім того має місце оцінка

$$\forall (t,\tau) \in T_\Delta : \| U(t,\tau) \| \le \exp\{MT\}. \tag{10}$$

Теорему доведено.

Теорема 2. Для кожного $\varphi \in X$ функція $U(t,\tau)\varphi$ є неперервною в трикутнику T_Δ. Розв'язок задачі Коші (1)–(2) неперервно залежить від початкових даних у тому сенсі, що зі збіжності $\varphi_m \in \mathfrak{A}_0$ до нуля випливає рівномірна за $(t,s) \in T_\Delta$ збіжність до нуля відповідних розв'язків $U(t,s)\varphi_m$.

Доведення. Доведемо спочатку другу властивість. Нехай $\varphi_m \in \mathfrak{A}_0$ та $\varphi_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$. Треба зрозуміти, що $\| U(t,\tau)\varphi_m \| \underset{m\to\infty}{\to} 0$ рівномірно за $(t,\tau) \in T_\Delta$. З (10) випливає, що для всіх $(t,\tau) \in T_\Delta$ та будь-якого натурального m $\| U(t,\tau)\varphi_m \| \le \exp\{MT\} \| \varphi_m \|$. Звідси відразу бачимо, що $\| U(t,\tau)\varphi_m \| \underset{m\to\infty}{\to} 0$ і збіжність є рівномірною за $(t,\tau) \in T_\Delta$.

Тепер будемо доводити, що $\forall \varphi \in X$ функція $U(t,\tau)\varphi$ є неперервною в T_Δ за сукупністю змінних. Як було з'ясовано при доведенні теореми 1, ряд у правій частині (9) збігається рівномірно за $(t,\tau) \in T_\Delta$. Тому достатньо довести сильну неперервність у цьому трикутнику перших двох доданків правої частини (9), а також кожного члена відповідного ряду. Вже згадувалося, що $\tilde{W}(t,\tau)\varphi$ є неперервною в T_Δ. Отже, доводимо неперервність функції $\rho_n(t,\tau) =$

$$= \int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{t_n}\ldots\int_{\tau}^{t_2} K(t,t_n)\ldots K(t_2,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau)\varphi\, dt_1\ldots dt_n$$ за сукупністю змінних $(t,\tau)\in T_\Delta$. Оскільки підінтегральна функція є неперервною, можемо записати $\rho_n(t,\tau)$ як n-кратний інтеграл по відповідній множині $Q_n(t,\tau)$. Тоді

$$\|\rho_n(t+\Delta t,\tau+\Delta\tau)-\rho_n(t,\tau)\|\le$$
$$\le \int_{A_n}\| K(t,t_n)K(t_n,t_{n-1})...K(t_2,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau)\varphi\|d\mathbf{t}+$$
$$+\int_{B_n}\| K(t+\Delta t,t_n)K(t_n,t_{n-1})...K(t_2,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau+\Delta\tau)\varphi\| d\mathbf{t}+$$
$$+\int_{C_n}\| K(t+\Delta t,t_n)K(t_n,t_{n-1})...K(t_2,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau+\Delta\tau)\varphi-$$
$$-K(t,t_n)K(t_n,t_{n-1})...K(t_2,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau)\varphi\|d\mathbf{t},$$

де

$$A_n=\frac{Q_n(t,\tau)}{Q_n(t+\Delta t,\tau+\Delta\tau)},$$
$$B_n=\frac{Q_n(t+\Delta t,\tau+\Delta\tau)}{Q_n(t,\tau)},$$
$$C_n=Q_n(t+\Delta t,\tau+\Delta\tau)\cap Q_n(t,\tau).$$

Звідси маємо

$$\|\rho_n(t+\Delta t,\tau+\Delta\tau)-\rho_n(t,\tau)\|\le$$
$$\le M^n\int_{Q_n(t,\tau)\Delta Q_n(t+\Delta t,\tau+\Delta\tau)} dt_1\ldots dt_n+$$
$$+\int_0^T\int_0^T\ldots\int_0^T\| K(t+\Delta t,t_n)K(t_n,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1)\times$$
$$\times\tilde{W}(t_1,\tau+\Delta\tau)\varphi-K(t,t_n)K(t_n,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1)\times$$
$$\times\tilde{W}(t_1,\tau)\varphi\|\,dt_1dt_2\ldots dt_n. \quad (11)$$

Оцінимо перший доданок у правій частині (11). Нехай $D_k=Q_k(t,\tau)\Delta\, Q_k(t+\Delta t,\tau+\Delta\tau)$, тоді

$$\int_{D_n} dt_1\ldots dt_n=\int_{D_{n-1}} dt_2dt_3\ldots dt_n\int_{\tau+\Delta\tau}^{t_2} dt_1\le$$
$$\le T\int_{D_{n-1}} dt_2dt_3\ldots dt_n.$$

Якщо позначити через μ_n міру Жордана в $\mathbb{R}^n$, із врахуванням попередньої нерівності будемо мати

$$\mu_n(Q_n(t,\tau)\Delta Q_n(t+\Delta t,\tau+\Delta\tau))\le$$
$$\le T\mu_{n-1}(Q_{n-1}(t,\tau)\Delta Q_{n-1}(t+\Delta t,\tau+\Delta\tau))\le$$
$$\le T^2\mu_{n-2}(Q_{n-2}(t,\tau)\Delta Q_{n-2}(t+\Delta t,\tau+\Delta\tau))\le\ldots$$
$$\ldots\le T^{n-2}\mu_2(Q_2(t,\tau)\Delta Q_2(t+\Delta t,\tau+\Delta\tau)). \quad (12)$$

Нескладно зрозуміти, що $\mu_2(Q_2(t,\tau)\Delta\, Q_2\times\times(t+\Delta t,\tau+\Delta\tau))\xrightarrow[(\Delta t,\Delta\tau)]{}0$. Тому, враховуючи (12), будемо мати, що $\mu_n(Q_n(t,\tau)\Delta\, Q_n(t+\Delta t,$ $\tau+\Delta\tau))\xrightarrow[(\Delta t,\Delta\tau)]{}0$, тобто перший доданок правої частини (11) прямує до нуля. Тепер оцінюватимемо другий доданок в (11). Доведемо, що $\| K(t+\Delta t,t_n)K(t_n,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau+\Delta\tau)\varphi-$ $-K(t,t_n)K(t_n,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau)\varphi\|$ прямує до нуля, коли $(\Delta t,\Delta\tau)\to(0,0)$ рівномірно за $(t_1,t_2,\ldots,t_n)\in[0,T]\times[0,T]\times\ldots\times[0,T]$. Це дасть змогу зробити граничний перехід під знаком відповідного інтеграла і неперервність $\rho_n(t,\tau)$ в трикутнику буде повністю доведена:

$$\| K(t+\Delta t,t_n)K(t_n,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau+\Delta\tau)\varphi\ -$$
$$-K(t,t_n)K(t_n,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau)\varphi\|\le$$
$$\le\| K(t+\Delta t,t_n)K(t_n,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau+\Delta\tau)\varphi-$$
$$-K(t+\Delta t,t_n)K(t_n,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau)\varphi\|+$$
$$+\| K(t+\Delta t,t_n)K(t_n,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau)\varphi-$$
$$-K(t,t_n)K(t_n,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau)\varphi\|\le$$
$$\le M^n\cdot\|\tilde{W}(t_1,\tau+\Delta\tau)\varphi-\tilde{W}(t_1,\tau)\varphi\|+$$
$$+\| K(t+\Delta t,t_n)K(t_n,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau)\varphi-$$
$$-K(t,t_n)K(t_n,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau)\varphi\|. \quad (13)$$

У [3] з'ясовано, що функція $\tilde{W}(t_1,\tau)\varphi$ є неперервною в трикутнику T_Δ, а тому і рівномірно неперервною (внаслідок компактності трикутника). Звідси отримуємо

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):|\Delta\tau|<\delta\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\|\tilde{W}(t_1,\tau+\Delta\tau)\varphi-\tilde{W}(t_1,\tau)\varphi\|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (14)$$

для всіх $t_1\in[0,T]$. Оператор $K(t_n,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1)\times$ $\times\tilde{W}(t_1,\tau)$ є сильно неперервним за $(t_1,t_2,\ldots,t_n)\in$ $\in[0,T]\times[0,T]\times\ldots\times[0,T]$ на просторі X (як композиція сильно неперервних операторів). Множина

$L = \{K(t_n, t_{n-1}) \ldots K(t_2, t_1)\tilde{W}(t_1, \tau)\varphi \mid (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in P\}$ є компактною як неперервний образ компакта $P = [0,T] \times [0,T] \times \ldots \times [0,T]$ (точку (t,τ) ми вважаємо фіксованою). $K(t + \Delta t, t_n) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{s} K(t, t_n)$ рівномірно за $t_n \in [0,T]$, оскільки $K(t,t_n)$ є рівномірно неперервною за $(t,t_n) \in T_\Delta$. Відомо, що така збіжність буде рівномірною на компакті L. Тобто

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \,:\, |\Delta t| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|K(t + \Delta t, t_n)\zeta - K(t,t_n)\zeta\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всіх $t_n \in [0,T]$ і для всіх $\zeta \in L$. Звідси відразу випливає, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : |\Delta t| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \| K(t + \Delta t, t_n) \ldots K(t_2, t_1)\tilde{W}(t_1, \tau)\varphi -$$

$$- K(t,t_n)K(t_n,t_{n-1}) \ldots K(t_2,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau)\varphi\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всіх $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in [0,T] \times [0,T] \times \ldots \times [0,T]$. Тому, враховуючи (13) та (14), робимо висновок, що вираз

$$\| K(t + \Delta t, t_n)K(t_n, t_{n-1}) \ldots K(t_2, t_1)\tilde{W}(t_1, \tau + \Delta\tau)\varphi -$$

$$- K(t,t_n)K(t_n,t_{n-1}) \ldots K(t_2,t_1)\tilde{W}(t_1,\tau)\varphi \|$$

прямує до нуля, коли $(\Delta t, \Delta\tau) \to (0,0)$ рівномірно за $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in [0,T] \times [0,T] \times \ldots \times [0,T]$. Тож неперервність $\rho_n(t,\tau)$, а тому й сильна не перервність $U(t,\tau)$ в трикутнику повністю доведена.

Перейдемо тепер до другої властивості. Нехай $\varphi_m \in \mathfrak{A}_0$ та $\| \varphi_m \| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$. Нам треба довести, що $\| U(t,\tau)\varphi_m \| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$ рівномірно за $(t,\tau) \in T_\Delta$. З (10) випливає, що для будь-якого $(t,\tau) \in T_\Delta$ та будь-якого натурального m $\|U(t,\tau)\varphi_m\| \le \exp\{MT\} \|\varphi_m\|$. Тоді зрозуміло, що $\| U(t,\tau)\varphi_m \| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$ та збіжність є рівномірною за $(t,\tau) \in T_\Delta$. Теорему повністю доведено.

Висновки

У статті побудовано еволюційну сім'ю для рівняння (1). Доведено, що задача Коші (1)–(2) є рівномірно коректною.

Методика, яку автор застосував для побудови еволюційної сім'ї рівняння (1), може використовуватися для побудови еволюційних сімей багатьох нестаціонарних істотно нескінченновимірних рівнянь.

Для подальших досліджень можна запропонувати кілька цікавих напрямів. По-перше, можна розглядати еволюційні істотно нескінченновимірні рівняння на поверхнях скінченої та нескінченної корозмірності. По-друге, мало дослідженими залишаються питання, пов'язані зі стійкістю розв'язків нестаціонарних істотно нескінченновимірних рівнянь. Також цікавим буде дослідження систем диференціальних рівнянь з операторами типу Лапласа–Леві. Чекають на дослідження рівняння, що не розв'язні відносно похідної.

1. *Аккарди Л., Смолянов О.Г.* Представления лапласианов Леви и связанных с ними полугрупп и гармонических функций // Докл. РАН. – **384**. – 2002. – С. 295–301.
2. *Мальцев А.Ю.* Еволюційні суттєво нескінченновимірні рівняння // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 2. – С. 214–220.
3. *Мальцев А.Ю.* Властивості розв'язків задачі Коші для еволюційних суттєво нескінченновимірних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 5. – С. 656–662.
4. *Богданский Ю.В.* Задача Коши для существенно бесконечномерного параболического уравнения с переменными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 663–670.
5. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
14 березня 2013 року