УДК 519.21

Б.М. Жураковський, О.В. Іванов

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРІОДОГРАМНИХ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ МОДУЛЬОВАНОГО МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО СИГНАЛУ

The problem of detection of hidden periodicities is considered in the paper. In the capacity of useful signal model the modulated almost periodic signal is taken observed on the background of random noise being the local functional of Gaussian strongly dependent stationary process. For estimation of unknown amplitude and angular frequency of modulated signal periodogram estimators are chosen. Sufficient conditions on consistency and asymptotic normality of the estimators are obtained. The exact form of limiting normal distribution is found. To obtain the main result there were used limit theorems of random processes, weak convergence of a family of measures to the spectral measure of a regression function, etc. The novelty, compared with the known results in the theory of periodogram estimator in observation models on weakly dependent noise, is assuming that the random noise is a local functional of Gaussian strongly dependent stationary process.

Вступ

Виявлення прихованих періодичностей – це задача, яка має довгу історію, розпочату Лагранжем у XVIII ст. У сучасному статистичному розумінні виявлення прихованих періодичностей – це оцінювання невідомих амплітуд і кутових частот, взагалі кажучи, суми гармонічних коливань, що спостерігаються на фоні випадкового шуму, який маскує ці коливання.

У роботі задача виявлення прихованих періодичностей розв'язується у випадку, коли амплітудно та частотно модульований майже періодичний сигнал спостерігається на фоні випадкового шуму, який є локальним функціоналом від гауссового стаціонарного процесу із сильною залежністю, а як оцінки невідомих параметрів вибрані періодограмні оцінки.

Існує велика бібліографія з цього питання, зокрема праці [1–5] тощо. До того ж з'являються нові публікації на тему виявлення прихованих періодичностей, які стосуються різноманітних галузей знань, зокрема астрономії [6, 7], фізики та геофізики [8–10], біології [11], кліматології [12] тощо.

Результати, що містяться в цій роботі, узагальнюють відповідні результати П.С. Кнопова [13], отримані для моделі зі слабкозалежним випадковим шумом.

Постановка задачі

Мета статті полягає в наведенні достатніх умов асимптотичної нормальності консистентних періодограмних оцінок амплітуди та кутової частоти модульованого майже періодичного сигналу в моделі спостереження із сильнозалежним випадковим шумом.

Вихідні дані

Нехай спостерігається випадковий процес

$$X(t) = A_0\varphi(\omega_0 t) + \varepsilon(t),\ t \in [0,T], \tag{1}$$

де $\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}^1$, причому $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k > 0$ при $k > 0$, $a_{-k} = \bar{a}_k$, $\lambda_{-k} = -\lambda_k$, $|\lambda_l - \lambda_k| \geq \Delta > 0$ при $l \neq k$ з деяким фіксованим $\Delta > 0$. Якщо $a_k = \beta_k + i\gamma_k$, $k \geq 1$, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k| < +\infty$, то функція φ є сумою константи a_0 і збіжного ряду гармонічних коливань:

$$\varphi(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(2\beta_k \cos\lambda_k t - 2\gamma_k \sin\lambda_k t),\ t \in \mathbb{R}^1.$$

Будемо також вважати, що $A_0 > 0$, $\omega_0 \in (\underline{\omega}, \overline{\omega})$, $0 < \underline{\omega} < \overline{\omega} < \infty$, а майже-періодична функція φ задовольняє умову

M. Існує $i_0 > 0$ таке, що $|a_{i_0}| > |a_i|, i \neq \pm i_0$.

Відносно шуму ε припустимо, що

A1. $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$ є локальним функціоналом від гауссового стаціонарного процесу $\xi(t)$, тобто $\varepsilon(t) = G(\xi(t))$, $G(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$ – борелева функція, причому $E\varepsilon(0) = 0, E\varepsilon^2(0) < \infty$.

A2. $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$ є дійсним неперервним у середньому квадратичному вимірним стаціонарним гауссовим процесом, який визначено на ймовірнісному просторі (Ω, F, P), $E\xi(0) = 0$. Припустимо також, що виконується одна з двох умов:

А3. Коваріаційна функція (к.ф.) процесу $\xi(t)$ має вигляд $E\xi(t)\xi(0)=B(t)=L(|t|)|t|^{-\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$, де $L(t), t\geq 0$, – неспадна повільнозмінна на нескінченності функція, $E\xi^2(0)= = B(0)=1$.

А4. К.ф. процесу $\xi(t)$ має вигляд $B(t)= =\cos\psi t(1+t^2)^{-\alpha/2}$, $\alpha\in(0,1)$, $\psi>0$ – деяке число, $\psi\neq\lambda_{i_0}\omega_0$.

Припустимо, що для функції $G(x)$ з умови А1 величини $C_1(G)\neq 0$ або $C_1(G)=\ldots= =C_{m-1}(G)=0$, $C_m(G)\neq 0$, де $C_k(G)= =\int_{-\infty}^{+\infty}G(x)H_k(x)\varphi(x)\,dx$, $k\geq 0$. Тоді число $m\geq 1$ називають ермітовим рангом функції G.

Стосовно функції $G(\cdot)$ з умови А1 припустимо також, що

B1. Виконано нерівність $m\alpha>1$, де α – параметр к.ф. B.

Нам знадобиться результат, доведений у [14].

Лема 1. Якщо виконуються умови А1, А2, В1, а також А3 або А4, то

$$E\left(\sup_{\lambda\in\mathbb{R}^1}\frac{1}{T}\left|\int_0^T e^{-i\lambda t}\varepsilon(t)\,dt\right|\right)^2\to 0,\ T\to\infty.$$

Розглянемо функціонал

$$Q_T(\omega)=\left|\frac{2}{T}\int_0^T X(t)\,e^{i\omega t}dt\right|^2.$$

Нехай $\omega_T\in[\lambda_{i_0}\underline{\omega},\lambda_{i_0}\overline{\omega}]$ – таке значення ω, для якого $Q_T(\omega_T)=\max_{\omega\in[\lambda_{i_0}\underline{\omega},\lambda_{i_0}\overline{\omega}]}Q_T(\omega)$. Періодограмною оцінкою частоти ω_0 назвемо випадкову величину (в.в.) ω_T, а періодограмною оцінкою амплітуди A_0 – в.в. $\dfrac{1}{2|a_{i_0}|}Q_T^{1/2}(\omega_T)$.

Теорема 1. Якщо виконуються умови леми 1 та М, то маємо

$$\frac{\omega_T}{\lambda_{i_0}}\xrightarrow{P}\omega_0,\ T\to\infty.$$

Д о в е д е н н я. При фіксованому ω розглянемо поведінку при $T\to\infty$ величини

$$Q_T(\omega)=\frac{4A_0^2}{T^2}\left|\int_0^T\varphi(\omega_0 t)e^{i\omega t}dt\right|^2+\delta_T(\omega),$$

де

$$\delta_T(\omega)=\frac{4}{T^2}\left|\int_0^T\varepsilon(t)e^{i\omega t}dt\right|^2+$$

$$+\frac{8A_0}{T^2}\mathrm{Re}\left\{\int_0^T\varphi(\omega_0 t)e^{i\omega t}dt\int_0^T\varepsilon(t)e^{-i\omega t}dt\right\}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{T}\left|\int_0^T\varphi(\omega_0 t)e^{i\omega t}dt\right|\leq\frac{1}{T}\int_0^T|\varphi(\omega_0 t)|\,dt=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{i\lambda_k t}dt\leq\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|\leq C<\infty,$$

то в силу леми 1 $\xi_{1T}=\sup_{\omega\in\mathbb{R}^1}|\delta_T(\omega)|\xrightarrow{P}0$ при $T\to\infty$.

Позначимо

$$\Phi_T(\omega_0,\omega)=\frac{2A_0}{T}\int_0^T\varphi(\omega_0 t)e^{-i\omega t}dt=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2A_0}{T}a_k\int_0^T e^{i(\omega_0\lambda_k-\omega)t}dt.$$

Запишемо

$$P\{|\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0|\geq\delta\}=P\{|\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0|\geq\delta;$$

$$Q_T(\omega_T)\geq Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0)\}\leq$$

$$\leq P\left\{\sup_{|\omega-\lambda_{i_0}\omega_0|\geq\delta}|\Phi_T(\omega_0,\omega)|^2\geq Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0)-\xi_{1T}\right\}.$$

Тепер маємо

$$Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0)=|\Phi_T(\omega_0,\lambda_{i_0}\omega_0)|^2+I_T(\lambda_{i_0}\omega_0)\geq$$

$$\geq|\Phi_T(\omega_0,\lambda_{i_0}\omega_0)|^2-|I_T(\lambda_{i_0}\omega_0)|\geq$$

$$\geq|\Phi_T(\omega_0,\lambda_{i_0}\omega_0)|^2-\xi_{1T}.$$

Звідси, для будь-якого $\varepsilon>0$ виконується

$$P\{|\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0|\geq\delta\}\leq P\left\{\sup_{|\omega-\lambda_{i_0}\omega_0|\geq\delta}|\Phi_T(\omega_0,\omega)|^2\geq\right.$$

$$\left.\geq |\Phi_T(\omega_0, \lambda_{i_0}\omega_0)|^2 - 2\varepsilon\right\} + P\{\xi_{1T} \geq \varepsilon\} = P_1 + P_2.$$

Розглянемо нерівність

$$\sup_{|\omega - \lambda_{i_0}\omega_0| \geq \delta} |\Phi_T(\omega_0, \omega)|^2 \geq$$

$$\geq |\Phi_T(\omega_0, \lambda_{i_0}\omega_0)|^2 - 2\varepsilon \qquad (2)$$

детальніше. Вона не містить в.в., і тому P_1 дорівнює 1 або 0 залежно від того, чи виконується нерівність (2), чи ні.

Нехай $|\omega - \lambda_{i_0}\omega_0| \geq \delta$, $\delta < \frac{\Delta \cdot \omega_0}{2}$. Припустимо, що для деякого $k \neq i_0$ $|\omega - \lambda_k\omega_0| < \delta$. Тоді для будь-якого $l \neq k$ маємо

$$|\omega - \lambda_l\omega_0| = |\omega - \lambda_k\omega_0 + (\lambda_k - \lambda_l)\omega_0| \geq$$

$$\geq (\lambda_k - \lambda_l)\omega_0 - |\omega - \lambda_k\omega_0| \geq \Delta \cdot \omega_0 - \delta =$$

$$= \omega_0\left(\Delta - \frac{\delta}{\omega_0}\right) \geq \frac{\Delta \cdot \omega_0}{2} > \delta.$$

За умови М

$$L = \overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{|\omega - \lambda_{i_0}\omega_0| \geq \delta} |\Phi_T(\omega_0, \omega)|^2 \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{|\omega - \lambda_{i_0}\omega_0| \geq \delta} \left\{ \max_{\upsilon \neq \pm i_0} \left[4A_0^2 |a_\upsilon|^2 \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\omega_0\lambda_\upsilon - \omega)t} dt \right|^2 \right] \right\} < 4A_0^2 |a_{i_0}|^2,$$

тобто для достатньо великих T $(T > T_0)$ виконується

$$\sup_{|\omega - \lambda_{i_0}\omega_0| \geq \delta} |\Phi_T(\omega_0, \omega)|^2 < L + \varepsilon.$$

Оскільки

$$\lim_{T\to\infty} |\Phi_T(\omega_0, \lambda_{i_0}\omega_0)|^2 =$$

$$= 4A_0^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_0^T e^{(i\omega_0\lambda_k - i\omega_0\lambda_{i_0})t} dt \right|^2 =$$

$$= 4A_0^2 |a_{i_0}|^2,$$

то для $T > T_0$ $L + \varepsilon > 4A_0^2 |a_{i_0}|^2 - \varepsilon - 2\varepsilon$ або $0 < d = 4A_0^2 |a_{i_0}|^2 - L < 4\varepsilon$.

Якщо вибрати $\varepsilon < \frac{d}{4}$, то для $T > T_0$ нерівність (3) не виконується, тобто

$$P\{|\omega_T - \lambda_{i_0}\omega_0| \geq \delta\} \to 0, T \to \infty.$$

Теорему доведено.

Теорема 2. За умов теореми 1

$$Q_T(\omega_T) \xrightarrow{P} 4A_0^2 |a_{i_0}|^2, T \to \infty.$$

Доведення. Для довільного $\varepsilon > 0$ і $T \geq T_0$ отримуємо нерівність

$$P\{Q_T(\omega_T) - 4A_0^2 |a_{i_0}|^2 \geq 2\varepsilon\} \leq P_2 + P_3,$$

$$P_3 = P\{|\Phi_T(\omega_0, \omega_T)|^2 - 4A_0^2 |a_{i_0}|^2 \geq \varepsilon\} =$$

$$= P\{|\Phi_T(\omega_0, \omega_T)|^2 - 4A_0^2 |a_{i_0}|^2 \geq \varepsilon,$$

$$|\omega_T - \lambda_{i_0}\omega_0| \geq \delta\} + P\{|\Phi_T(\omega_0, \omega_T)|^2 -$$

$$- 4A_0^2 |a_{i_0}|^2 \geq \varepsilon, |\omega_T - \lambda_{i_0}\omega_0| < \delta\} = P_4 + P_5.$$

Із теореми 1 випливає, що $P_4 \to 0$. Розглянемо P_5. Якщо $|\omega_T - \lambda_{i_0}\omega_0| < \delta$, то $|\omega_T - \lambda_k\omega_0| > \delta$, $k \neq i_0$. Запишемо

$$\Phi_T(\omega_0, \omega_T) = \frac{2A_0}{T} \sum_{k \neq i_0} a_k \int_0^T e^{(i\omega_T - i\omega_0\lambda_k)t} dt +$$

$$+ \frac{2A_0}{T} a_{i_0} \int_0^T e^{(i\omega_T - i\omega_0\lambda_k)t} dt = \alpha + \beta.$$

Для довільного $\varepsilon' > 0$ і $T > T_0$ маємо $|\alpha| < \varepsilon'$. З іншого боку, $|\beta| \leq 2A_0 |a_{i_0}|$ і

$$|\Phi_T(\omega_0, \omega_T)|^2 \leq (\varepsilon' + 2A_0 |a_{i_0}|)^2.$$

Таким чином, $P_5 = 0$ за умови $(\varepsilon')^2 + 4\varepsilon' A_0 |a_{i_0}| < \varepsilon$.

Теорему доведено.

Теорема 3. За умов теореми 1

$$T\left(\frac{\omega_T}{\lambda_{i_0}} - \omega_0\right) \xrightarrow{P} 0, T \to \infty.$$

Доведення. При доведенні теореми 2 ми отримали, що при $T \to \infty$ для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\frac{1}{T^2}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int_0^T e^{(i\omega_T - i\omega_0\lambda_k)t}dt\right|^2 - |a_{i_0}|^2 \geq \varepsilon\right\} \to 0,$$

що еквівалентно збіжності

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\sin T(\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega_T)}{T(\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega_T)} \xrightarrow{P} 1,\ T\to\infty. \qquad (3)$$

Оскільки функція $\frac{\sin x}{x}, x \geq 0$ монотонно спадає в околі нуля, то, скажімо, для $\varepsilon \in (0,1)$ завдяки (3), маємо

$$P\{T|\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega_T| > \varepsilon\} \leq$$

$$\leq P\left\{1 - \frac{\sin T(\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega_T)}{T(\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega_T)} > 1 - \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right\} \to 0,$$

$$T\to\infty,$$

тобто $T(\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega_T) \xrightarrow{P} 0,\ T\to\infty$.

Теорему доведено.

Розглянемо вектор функцій

$$a(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_q(t))',\ t \geq 0, \qquad (4)$$

та сім'ю матричних мір $\mu_T(d\lambda)$ на $(\mathbb{R}^1, \mathrm{B}^1)$ з матричними щільностями $(\mu_T^{jl}(d\lambda))_{j,l=1}^q$:

$$\mu_T^{jl}(d\lambda) = (a_T^j(\lambda)\overline{a_T^i(\lambda)})\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|a_T^j(\lambda)|^2 d\lambda\right)^{-1/2} \times$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|a_T^l(\lambda)|^2 d\lambda\right)^{-1/2},$$

$$a_T^j(\lambda) = \int_0^T e^{i\lambda t}a_j(t)\,dt,\quad j,l = \overline{1,q}.$$

Припустимо, що сім'я мір $\mu_T(d\lambda)$ слабко збігається, при $T\to\infty$, до матричної міри $\mu(d\lambda)$, тобто для будь-якої неперервної обмеженої функції $b(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}^1$, маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b(\lambda)\mu_T(d\lambda) \to \int_{-\infty}^{+\infty} b(\lambda)\mu(d\lambda),\ T\to\infty.$$

Тоді міра $\mu(d\lambda)$ називається спектральною мірою вектора (4).

Визначимо спектральну міру вектора

$$a(t) = (\sin\omega_0 t,\ t\sin\omega_0 t, \cos\omega_0 t,\ t\cos\omega_0 t)'. \qquad (5)$$

Компоненти $\mu_{ij}(d\lambda)$ матриці $\mu(d\lambda)$ знаходимо зі співвідношень [15]

$$\lim_{T\to\infty} d_{iT}^{-1} d_{jT}^{-1}\int_0^T a_i(t+s)a_j(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda s}\mu_{ij}(d\lambda),\quad i,j = 1,2,$$

де $d_{iT}^2 = \int_0^T a_i^2(t)\,dt,\ i = \overline{1,4}$, $a_1(t) = \sin\omega_0 t$, $a_2(t) = t\sin\omega_0 t$, $a_3(t) = \cos\omega_0 t$, $a_4(t) = t\cos\omega_0 t$.

Провівши необхідні обчислення, знаходимо

$$\mu(d\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha & i\beta & i\frac{\sqrt{3}}{2}\beta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha & \alpha & i\frac{\sqrt{3}}{2}\beta & i\beta \\ i\beta & i\frac{\sqrt{3}}{2}\beta & \alpha & \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha \\ i\frac{\sqrt{3}}{2}\beta & i\beta & \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha & \alpha \end{pmatrix},$$

де α – міра, зосереджена у точках $\pm\omega_0$, причому $\alpha(\pm\omega_0) = \frac{1}{2}$, а β – заряд, зосереджений у точках $\pm\omega_0$, причому $\alpha(\pm\omega_0) = \frac{1}{2}$,

Нехай для $j \geq m$

$$f^{*j}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{j-1}} f(\lambda - \lambda_2 - \ldots - \lambda_j)\prod_{i=2}^{j} f(\lambda_i)\,d\lambda_2\ldots d\lambda_j$$

є j-ю згорткою спектральної щільності $f(\lambda)$ випадкового процесу $\xi(t)$.

Зауважимо, що $B^k(\cdot)\in L_1(\mathbb{R}^1),\ k\geq m$, тому всі $f^{*j}(\cdot),\ k \geq m,$ – неперервні обмежені функції.

Позначимо $d_T^2 = \mathrm{diag}(d_{iT}^2,\ i = \overline{1,4})$. Нам знадобиться такий результат [16].

Теорема 4. Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді випадковий вектор

$$d_T^{-1}\int_0^T \varepsilon(t)a(t)dt,$$

де $a(t)$ – вектор (5), є асимптотично при $T\to\infty$ нормальним $N(0,K_1)$,

$$K_1 = 2\pi\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2(G)}{j!}f^{*j}(\omega_0)\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0\\ \sqrt{3}/2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3}/2\\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 1\end{pmatrix}.$$

Звідси знаходимо, що вектор

$$\left(T^{-1}\int_0^T \varepsilon(t)\sin\omega_0 t dt,\ T^{-3/2}\int_0^T \varepsilon(t)\,t\sin\omega_0 t\,dt,\right.$$

$$\left.T^{-1}\int_0^T \varepsilon(t)\cos\omega_0 t dt,\ T^{-3/2}\int_0^T \varepsilon(t)\,t\cos\omega_0 t dt\right)$$

асимптотично нормальний $N(0,K_2)$ при $T\to\infty$,

$$K_2 = 2\pi\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2(G)}{j!}f^{*j}(\omega_0)\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 0\\ 1/4 & 1/6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4\\ 0 & 0 & 1/4 & 1/6\end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Лема 2. Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді величина $T^{\frac{1}{2}}Q_T'(\lambda_{i_0}\omega_0)$ асимптотично нормальна $N(0,K)$, при $T\to\infty$, де

$$K = \frac{16\pi}{3}A_0^2|a_{i_0}|^2\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2(G)}{j!}f^{*j}(\lambda_{i_0}\omega_0).$$

Д о в е д е н н я. Запишемо функціонал $Q_T(\omega)$ у вигляді

$$Q_T(\omega) =$$

$$= \frac{4}{T^2}\left[\int_0^T X(t)\cos\omega t\,dt\right]^2 + \frac{4}{T^2}\left[\int_0^T X(t)\sin\omega t\,dt\right]^2.$$

Тоді

$$T^{-1/2}Q_T'(\lambda_{i_0}\omega_0) =$$

$$= -\frac{8}{T^{5/2}}\int_0^T X(t)\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t dt\int_0^T X(t)\,t\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t dt +$$

$$+\frac{8}{T^{5/2}}\int_0^T X(t)\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt\int_0^T X(t)\,t\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t dt. \qquad (7)$$

Використовуючи зображення (1), розглянемо кожен із членів правої частини (7) окремо:

$$1)\ \frac{A_0^2}{T^{5/2}}\left[-\int_0^T \varphi(\omega_0 t)\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt\times\right.$$

$$\times\int_0^T \varphi(\omega_0 t)\,t\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t dt + \int_0^T \varphi(\omega_0 t)\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t dt\times$$

$$\left.\times\int_0^T \varphi(\omega_0 t)\,t\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t dt\right] = A_0^2T^{1/2}\times$$

$$\times\left[-\frac{a_{i_0}+a_{-i_0}}{2}\cdot\frac{a_{-i_0}-a_{i_0}}{4i}+\frac{a_{-i_0}-a_{i_0}}{2i}\cdot\frac{a_{i_0}+a_{-i_0}}{4}\right]+$$

$$+\theta_{1T} = \theta_{1T}, \text{ де } \theta_{1T}\xrightarrow{P}0, T\to\infty; \qquad (8)$$

$$2)\ -\frac{A_0}{T^{5/2}}\int_0^T \varphi(\omega_0 t)\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt\times$$

$$\times\int_0^T \varepsilon(t)\,t\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t dt = -\frac{A_0^2}{T^{5/2}}\times$$

$$\times\int_0^T\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{i\lambda_k\omega_0 t}\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt\int_0^T \varepsilon(t)t\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t dt =$$

$$= -\frac{a_{i_0}+a_{-i_0}}{2}\frac{A_0}{T^{3/2}}\int_0^T \varepsilon(t)t\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t dt + \theta_{2T},$$

де $\theta_{2T}\xrightarrow{P}0, T\to\infty;$ (9)

$$3)\ \frac{A_0}{T^{5/2}}\left[-\int_0^T \varepsilon(t)\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t dt\int_0^T \varepsilon(t)\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t dt +\right.$$

$$\left.+\int_0^T \varepsilon(t)\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t dt\int_0^T \varepsilon(t)t\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t dt\right]\xrightarrow{P}0, \qquad (10)$$

$T\to\infty$, за лемою 1 та теоремою 3;

4) $\frac{A_0}{T^{5/2}}\int_0^T \varphi(\omega_0 t)\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t dt\int_0^T \varepsilon(t) t\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t dt =$

$= -\frac{a_{-i_0}-a_{i_0}}{2i}\frac{A_0}{T^{3/2}}\int_0^T \varepsilon(t) t\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t dt + \theta_{3T},$

де $\theta_{3T}\xrightarrow{P} 0, T\to\infty;$ (11)

5) $\frac{A_0}{T^{5/2}}\int_0^T \varepsilon(t)\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t dt\int_0^T \varphi(\omega_0 t)\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t dt =$

$= \frac{A_0}{T^{1/2}}\frac{a_{-i_0}-a_{i_0}}{4i}\int_0^T \varepsilon(t)\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t dt + \theta_{4T},$

де $\theta_{4T}\xrightarrow{P} 0,\ T\to\infty;$ (12)

6) $\frac{A_0}{T^{5/2}}\int_0^T \varepsilon(t)\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t dt\int_0^T \varphi(\omega_0 t)\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t dt =$

$= \frac{A_0}{T^{1/2}}\frac{a_{i_0}+a_{-i_0}}{4}\int_0^T \varepsilon(t)\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t dt + \theta_{5T},$

де $\theta_{5T}\xrightarrow{P} 0,\ T\to\infty.$ (13)

Отже, з (8)–(13) випливає, що $T^{-1/2}\times$ $\times Q'_T(\lambda_{i_0}\omega_0) = \eta_{1T}+\theta_T$, де $\theta_T = \sum_{i=1}^{5}\theta_{iT}\xrightarrow{P} 0, T\to\infty$, а

$$\eta_{1T} = 2(a_{i_0}+a_{-i_0})\frac{A_0}{T^{1/2}}\int_0^T \varepsilon(t)\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t dt -$$

$$-4(a_{i_0}+a_{-i_0})\frac{A_0}{T^{3/2}}\int_0^T \varepsilon(t) t\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t dt +$$

$$+2i(a_{-i_0}-a_{i_0})\frac{A_0}{T^{1/2}}\int_0^T \varepsilon(t)\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t dt -$$

$$-4i(a_{-i_0}-a_{i_0})\frac{A_0}{T^{3/2}}\int_0^T \varepsilon(t) t\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t dt =$$

$$= 2A_0[(a_{i_0}+a_{-i_0})b_{1T} - 2(a_{i_0}+a_{-i_0})b_{2T} +$$

$$+ i(a_{-i_0}-a_{i_0})b_{3T} - 2i(a_{-i_0}-a_{i_0})b_{4T}].$$

За теоремою 4 величина η_{1T} є асимптотично нормальною. Знайдемо дисперсію величини η_{1T} при $T\to\infty$, використовуючи коваріаційну матрицю K_2 із формули (6).

Нехай $\rho = (\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4)$, $b_T = (b_{1T},b_{2T},b_{3T},$ $b_{4T})$. Ми довели, що для будь-яких $\rho = (\rho_1,\rho_2,$ $\rho_3,\rho_4)$

$$Ee^{i\langle\rho,b_T\rangle}\underset{T\to\infty}{\to}\exp\left\{-\frac{1}{2}\langle K_2\rho,\rho\rangle\right\}.$$

Беручи

$$\rho = ((a_{i_0}+a_{-i_0})\tau, -2(a_{i_0}+a_{-i_0})\tau,$$
$$i(a_{-i_0}-a_{i_0})\tau, -2i(a_{-i_0}-a_{i_0})\tau),$$

отримуємо, що

$$(a_{i_0}+a_{-i_0})b_{1T} - 2(a_{i_0}+a_{-i_0})b_{2T} +$$
$$+ i(a_{-i_0}-a_{i_0})b_{3T} - 2i(a_{-i_0}-a_{i_0})b_{4T}$$

асимптотично нормальна, при $T\to\infty$, в.в. із середнім 0 та дисперсією, яку знаходимо із

$$\langle K_2\rho,\rho\rangle = 2\pi\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2(G)}{j!}f^{*j}(\lambda_{i_0}\omega_0)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{6}(a_{i_0}+a_{-i_0})^2 - \frac{1}{6}(a_{i_0}-a_{-i_0})^2\right)\tau^2 =$$

$$= \frac{4\pi}{3}|a_{i_0}|^2\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2(G)}{j!}f^{*j}(\lambda_{i_0}\omega_0)\tau^2.$$

Тобто дисперсія рівна $\frac{4\pi}{3}|a_{i_0}|^2\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2(G)}{j!}f^{*j}(\lambda_{i_0}\omega_0)$.

А отже, $T^{-1/2}Q'_T(\omega_0)$ – асимптотично при $T\to\infty$ нормальна $N(0, K)$. Лему доведено.

Лема 3. Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для будь-якої в.в. $\tilde\omega_T$, що задовольняє нерівність $|\tilde\omega_T - \lambda_{i_0}\omega_0| \le |\omega_T - \lambda_{i_0}\omega_0|$ з імовірністю 1 для всіх $T>0$, виконується співвідношення

$$\frac{1}{T^2}Q''_T(\tilde\omega_T)\xrightarrow{P} -\frac{2}{3}A_0^2|a_{i_0}|^2,\ T\to\infty.$$

Доведення. Маємо

$$\frac{1}{T^2}Q''_T(\tilde\omega_T) = 8\left[\frac{1}{T^2}\int_0^T X(t) t\sin\tilde\omega_T t dt\right]^2 -$$

$$-\frac{8}{T}\int_0^T X(t)\cos\tilde\omega_T t\, dt\frac{1}{T^3}\int_0^T X(t) t^2\cos\tilde\omega_T t dt +$$

$$+8\left[\frac{1}{T^2}\int_0^T X(t)t\cos\tilde{\omega}_T t\,dt\right]^2-$$

$$-\frac{8}{T}\int_0^T X(t)\sin\tilde{\omega}_T t\,dt\frac{1}{T^3}\int_0^T X(t)t^2\sin\tilde{\omega}_T t\,dt.$$

Використовуючи лему 1 та теорему 3, розглянемо інтеграли

$$\frac{1}{T}\int_0^T X(t)\cos\tilde{\omega}_T t\,dt=$$

$$=\frac{A_0}{T}\int_0^T\sum_{j=-\infty}^{+\infty}a_j e^{i\lambda_j\omega_0 t}\cos\tilde{\omega}_T t\,dt+\frac{1}{T}\int_0^T\varepsilon(t)\cos\tilde{\omega}_T t\,dt=$$

$$=\frac{A_0}{T}\int_0^T\cos\tilde{\omega}_T t[a_{-i_0}\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t+a_{i_0}\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t]dt+$$

$$+\xi_{2T}=\frac{2\beta_{i_0}A_0}{T}\int_0^T\cos\tilde{\omega}_T t\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt+\xi_{2T}=$$

$$=\frac{\beta_{i_0}A_0}{T}\int_0^T[\cos(\tilde{\omega}_T-\lambda_{i_0}\omega_0)t+$$

$$+\cos(\tilde{\omega}_T+\lambda_{i_0}\omega_0)t]dt+\xi_{2T}\xrightarrow{P}\beta_{i_0}A_0,$$

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T X(t)t\cos\tilde{\omega}_T t\,dt=\frac{1}{T^2}\int_0^T\sum_{j=-\infty}^{+\infty}a_j e^{i\lambda_j\omega_0 t}t\cos\tilde{\omega}_T t\,dt+$$

$$+\frac{A_0}{T^2}\int_0^T\varepsilon(t)t\cos\tilde{\omega}_T t\,dt=\frac{\beta_{i_0}A_0}{T^2}\times$$

$$\times\int_0^T t[\cos(\tilde{\omega}_T-\lambda_{i_0}\omega_0)t+\cos(\tilde{\omega}_T+\lambda_{i_0}\omega_0)t]dt+$$

$$+\xi_{3T}\xrightarrow{P}\frac{1}{2}\beta_{i_0}A_0,$$

$$\frac{1}{T^3}\int_0^T X(t)t^2\cos\tilde{\omega}_T t\,dt=$$

$$=\frac{2\beta_{i_0}A_0}{T^3}\int_0^T t^2[\cos(\tilde{\omega}_T-\lambda_{i_0}\omega_0)t+$$

$$+\cos(\tilde{\omega}_T+\lambda_{i_0}\omega_0)t]dt+\xi_{4T}\xrightarrow{P}\frac{1}{3}\beta_{i_0}A_0.$$

Аналогічно знаходимо, що

$$\frac{1}{T}\int_0^T X(t)\sin\tilde{\omega}_T t\,dt\xrightarrow{P}\gamma_{i_0}A_0,\ \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\sin\tilde{\omega}_T t\,dt\xrightarrow{P}$$

$$\xrightarrow{P}\frac{1}{2}\gamma_{i_0}A_0,\ \frac{1}{T^3}\int_0^T X(t)t^2\sin\tilde{\omega}_T t\,dt\xrightarrow{P}\frac{1}{3}\gamma_{i_0}A_0.$$

Звідси знаходимо, що

$$\frac{1}{T^2}Q''_T(\tilde{\omega}_T)\xrightarrow{P}2\gamma_{i_0}^2A_0^2-\frac{8}{3}\beta_{i_0}^2A_0^2+$$

$$+2\beta_{i_0}^2A_0^2-\frac{8}{3}\gamma_{i_0}^2A_0^2=-\frac{2}{3}A_0^2|a_{i_0}|^2.$$

Лему доведено.

Теорема 5. За умов теореми 1 величина $T^{3/2}(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)$ асимптотично, при $T\to\infty$, нормальна, з нульовим середнім та дисперсією $12\pi A_0^{-2}|a_{i_0}|^{-2}\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2(G)}{j!}f^{*j}(\lambda_{i_0}\omega_0)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $Q'_T(\omega_T)=0$, то

$$Q'_T(\lambda_{i_0}\omega_0)+Q''_T(\tilde{\omega}_T)(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)=0\qquad(14)$$

з деякою в.в. $\tilde{\omega}_T$, яка задовольняє нерівність

$$|\tilde{\omega}_T-\lambda_{i_0}\omega_0|\le|\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0|,\ T\to\infty.$$

З (14) маємо

$$T^{3/2}(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)=-\frac{T^{-1/2}Q'_T(\lambda_{i_0}\omega_0)}{T^{-2}Q''_T(\tilde{\omega}_T)}.$$

Твердження теореми тепер є наслідком лем 3 і 4. Лему доведено.

Теорема 6. За умов теореми 1 нормована оцінка $T^{1/2}(A_T-A_0)$ є асимптотично при $T\to\infty$ нормальною з нульовим середнім і дисперсією $\pi|a_{i_0}|^{-2}\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2(G)}{j!}f^{*j}(\lambda_{i_0}\omega_0)$.

Д о в е д е н н я. Запишемо

$$T^{1/2}(A_T-A_0)=T^{1/2}\left[\frac{1}{2|a_{i_0}|}Q_T^{1/2}(\omega_T)-A_0\right]=$$

$$=T^{1/2}\left[\frac{1}{4|a_{i_0}|^2}Q_T(\omega_T)-A_0^2\right]\times$$

$$\times[2|a_{i_0}|^{-1}Q_T^{1/2}(\varphi_T)+A_0]^{-1}.\qquad(15)$$

За теоремою 1

$$\frac{1}{2|a_{i_0}|}Q_T^{1/2}(\omega_T)+A_0\xrightarrow{P}2A_0,\ T\to\infty.\qquad(16)$$

Маємо далі

$$T^{1/2}[Q_T(\omega_T)-Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0)]=T^{1/2}Q'_T(\lambda_{i_0}\omega_0)\times$$

$$\times(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)+\frac{1}{2}T^{1/2}Q''_T(\tilde{\omega}_T)(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)^2$$

з деякою величиною $\tilde{\omega}_T$ такою, що $|\tilde{\omega}_T - \lambda_{i_0}\omega_0|\le|\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0|$ майже напевно.

Величина

$$T^{1/2}Q'_T(\lambda_{i_0}\omega_0)(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)=$$

$$=T^{-1/2}Q'_T(\lambda_{i_0}\omega_0)T(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)$$

збігається за ймовірністю до 0 згідно з теоремою 2 та лемою 3. З іншого боку,

$$\frac{T^{1/2}}{2}Q''_T(\tilde{\omega}_T)(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)^2=$$

$$=\frac{1}{T^2}Q''_T(\tilde{\omega}_T)T^{3/2}(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)T(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0),$$

і збіжність до 0 за ймовірністю цього доданка випливає з леми 3 та теорем 2 і 3. Таким чином, співвідношення (15), (16) дають змогу стверджувати, що асимптотичний розподіл величини $T^{1/2}(A_T-A_0)$ збігається з асимптотичним розподілом в.в.

$$\frac{T^{1/2}}{2A_0}\left[\frac{1}{4|a_{i_0}|^2}Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0)-A_0^2\right].$$

Із доведення теореми 1 видно, що $\frac{T^{1/2}}{4|a_{i_0}|^2}Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0)-A_0^2$ веде себе на нескінченності як

$$\frac{T^{1/2}}{4|a_{i_0}|^2}\delta_T(\lambda_{i_0}\omega_0)=$$

$$=\frac{1}{T^{3/2}|a_{i_0}|^2}\left|\int_0^T\varepsilon(t)e^{i\lambda_{i_0}\omega_0 t}dt\right|^2+\frac{2A_0}{T^{3/2}|a_{i_0}|^2}\times$$

$$\times\operatorname{Re}\left\{\int_0^T\varphi(\omega_0 t)e^{i\lambda_{i_0}\omega_0 t}dt\int_0^T\varepsilon(t)e^{-i\lambda_{i_0}\omega_0 t}dt\right\};$$

$$\frac{1}{T^{3/2}}\left|\int_0^T\varepsilon(t)e^{i\lambda_{i_0}\omega_0 t}dt\right|^2\xrightarrow{P}0,\ T\to\infty,$$

за лемою 1.

Залишається дослідити поведінку

$$\frac{2A_0}{|a_{i_0}|^2T^{3/2}}\operatorname{Re}\left\{\int_0^T\varphi(\omega_0 t)e^{i\lambda_{i_0}\omega_0 t}dt\int_0^T\varepsilon(t)e^{-i\lambda_{i_0}\omega_0 t}dt\right\}=$$

$$=\frac{2A_0}{|a_{i_0}|^2T^{3/2}}\operatorname{Re}\left\{\int_0^T\left(a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(2\beta_k\cos\lambda_k\omega_0 t-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\gamma_k\sin\lambda_k\omega_0 t)\right)e^{i\lambda_{i_0}\omega_0 t}dt\int_0^T\varepsilon(t)e^{-i\lambda_{i_0}\omega_0 t}dt\right\}=$$

$$=\frac{2A_0\beta_k}{|a_{i_0}|^2T^{1/2}}\int_0^T\varepsilon(t)\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt+\frac{2A_0\gamma_k}{|a_{i_0}|^2T^{1/2}}\times$$

$$\times\int_0^T\varepsilon(t)\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt+\xi_{3T},\ \xi_{3T}\xrightarrow{P}0,\ T\to\infty.$$

Як було показано раніше, вектор

$$\left(T^{-1/2}\int_0^T\varepsilon(t)\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt,\ T^{-1/2}\int_0^T\varepsilon(t)\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt\right)'$$

є асимптотично нормальним, при $T\to\infty$, з нульовим середнім та коваріаційною матрицею

$$\pi\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2(G)}{j!}f^{*j}(\lambda_{i_0}\omega_0)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Використовуючи цей факт, ми отримуємо, що $T^{1/2}\left(\frac{1}{4|a_{i_0}|^2}Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0)-A_0^2\right)$ є асимптотично нормальною в.в. з параметрами 0 і $4\pi A_0^2|a_{i_0}|^{-2}\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2(G)}{j!}f^{*j}(\lambda_{i_0}\omega_0)$, а отже, $T^{1/2}(A_T-A_0)$ – асимптотично нормальна з параметрами 0 і $\pi|a_{i_0}|^{-2}\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2(G)}{j!}f^{*j}(\lambda_{i_0}\omega_0)$.

Теорема 7. За умов теореми 1, вектор

$$(T^{1/2}(A_T-A_0),\ T^{3/2}(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0))'$$

є асимптотично при $T\to\infty$ нормальним з нульовим вектором середніх та матрицею коваріацій

$$2\pi|a_{i_0}|^{-2}\sum_{j=m}^{\infty}\frac{C_j^2(G)}{j!}f^{*j}(\lambda_{i_0}\omega_0)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&6A_0^{-2}\end{pmatrix}.$$

Доведення. При доведенні лем 2, 3 і теорем 5, 6 було показано, що

$$T^{1/2}(A_T - A_0) = \frac{\beta_k}{|a_{i_0}|^2 T^{1/2}} \int_0^T \varepsilon(t)\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt +$$

$$+ \frac{\gamma_k}{|a_{i_0}|^2 T^{1/2}} \int_0^T \varepsilon(t)\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt + \xi_{3T},$$

$$\xi_{3T} \xrightarrow{P} 0,\ T \to \infty,$$

$$T^{3/2}(\omega_T - \lambda_{i_0}\omega_0) = \frac{6\gamma_k A_0^{-1}}{|a_{i_0}|^2 T^{1/2}} \int_0^T \varepsilon(t)\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt +$$

$$+ \frac{6\beta_k A_0^{-1}}{|a_{i_0}|^2 T^{1/2}} \int_0^T \varepsilon(t)\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt -$$

$$- \frac{12\gamma_k A_0^{-1}}{|a_{i_0}|^2 T^{3/2}} \int_0^T \varepsilon(t) t\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt - \frac{12\beta_k A_0^{-1}}{|a_{i_0}|^2 T^{3/2}} \times$$

$$\times \int_0^T \varepsilon(t) t\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt + \xi_{4T},$$

$$\xi_{4T} \xrightarrow{P} 0,\ T \to \infty.$$

Для будь-яких u_1, u_2 маємо

$$u_1 T^{1/2}(A_T - A_0) + u_2 T^{3/2}(\omega_T - \lambda_{i_0}\omega_0) =$$

$$= |a_{i_0}|^{-2} \left[(6\beta_k A_0^{-1} u_1 + \gamma_k u_2) \frac{1}{T^{1/2}} \int_0^T \varepsilon(t)\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt - \right.$$

$$- \frac{12\beta_k A_0^{-1}}{T^{3/2}} u_3 \int_0^T \varepsilon(t) t\sin\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt +$$

$$+ (\beta_k u_1 + 6\gamma_k A_0^{-1} u_2) \frac{1}{T^{1/2}} \int_0^T \varepsilon(t)\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt -$$

$$\left. - \frac{12\gamma_k A_0^{-1}}{T^{3/2}} u_4 \int_0^T \varepsilon(t) t\cos\lambda_{i_0}\omega_0 t\,dt + \mu_T \right] =$$

$$= v_1\zeta_{1T} + v_2\zeta_{2T} + v_3\zeta_{3T} + v_4\zeta_{4T} + \mu_T,$$

де $v_1 = 6\beta_k A_0^{-1} u_1 + \gamma_k u_2$, $v_2 = -12\beta_k A_0^{-1} u_3$, $v_3 = \beta_k u_1 + 6\gamma_k A_0^{-1} u_2$, $v_4 = -12\gamma_k A_0^{-1} u_4$, $\mu_T \xrightarrow{P} 0$, $T \to \infty$.

Із теореми 4 випливає, що

$$E\exp\{i(v_1\zeta_{1T} + v_2\zeta_{2T} + v_3\zeta_{3T} + v_4\zeta_{4T})\} \to$$

$$\exp\left\{ -\frac{1}{2} K_2\mathbf{V}, \mathbf{V} \right\}.$$

Далі, використовуючи матрицю (6), маємо

$$K_2\mathbf{V}, \mathbf{V} = 2\pi \sum_{j=m}^{\infty} \frac{C_j^2(G)}{j!} f^{*j}(\omega_0) v' K_2 v =$$

$$= \pi \sum_{j=m}^{\infty} \frac{C_j^2(G)}{j!} f^{*j}(\omega_0) \times$$

$$\times \left(v_1^2 + v_1 v_2 + \frac{1}{3} v_2^2 + v_3^2 + v_3 v_4 + \frac{1}{3} v_4^2 \right) =$$

$$= 2\pi |a_{i_0}|^{-2} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{C_j^2(G)}{j!} f^{*j}(\lambda_{i_0}\omega_0) \left(\left(\frac{1}{2}\right) u_1^2 + 6 A_0^{-2} u_2^2 \right),$$

звідки вже випливає твердження теореми.

Висновки

У роботі було отримано достатні умови асимптотичної нормальності консистентних періодограмних оцінок амплітуди та кутової частоти модульованого майже періодичного сигналу в моделі спостереження із сильнозалежним випадковим шумом. Це дасть можливість зробити наступний крок у вивченні періодограмних оцінок у моделях із сильнозалежним шумом, що полягає у статистичному оцінюванні отриманих дисперсій цих оцінок модулюючих параметрів.

1. *P. Whittle,* “The simultaneous estimation of a time series harmonic components and covariance structure”, Trabajos Estadistica, vol. 3, pp. 43–57, 1952.
2. *A.M. Walker,* “On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals”, Adv. Appl. Probability, vol. 5, pp. 217–241, 1973.
3. *E.J. Hannan,* “The estimation of frequency”, Ibid, vol. 10, pp. 510–519, 1973
4. *A.V. Ivanov,* “A solution of the problem of detecting hidden periodicities”, Theory Probability and Math. Statist., no. 20, pp. 51–68, 1980.

5. *Кнопов П.С.* Оптимальные оценки параметров стохастических систем. – К.: Наук. думка, 1981. – 152 с.
6. *S. Chatterjee and V.C. Vani,* "An Extended Matched Filtering Methods to Detect Periodicities in a Rough Grating for Extremely Large Roughness", Bulletin of the Astronomical Soc. of India, vol. 31, pp. 457–459, 2003.
7. *A.V. Levenets et al.,* "Estimating signal spectra with a method of determining concealed periodicities in zero crossings", Measurement Techniques, vol. 39, no. 9, pp. 909–913, 1996.
8. *S. Chatterjee and V.C. Vani,* "Scattering of light by a periodic structure in the presence of randomness. V. Detection of successive peaks in a periodic structure", Appl. Optics, vol. 45, pp. 8939–8944, 2006.
9. *M. Hinich,* "Detecting a hidden periodic signal when its period is unknown", Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. 30, is. 5, pp. 747–750, 1982.
10. *I. Iavorskyj and V. Mykhajlyshyn,* "Detecting hidden periodicity of time-series generated by nonlinear processes in magneto-plasma", Proc. of 6th Int. Conf. "Mathematical methods in Electromagnetic Theory", is. 10–13, pp. 397–400, 1996.
11. *H. Arsham,* "A test sensitive to extreme hidden periodicitie"s, Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, vol. 11, no. 4, pp. 323–330, 1997.
12. *J. Malisic et al.,* "Application of some statistical tests for hidden periodicity in the Serbian annual precipitation sums", Hungarian Meteorological Service, vol. 103, no. 4, pp. 237–247, 1999.
13. *Кнопов П.С.* Оценивание неизвестных параметров почти периодической функции при наличии шума // Кибернетика. – 1984. – № 6. – С. 83–87.
14. *Жураковський Б.М., Іванов О.В.* Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів суми гармонічних коливань у моделях із сильнозалежним шумом // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2010. – № 4. – С. 60–66.
15. *Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А.* Гауссовы процессы. – М.: Наука, 1971.
16. *A.V. Ivanov and B.M. Zhurakovskyi,* "Detection of hidden periodicities in the model with long range dependent noise", Proc. of Int. Conf. "Modern Stochastic: Theory and Applications II", Ukraine, Kyiv, 7–11 Spt., 2010, pp. 99–100.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
4 червня 2013 року