УДК 517.977.56

М.М. Копець

ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ РІККАТІ В ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Riccati equations occur when solving the problems of dynamics of processes in continuous environments, problems of the theory of heat conductivity and diffusion, problems of the theory of optimal control. In case of systems with lumped parameters it is necessary to investigate the usual matrix differential Riccati equations. There are integro-differential Riccati equations for mathematical models of systems with the distributed parameters. In the majority of monographs devoted to the theory of optimum control by systems with distributed parameters, the differential Riccati equations are not considered at all. In the given article the linear-quadratic problem of optimal control is investigated by heat conductivity process. By means of the method of Lagrange multipliers we obtain necessary optimality conditions. The uniqueness of optimal control is proved. Firstly for such problem we use Dirac delta-function and obtain the integro-differential Riccati equations. The formula for calculating the solution of this equation is proposed. By means of the given formula the optimum control is presented in the closed form.

Вступ

Диференціальне рівняння Ріккаті – це диференціальне рівняння першого порядку, права частина якого є квадратним тричленом відносно невідомої функції. Такою назвою це рівняння зобов'язане статті італійського математика Якопо Франческо Ріккаті, яка була опублікована в 1724 р. Незважаючи на минулі майже три століття, інтерес до рівняння Ріккаті нітрохи не слабшає. Перш за все, до рівняння Ріккаті приводять задачі оптимального керування, теорії диференціальних ігор, побудови оптимальних фільтрів Калмана–Бюсі, двоточкові крайові задачі із використанням методу прогонки. Також рівняння Ріккаті з'являються при розв'язуванні задач динаміки процесів у суцільних середовищах, теорії теплопровідності і дифузії, знаходження розв'язків матричних телеграфних рівнянь. В основному в перерахованих вище випадках, як правило, доводиться досліджувати звичайні матричні диференціальні рівняння Ріккаті, в яких невідома функція залежить тільки від однієї змінної. Така ситуація виникає тоді, коли розглядаються системи із зосередженими параметрами. Саме для цих випадків основні властивості матричних диференціальних рівнянь Ріккаті вивчені доволі повно. Для математичних моделей систем із розподіленими параметрами виникають диференціальні рівняння Ріккаті з частинними похідними, інтегро-диференціальні рівняння Ріккаті, які менше досліджені порівняно зі звичайними матричними диференціальними рівняннями Ріккаті. Необхідно зазначити, що в більшості монографій, присвячених теорії оптимального керування системами із розподіленими параметрами, диференціальні рівняння Ріккаті зовсім не розглядаються [1–3]. У цій статті зроблено спробу деякою мірою усунути згадану вище невідповідність.

Постановка задачі

Розглядається задача мінімізації функціонала

$$I(u,z) = \frac{1}{2}\int_0^l z^2(t_1,x)dx + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [z^2(t,x)+u^2(t,x)]dxdt \qquad (1)$$

на розв'язках такої крайової задачі:

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x); \qquad (2)$$

$$z(t_0,x) = z_0(x),\ z(t,0)=0,\ z(t,l)=0, \qquad (3)$$

де дійсні числа $t_0 \ge 0$, $t_1 > t_0$, $l > 0$ і функція $z_0(x) \in L_2(0,l)$ задані. Функція $u(t,x)$ називається допустимим керуванням, якщо $u(t,x) \in L^2(\Omega)$, де множина Ω задана так: $\Omega = \{(t,x) : t \in [t_0,t_1], x \in [0,l]\}$. Для фіксованого допустимого керування $u(t,x)$ розв'язком $z(t,x)$ задачі (2)–(3) вважається узагальнений розв'язок $z(t,x) \in W_2^{1,0}(\Omega)$. Допустиме керування $u^0(t,x)$, на якому реалізується мінімум функціонала (1), називається оптимальним керуванням.

Необхідні умови оптимальності

Необхідні умови оптимальності для сформульованої вище задачі оптимізації можна знайти за допомогою методу множників Лагранжа [3]. З цією метою розглянемо такий допоміжний функціонал:

$$J(p,u,z)=\frac{1}{2}\int_0^l z^2(t_1,x)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [z^2(t,x)+u^2(t,x)]\,dxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,x)\left[\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}+u(t,x)-\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}\right]dxdt, \quad (4)$$

де функція $p(t,x)$ – множник Лагранжа. В такий спосіб задача (1)–(3) на умовний екстремум зводиться до задачі на мінімізації функціонала (4) із врахуванням умов (3). Далі, користуючись стандартним способом варіаційного числення, знайдемо приріст ΔJ функціонала (4):

$$\Delta J = J(p+\varepsilon\delta p, u+\varepsilon\delta u, z+\varepsilon\delta z)-J(p,u,z). \quad (5)$$

У розгорнутому вигляді співвідношення (5) запишемо таким чином:

$$\Delta J=\frac{1}{2}\int_0^l [z(t_1,x)+\varepsilon\delta z(t_1,x)]^2dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [[z(t,x)+\varepsilon\delta z(t,x)]^2+$$

$$+[u(t,x)+\varepsilon\delta u(t,x)]^2]\,dxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [p(t,x)+\varepsilon\delta p(t,x)]\left[\left[\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\delta z(t,x)}{\partial x^2}\right]+\right.$$

$$\left.+u(t,x)+\varepsilon\delta u(t,x)-\left[\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\delta z(t,x)}{\partial t}\right]\right]dxdt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l z^2(t_1,x)dx-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [z^2(t,x)+u^2(t,x)]\,dxdt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,x)\left[\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}+u(t,x)-\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}\right]dxdt. \quad (6)$$

Після очевидних спрощень (розкриття дужок, інтегрування частинами та зведення подібних членів) замість рівності (6) отримаємо таке співвідношення:

$$\Delta J=\varepsilon\int_0^l \big[z(t_1,x)-p(t_1,x)\big]\delta z(t_1,x)\,dx+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[\left[z(t,x)+\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}+\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}\right]\delta z(t,x)+\right.$$

$$\left.+[u(t,x)+p(t,x)]\delta u(t,x)\right]dxdt+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \delta p(t,x)\left[\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}+u(t,x)-\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}\right]dxdt+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left[\int_0^l [\delta z(t_1,x)]^2\,dx+\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [[\delta z(t,x)]^2+[\delta u(t,x)]^2]\,dxdt\right]. \quad (7)$$

При отриманні співвідношення (7) враховано, що $\frac{\partial^2\delta z(t,x)}{\partial x^2}+\delta u(t,x)-\frac{\partial\delta z(t,x)}{\partial t}=0$ і зроблено припущення, що $p(t,0)=p(t,l)=0.$ Беручи до уваги всі згадані вище зауваження, приходимо до такого висновку.

Теорема 1. Оптимальне керування в задачі (1)–(3) єдине і визначається зі співвідношень

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z(t,x)}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}+u(t,x),\\ z(t,x)=z_0(x),\, z(t,0)=0,\, z(t,l)=0,\\ \dfrac{\partial p(t,x)}{\partial t}=-\dfrac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}-z(t,x),\\ p(t_1,x)=z(t_1,x),\, p(t,0)=0,\, p(t,l)=0,\\ u(t,x)=-p(t,x),\end{cases} \quad (8)$$

де функція $p(t,x)$ – множник Лагранжа.

Доведення. Необхідна умова екстремуму функціонала (4) – це рівність нулю його першої варіації. Ця умова буде виконана, якщо мають місце такі співвідношення:

$$z(t_1,x)-p(t_1,x)=0,$$

$$z(t,x)+\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}+\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}=0,$$

$$p(t,0) = p(t,l) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x) - \frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = 0,$$

$$u(t,x) + p(t,x) = 0.$$

Якщо до цих рівностей приєднати ще умови (3), то отримаємо систему співвідношень (8). Єдиність оптимального керування можна довести за допомогою таких міркувань. Припустимо, що існує ще одне оптимальне керування $\bar{u}(t,x) = u(t,x) + \varepsilon\delta u(t,x)$. Тоді згідно зі зробленим припущенням маємо рівність $\Delta J = 0$. Оскільки для обох керувань $u(t,x)$ і $\bar{u}(t,x)$ мають місце співвідношення (8), то безпосередньо із рівності (7) отримаємо

$$\int_0^l [\delta z(t_1,x)]^2 dx + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [[\delta z(t,x)]^2 + [\delta u(t,x)]^2]\,dxdt = 0.$$

Це можливо тільки в тому випадку, коли $\delta u(t,x) = 0,$ а це означає, що $\bar{u}(t,x) = u(t,x).$

Виведення інтегро-диференціального рівняння Ріккаті

Нехай існує залежність $p(t,x) = \int_0^l R(t,x,s) \times$ $\times\, z(t,s)\,ds$ між функціями $p(t,x)$ і $z(t,x)$, які задовольняють співвідношення (8). Тоді мають місце такі співвідношення:

$$\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} = \int_0^l \frac{\partial^2 R(t,x,s)}{\partial x^2} z(t,s)ds, \quad \frac{\partial p(t,x)}{\partial t} =$$

$$= \int_0^l \left[\frac{\partial R(t,x,s)}{\partial t} z(t,s) + R(t,x,s)\frac{\partial z(t,s)}{\partial t}\right] ds. \qquad (9)$$

Безпосередньо із системи (8) знаходимо

$$\frac{\partial z(t,s)}{\partial t} = \frac{\partial^2 z(t,s)}{\partial s^2} - p(t,s)$$

або

$$\frac{\partial z(t,s)}{\partial t} = \frac{\partial^2 z(t,s)}{\partial s^2} - \int_0^l R(t,s,\lambda)\, z(t,\lambda)d\lambda.$$

Із врахуванням цього співвідношення другу рівність (9) можна переписати так:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \int_0^l \left[\frac{\partial R(t,x,s)}{\partial t} z(t,s) + R(t,x,s)\frac{\partial^2 z(t,s)}{\partial s^2} - \right.$$

$$\left. - R(t,x,s)\int_0^l R(t,x,s)\, z(t,\lambda)d\lambda\right] ds. \qquad (10)$$

Оскільки зі співвідношень $p(t,0) = p(t,l) = 0$ безпосередньо маємо $R(t,0,s) = R(t,l,s) = 0,$ то для симетрії припускаємо, що також $R(t,x,0) =$ $= R(t,x,l) = 0.$ Тоді має місце наступна рівність:

$$\int_0^l R(t,x,s)\frac{\partial^2 z(t,s)}{\partial s^2} ds = \int_0^l \frac{\partial^2 R(t,x,s)}{\partial s^2} z(t,s)\,ds. \ (11)$$

Крім того, очевидним є таке співвідношення:

$$\int_0^l\int_0^l R(t,x,s)R(t,s,\lambda)\, z(t,\lambda)d\lambda\, ds =$$

$$= \int_0^l\int_0^l R(t,x,s)R(t,s,\lambda)\, z(t,\lambda)ds\, d\lambda =$$

$$= \int_0^l\int_0^l R(t,x,\lambda)R(t,\lambda,s)\, d\lambda\, z(t,s)ds. \qquad (12)$$

Беручи до уваги співвідношення (11) та (12), рівність (10) перепишемо таким чином:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \int_0^l \left[\frac{\partial R(t,x,s)}{\partial t} + \frac{\partial^2 R(t,x,s)}{\partial s^2} - \right.$$

$$\left. - \int_0^l R(t,x,\lambda)R(t,\lambda,s)d\lambda\right] z(t,s)ds. \qquad (13)$$

З іншого боку, на підставі рівності $\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -z(t,x) - \frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}$ знаходимо

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \int_0^l \left[-\delta(x-s) - \frac{\partial^2 R(t,x,s)}{\partial x^2}\right] z(t,s)ds, \qquad (14)$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака. Крім того, рівність $p(t_1,x) = z(t_1,x)$ приводить до співвідношення $R(t_1,x,s) = \delta(x-s)$. Порівнюючи співвідношення (13) і (14), приходимо до такого твердження.

Теорема 2. Функція $R(t,x,s)$ є розв'язком інтегро-диференціального рівняння

$$\frac{\partial R(t,x,s)}{\partial t}+\frac{\partial^2 R(t,x,s)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R(t,x,s)}{\partial s^2}-$$

$$-\int_0^l R(t,x,\lambda)R(t,\lambda,s)\,d\lambda+\delta(x-s)=0 \qquad (15)$$

та задовольняє додатковим умовам

$$R(t_1,x,s)=\delta(x-s),\, R(t,x,0)=0,$$
$$R(t,x,l)=0,\, R(t,0,s)=0,\, R(t,l,s)=0. \qquad (16)$$

Побудова розв'язку інтегро-диференціального рівняння Ріккаті

Функцію $R(t,x,s)$ шукаємо у вигляді

$$R(t,x,s)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}r_{n,n}(t)\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ns}{l}. \qquad (17)$$

Очевидно, що вона задовольняє умовам $R(t,x,0)=0$, $R(t,x,l)=0$, $R(t,0,s)=0$, $R(t,l,s)=0$. Із рівності $R(t_1,x,s)=\delta(x-s)$ маємо $r_{n,n}(t_1)=1$. Далі знаходимо

$$\frac{\partial R(t,x,s)}{\partial t}=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dr_{n,n}(t)}{dt}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ns}{l}, \qquad (18)$$

$$\frac{\partial^2 R(t,x,s)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 R(t,x,s)}{\partial s^2}=$$

$$=-\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 r_{n,n}(t)\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ns}{l}, \qquad (19)$$

$$\int_0^l R(t,x,\lambda)R(t,\lambda,s)\,d\lambda=$$

$$=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}r_{n,n}^2(t)\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ns}{l}, \qquad (20)$$

$$\delta(x-s)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ns}{l}. \qquad (21)$$

Із врахуванням співвідношень (18)–(21) безпосередньо із рівняння (15) для функцій $r_{n,n}(t)$ отримаємо наступну нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь Ріккаті:

$$\frac{dr_{n,n}(t)}{dt}-2\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 r_{n,n}(t)-r_{n,n}^2(t)+1=0,$$

$$r_{n,n}(t_1)=1,\; n=1,2,\ldots \qquad (22)$$

Кожному рівнянню $\frac{dr_{n,n}(t)}{dt}-2\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2\times$ $\times\, r_{n,n}(t)-r_{n,n}^2(t)+1=0$ системи (22) можна поставити у відповідність матрицю

$$H_n=\begin{pmatrix}-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 & -1\\ -1 & \left[\frac{\pi n}{l}\right]^2\end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Характеристичне рівняння для H_n має вигляд $\lambda^2-1-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^4=0$. Корені цього рівняння обчислюються за формулами $\lambda_{n,1}=-\sqrt{\left[\frac{\pi n}{l}\right]^4+1}$ і $\lambda_{n,2}=\sqrt{\left[\frac{\pi n}{l}\right]^4+1}$. Легко перевірити, що має місце співвідношення

$$e^{H_n t}=\begin{pmatrix}S_{11}(t) & S_{12}(t)\\ S_{21}(t) & S_{22}(t)\end{pmatrix},$$

де функції $S_{ij}(t)$ задані таким чином:

$$S_{11}(t)=\cosh\lambda_n t-\frac{a_n}{\lambda_n}\sinh\lambda_n t,\; S_{12}(t)=-\frac{\sinh\lambda_n t}{\lambda_n},$$

$$S_{21}(t)=-\frac{\sinh\lambda_n t}{\lambda_n},\; S_{22}(t)=\cosh\lambda_n t+\frac{a_n}{\lambda_n}\sinh\lambda_n t,$$

де введено позначення $a_n=\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2$, $\lambda_n=$ $=\sqrt{\left[\frac{\pi n}{l}\right]^4+1}$.

Далі, використовуючи спосіб, аналогічний описаному в [4, 5], легко знаходимо вираз для $r_{n,n}(t)$:

$$r_{n,n}(t)=\frac{S_{11}(t_1-t)-S_{21}(t_1-t)}{S_{22}(t_1-t)-S_{12}(t_1-t)}=$$

$$=\frac{\cosh\lambda_n(t_1-t)-\frac{a_n}{\lambda_n}\sinh\lambda_n(t_1-t)+\frac{\sinh\lambda_n(t_1-t)}{\lambda_n}}{\cosh\lambda_n(t_1-t)+\frac{a_n}{\lambda_n}\sinh\lambda_n(t_1-t)+\frac{\sinh\lambda_n(t_1-t)}{\lambda_n}}=$$

$$=\frac{\lambda_n\cosh\lambda_n(t_1-t)-(a_n-1)\sinh\lambda_n(t_1-t)}{\lambda_n\cosh\lambda_n(t_1-t)+(a_n+1)\sinh\lambda_n(t_1-t)},$$

$$n=1,2,\ldots \qquad (23)$$

Підсумовуючи наведені вище міркування, приходимо до наступного висновку.

Теорема 3. Оптимальне керування в задачі (1)–(3) має вигляд $u(t,x) = -\int_0^l R(t,x,s)\,z(t,s)ds$, де функція $R(t,x,s)$ має вигляд (17), функції $r_{n,n}(t)$ задані співвідношеннями (23), функція $z(t,s)$ є розв'язком інтегро-диференціального рівняння

$$\frac{\partial z(t,s)}{\partial t} = \frac{\partial^2 z(t,s)}{\partial s^2} - \int_0^l R(t,s,\lambda)\,z(t,\lambda)d\lambda$$

та задовольняє додатковим умовам

$$z(t_0,s) = z_0(s),\ \ z(t,0) = 0,\ z(t,l) = 0.$$

Висновки

У статті розглянуто лінійно-квадратичну задачу оптимального керування процесом теплопровідності. За допомогою методу множників Лагранжа отримано необхідні умови оптимальності. Встановлено умови, що забезпечують єдиність оптимального керування.

Вперше для такої задачі з використанням дельта-функції Дірака отримано інтегро-диференціальне рівняння Ріккаті. Запропоновано формулу для обчислення розв'язку цього рівняння. Використання отриманої формули дає можливість представити оптимальне керування в явній формі.

Тема, розглянута у цій статті, безумовно, є доволі перспективною для подальших досліджень. Значний інтерес становить вивчення властивостей функцій $r_{n,n}(t)$.

1. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965. – 476 с.
2. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
3. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1977. – 480 с.
4. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. – М.: Наука, 1971. – 396 с.
5. *D.S. Naidu,* Optimal control systems (Electrical engineering textbook series). – Boka Raton–London–New York–Washington: CRC PRESS, D.C. – 2003. – 434 p.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
28 лютого 2013 року