УДК 519.21

О.В. Іванов, В.В. Приходько

# ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАЛИШКІВ У ЛІНІЙНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ З ГАУССОВИМ СТАЦІОНАРНИМ ШУМОМ

We consider linear regression model with continuous time and strongly dependent stationary Gaussian random noise. The behavior of normalized in some way extreme residuals, that are the maximum differences, or their absolute values, between the observations and the values of the regression function where instead of unknown parameter the least squares estimator is substituted. For linear regression model the conditions of weak convergence of normalized extreme residuals to double exponent curve are obtained which follows from the assumption of normality of random noise. In addition instead of unknown variance and the 2-nd spectral moment of Gaussian stationary noise the consistent estimators of indicated parameters are substituted in normalizing function. The variance estimator of noise generalizes the residual sum of squares of classical mathematical statistic and the 2-nd spectral moment estimator generalize Lindgren estimator. In the paper mathematical machinery of statistics of random processes and limit theorems for extremes of Gaussian stationary noise is used. New results obtained provide an opportunity to offer some non-traditional statistical tests for adequacy of the regression model.

## Вступ

У класичному регресійному аналізі важливу роль у статистичному виведенні грає залишкова сума квадратів, що отримується підстановкою оцінки найменших квадратів (ОНК) у функціонал найменших квадратів. Численні корисні властивості цієї статистичної оцінки невідомої дисперсії похибки спостережень описано, наприклад, у [1] для лінійної моделі регресії і в [2] у випадку нелінійної моделі.

У праці [3] замість залишкової суми квадратів, тобто, фактично, $\ell_2$-норми сукупності залишків, розглянута рівномірна норма залишків. За різних припущень про розподіл помилок спостережень отримано теореми про слабку збіжність належним чином нормованих залишків і максимальних модулів залишків до одного з трьох можливих граничних законів для максимумів незалежних однаково розподілених випадкових величин [4–6].

У цій роботі результати [3] перенесено на лінійну модель регресії з неперервним часом і гауссовим стаціонарним сильно залежним випадковим шумом. При цьому йдеться про слабку збіжність функції розподілу нормованих залишків до подвійної експоненти, що є наслідком припущення про гауссовість випадкового шуму.

На відміну від схеми незалежних однаково розподілених випадкових величин, у граничних теоремах для максимумів гауссових стаціонарних процесів у нормуючих функціях містяться теоретичні значення невідомих дисперсії та 2-го спектрального моменту стаціонарного випадкового шуму. З точки зору статистики випадкових процесів граничні теореми для максимальних залишків стануть корисними, якщо замість невідомих параметрів підставити у нормуючі функції такі статистичні оцінки цих параметрів, що граничні теореми залишаються справедливими.

## Постановка задачі

Мета роботи полягає в отриманні умов, за яких є справедливими граничні теореми для нормованих певним чином екстремальних залишків, тобто максимальних різниць, або їх абсолютних величин, між спостереженнями та значеннями функції регресії, в яку замість невідомої величини параметра підставлено його ОНК.

## Позначення й означення

Розглянемо лінійну модель регресії

$$y(t)=\sum_{i=1}^{q}\theta_i x_i(t)+\varepsilon(t),\ t\in[0,T], \tag{1}$$

де $\theta=(\theta_1,..,\theta_q)\in R^q$ — вектор невідомих параметрів, $x_i(t),\ t\in R_+^1,\ i=\overline{1,q},$ — неперервні функції, $\varepsilon(t),\ t\in R^1$ — випадковий шум.

Введемо умови.

**А1.** $\varepsilon=\{\varepsilon(t),\ t\in R^1\}$ — гауссов стаціонарний неперервний у середньому квадратичному випадковий процес, заданий на повному ймовірнісному просторі $(\Omega,\Im,\mathrm{P})$, $E\varepsilon(0)=0$.

Нехай $B(t)=E\varepsilon(t)\varepsilon(0),\ t\in R^1$, — коваріаційна функція (к.ф.) процесу $\varepsilon$, а $f(\lambda),\ \lambda\in R^1$ —

його спектральна щільність (с.щ.). Позначимо $\lambda_0 = B(0) = \sigma^2$, $\lambda_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 f(\lambda) d\lambda$. Для обмеженості другого спектрального моменту $\lambda^2$ необхідно і достатньо, щоб була скінченна величина $B''0)$, і в цьому випадку $\lambda^2 = -B''(0)$ (див., наприклад, [7]).

**A2.** (*i*) $B(t) = \sigma^2 - \frac{\lambda_2 t^2}{2} + o(t^2)$ при $t \to 0$; (2)

(*ii*) $\lim_{t\to\infty} B(t) \ln t = 0.$

***Означення* 1.** ОНК векторного параметра $\theta = (\theta_1,..,\theta_q) \in R^q$, отриманою за спостереженнями (1), називається випадковий вектор $\widehat{\theta}_T = (\widehat{\theta}_{1T},..,\widehat{\theta}_{qT})$, який мінімізує за $\tau = (\tau_1,..,\tau_q) \in R^q$ функціонал

$$Q(\tau) = \int_0^T \left[ y(t) - \sum_{i=1}^q \tau_i x_i(t) \right]^2 dt.$$

Покладемо

$$d_{iT}^2 = \int_0^T x_i^2(t) dt,\ i = \overline{1,q};\ d_T = \mathrm{diag}(d_{iT}, i = \overline{1,q}).$$

Будемо вважати, що $d_{iT}^2 \xrightarrow[T\to\infty]{} +\infty,\ i = \overline{1,q}.$

Нехай $X(t) = (x_1(t),...,x_q(t))^*,\ t \in [0,T]$,

$$J_T = d_T^{-1} \left( \int_0^T X(t) X^*(t) dt \right) d_T^{-1} = \left( d_{jT}^{-1} d_{lT}^{-1} \int_0^T x_j(t) x_l(t) dt \right)_{j,l=1}^q .$$

Тоді, якщо $\det J_T \neq 0$, то

$$d_T(\widehat{\theta}_T - \theta) = J_T^{-1} d_T^{-1} \int_0^T X(t) \varepsilon(t) dt. \quad (3)$$

Для отримання в явному вигляді граничної коваріаційної матриці гауссового вектора (3) використаємо поняття спектральної міри функції регресії

$$g(t,\theta) = \sum_{i=1}^q \theta_i x_i(t),\ t \in R_+^1. \quad (4)$$

Нехай

$$\mu_T(d\lambda) = (\mu_T^{jl}(d\lambda))_{j,l=1}^q$$

і

$$\mu_T^{jl}(d\lambda) = \frac{x_T^j(\lambda) \overline{x_T^l(\lambda)} d\lambda}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x_T^j(\lambda)|^2 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} |x_T^l(\lambda)|^2 d\lambda}},\ j,l = \overline{1,q},$$

де $x_T^j(\lambda) = \int_0^T e^{it\lambda} x_j(t) dt,\ j = \overline{1,q}.$

**B1.** Припустимо, що сім'я матричних мір $\mu_T$ слабко збігається при $T \to \infty$ до невиродженої матричної міри $\mu = (\mu^{jl})_{j,l=1}^q : \mu_T \Rightarrow \mu$.

***Означення* 2.** Матричнозначна міра $\mu$ називається *спектральною мірою функції регресії* (4) (див., наприклад, [6, 8, 9]).

***Означення* 3.** С.щ. $f$ називається $\mu$-*припустимою* [9], якщо вона $\mu$-інтегровна, тобто всі елементи матриці $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu(d\lambda)$ скінченні і

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu_T(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu(d\lambda).$$

**AB.** С.щ. $f$ процесу $\varepsilon$ є $\mu$-припустимою.

Достатні умови $\mu$-припустимості с.щ. $f$ стаціонарного процесу $\varepsilon$ наведено в [10].

Якщо виконуються умови B1 і AB, то коваріаційна матриця нормованої ОНК (3) задовольняє добре відоме граничне співвідношення [9]

$$K_T = (K_T^{ij})_{i,j=1}^q = d_T E(\widehat{\theta}_T - \theta)(\widehat{\theta}_T - \theta)^* d_T =$$

$$= J_T^{-1} \left[ d_T^{-1} \left( \int_0^T \int_0^T X(t) X^*(s) B(t-s) dt ds \right) d_T^{-1} \right] J_T^{-1} =$$

$$= 2\pi \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mu_T(d\lambda) \right)^{-1} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu_T(d\lambda) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mu_T(d\lambda) \right)^{-1} \xrightarrow[T\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[T\to\infty]{} 2\pi \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mu(d\lambda) \right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu(d\lambda) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mu(d\lambda) \right)^{-1} =$$

$$= (K^{ij})_{i,j=1}^q = K. \quad (5)$$

Із (5) своєю чергою випливає, що

$$D\widehat{\theta}_{iT} = O(d_{iT}^{-2}),\ i = \overline{1,q}.$$

Наступна умова часто використовується в регресійному аналізі при вивченні асимптотичних властивостей ОНК.

**B2.** $d_{iT}^{-1} \max\limits_{0 \le t \le T} |x_i(t)| \le k_i T^{-\frac{1}{2}}, \; i = \overline{1,q}.$

Покладемо

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{q} \hat{\theta}_{iT} x_i(t), \hat{\varepsilon}(t) = y(t) - \hat{y}(t), \; t \in R_+^1,$$

$$Z_T = \max_{0 \le t \le T} \varepsilon(t), \; \hat{Z}_T = \max_{0 \le t \le T} \hat{\varepsilon}(t).$$

**Теорема 1.** Якщо виконуються умови A1, A2, B1, B2 і AB, то

$$P\{b_T(\sigma^{-1}\hat{Z}_T - a_T) < z\} \xrightarrow[T \to \infty]{} \Lambda(z), \; z \in R^1, \quad (6)$$

де

$$a_T = (2\ln T)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_0} - \ln 2\pi}{(2\ln T)^{\frac{1}{2}}}, \; b_T = (2\ln T)^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

$$\Lambda(z) = \exp\{-e^{-z}\}.$$

Теорема 1 доводиться аналогічно [3].

З точки зору статистики випадкових процесів теорема 1 має недолік, який полягає в тому, що дисперсія $\lambda_0 = \sigma^2$ випадкового шуму $\varepsilon(t)$ і другий спектральний момент $\lambda_2$ із нормувальної функції $a_T$ у формулі (7) нам не відомі. Далі ми зосередимо зусилля на побудові статистичних оцінок дисперсії та другого спектрального моменту, які мають таку властивість: якщо їх підставити у вираз (7) замість невідомих параметрів, все одно співвідношення (6) буде виконуватись.

Розглянемо частинний випадок к.ф. випадкового процесу $\varepsilon(t)$, а саме припустимо, що виконується умова

**A3.** $B(t) = \sigma^2 \dfrac{\cos\varphi t}{(1+t^2)^{\frac{\alpha}{2}}}, \; \varphi \ge 0, \; \alpha \in (0,1)$.

Легко побачити, що для к.ф. $B$ із умови A3 виконується умова A2.

**Оцінка дисперсії випадкового шуму**

Розглянемо функціонал $Q_T(\hat{\theta}_T)$, де $\hat{\theta}_T = (\hat{\theta}_{1T},..,\hat{\theta}_{qT})$ – ОНК векторного параметра $\theta = (\theta_1,..,\theta_q)$.

$$Q_T(\hat{\theta}_T) = \int_0^T \left[ y(t) - \sum_{i=1}^{q} \hat{\theta}_{iT} x_i(t) \right]^2 dt = \int_0^T \varepsilon^2(t)dt -$$

$$- 2\left\langle J_T^{-1} d_T^{-1} \int_0^T \varepsilon(t) X(t)dt, d_T^{-1} \int_0^T \varepsilon(t)X(t)dt \right\rangle +$$

$$+ \left\langle J_T J_T^{-1} d_T^{-1} \int_0^T \varepsilon(t)X(t)dt, \; J_T^{-1} d_T^{-1} \int_0^T \varepsilon(t)X(t)dt \right\rangle.$$

Позначимо $V_T = d_T^{-1} \int_0^T \varepsilon(t)X(t)dt$, тоді

$$Q_T(\hat{\theta}_T) = \int_0^T \varepsilon^2(t)dt - \langle J_T^{-1} V_T, V_T \rangle.$$

Далі маємо

$$EQ_T(\hat{\theta}_T) =$$

$$= TB(0) - \sum_{i,l=1}^{q} (J_T^{-1})_{il} \, 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, \mu_T^{il}(d\lambda) \xrightarrow[T \to \infty]{}$$

$$\xrightarrow[T \to \infty]{} TB(0) - tr\left( 2\pi \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mu(d\lambda) \right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu(d\lambda) \right).$$

Таким чином,

$$\lim_{T \to \infty} E(Q_T(\hat{\theta}_T) - Q_T(\theta)) = \lim_{T \to \infty} (EQ_T(\hat{\theta}_T) - T\sigma^2) =$$

$$= -tr\left( 2\pi \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mu(d\lambda) \right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu(d\lambda) \right).$$

Покладемо $\frac{1}{T} Q_T(\hat{\theta}_T) = \hat{\sigma}_T^2$ і розглянемо

$$\hat{\sigma}_T^2 - \sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (\varepsilon^2(t) - \sigma^2)dt - \frac{1}{T} \langle J_T^{-1} V_T, V_T \rangle,$$

$$E(\hat{\sigma}_T^2 - \sigma^2)^2 \le 2E\left( \frac{1}{T} \int_0^T (\varepsilon^2(t) - \sigma^2)dt \right)^2 +$$

$$+ 2E\left( \frac{1}{T} \langle J_T^{-1} V_T, V_T \rangle \right)^2. \quad (8)$$

Розглянемо другий доданок правої частини нерівності (8)

$$2E\left( \frac{1}{T} \langle J_T^{-1} V_T, V_T \rangle \right)^2 =$$

$$= \frac{2}{T^2} E \sum_{i,j=1}^{q} (J_T^{-1})_{il} d_{iT}^{-1} \int_0^T x_i(t)\varepsilon(t)dt d_{jT}^{-1} \int_0^T x_j(s)\varepsilon(s)ds \times$$

$$\times \sum_{k,l=1}^{q} (J_T^{-1})_{kj} d_{kT}^{-1} \int_0^T x_k(u)\varepsilon(u)du d_{lT}^{-1} \int_0^T x_l(v)\varepsilon(v)dv,$$

За формулою Ісерліса [11] маємо

$$\frac{1}{d_{iT} d_{jT} d_{kT} d_{lT}} \int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T x_i(t) x_j(s) x_k(u) x_l(v) \times$$

$$\times E\varepsilon(t)\varepsilon(s)\varepsilon(u)\varepsilon(v) dt ds du dv =$$

$$= \frac{1}{d_{iT} d_{jT}} \int_0^T\int_0^T x_i(t) x_j(s) B(t-s) dt ds \times$$

$$\times \frac{1}{d_{kT} d_{lT}} \int_0^T\int_0^T x_k(u) x_l(v) B(u-v) du dv +$$

$$+ \frac{1}{d_{iT} d_{kT}} \int_0^T\int_0^T x_i(t) x_k(u) B(t-u) dt du \times$$

$$\times \frac{1}{d_{jT} d_{lT}} \int_0^T\int_0^T x_j(s) x_l(v) B(s-v) ds dv +$$

$$+ \frac{1}{d_{iT} d_{lT}} \int_0^T\int_0^T x_i(t) x_l(v) B(t-v) dt dv \times$$

$$\times \frac{1}{d_{jT} d_{kT}} \int_0^T\int_0^T x_j(s) x_k(u) B(s-u) ds du.$$

Права частина останньої рівності прямує при $T \to \infty$ до

$$\sum_{i,j=1}^{q} \left( \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mu(d\lambda) \right)^{-1} \right)_{i,j} \sum_{k,l=1}^{q} \left( \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mu(d\lambda) \right)^{-1} \right)_{k,j} \times$$

$$\times \Bigg[ (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu^{ij}(d\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu^{kl}(d\lambda) +$$

$$+ (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu^{ik}(d\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu^{jl}(d\lambda) +$$

$$+ (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu^{il}(d\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu^{jk}(d\lambda) \Bigg].$$

Тобто $2E\left(\frac{1}{T}\langle J_T^{-1} V_T, V_T \rangle\right)^2$ має порядок $O(T^{-2})$ при $T \to \infty$.

Тепер розглянемо перший доданок правої частини нерівності (8)

$$2E\left( \frac{1}{T} \int_0^T (\varepsilon^2(t) - \sigma^2) dt \right)^2 = \frac{4}{T^2} \int_0^T\int_0^T B^2(t-s) dt ds.$$

Після заміни змінних $t' = t/T,\ s' = s/T$ отримуємо

$$2E\left( \frac{1}{T} \int_0^T (\varepsilon^2(t) - \sigma^2) dt \right)^2 = 4\int_0^1\int_0^1 B^2(T(t'-s')) dt' ds'.$$

Якщо виконано умову А3 і $\alpha > \frac{1}{2}$, то $B^2 \in L_1(R^1)$, і тоді $\int_0^1\int_0^1 B^2(T(t-s)) dt ds = O(T^{-1})$.

Якщо $\alpha < \frac{1}{2}$, то $\int_0^1\int_0^1 B^2(T(t-s)) dt ds \le$

$$\le \frac{\sigma^4}{T^{2\alpha}} \frac{1}{(1-2\alpha)(1-\alpha)}.$$

Якщо $\alpha = \frac{1}{2}$, то $\int_0^1\int_0^1 B^2(T(t-s)) dt ds \le$

$$\le \frac{8\sigma^4}{3} T^{-\frac{1}{2}}.$$

Отримуємо такий результат.

**Теорема 2.** Якщо виконано умови А1, А3, АВ, В1, то

$$E(\hat{\sigma}_T^2 - \sigma^2)^2 = O(T^{-\Delta}), \qquad (9)$$

де $\Delta > 0$ варіюється залежно від величини $\alpha$, тобто $\hat{\sigma}_T^2$ — консистентна в середньому квадратичному оцінка $\sigma^2$.

Із нерівності Чебишова, очевидно, випливає, що $\hat{\sigma}_T^2$ є і слабкоконсистентною оцінкою $\sigma^2$, тобто

$$\hat{\sigma}_T^2 \xrightarrow[T\to\infty]{\mathrm{P}} \sigma^2. \qquad (10)$$

Зауважимо, що теорема 2 залишається справедливою, якщо замість умови А3 виконується загальніша умова

**А3′.** $B(t) = \sum_{j=0}^{r} \sigma_j^2 B_{\alpha_j,\varphi_j}(t),\ r \ge 0,$

$$B_{\alpha_j,\varphi_j}(t) = \frac{\cos\varphi_j t}{(1+t^2)^{\frac{\alpha_j}{2}}},\ 0 \le \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_r,$$

$$\alpha_j \in (0,1),$$

$$\sum_{j=0}^{r} \sigma_j^2 = \sigma^2 > 0,\ \sigma_j^2 \geq 0,\ j = \overline{0,r}.$$

При виконанні умов A1, A2, AB, B1 співвідношення (9) залишається справедливим, якщо для деякого $\Delta > 0$

$$T^{-2}\int_0^T\int_0^T B^2(t-s)\,dt\,ds = O(T^{-\Delta}). \qquad (11)$$

**Оцінка другого спектрального моменту**

Дж. Ліндгрен у праці [12] запропонував оцінку другого спектрального моменту $\lambda^2$ гаусового стаціонарного процесу $\varepsilon(t), t \in [0,T]$, вигляду

$$\hat{\gamma}_{1T} = \frac{1}{Nh^2}\sum_{k=1}^{N}(\varepsilon(kh) - \varepsilon((k-1)h))^2,\ Nh = T.$$

Введемо додаткову умову

**A4.** $|B'''(t)| \leq M < \infty, t \geq 0.$

Нескладно довести таке твердження

**Теорема 3.** Якщо виконано умови A1, A2 і A4, то дисперсія оцінки Ліндгрена припускає мажоранту

$$D\hat{\gamma}_{1T} \leq \frac{h}{T}(2\lambda_2^2 + o(h)) + O(h^2) + 32\lambda_2 Mh +$$
$$+ O(h)T^{-1} + \frac{16}{T}\int_0^T (B''(t))^2 dt. \qquad (12)$$

***Наслідок* 1.** Припустимо, що в умовах теореми 3 $N = [T^2],\ h = \frac{T}{[T^2]}$, тоді

$$D\hat{\gamma}_{1T} \leq \frac{16}{T}\int_0^T (B''(t))^2 dt + O(T^{-1}). \qquad (13)$$

Зауважимо, що

$$E(\hat{\gamma}_{1T} - \lambda_2)^2 = D\hat{\gamma}_{1T} + (E\hat{\gamma}_{1T} - \lambda_2)^2. \qquad (14)$$

Легко зрозуміти, що за умови A2

$$E\hat{\gamma}_{1T} = \frac{1}{Nh^2}\sum_{k=1}^{N} E(\varepsilon(kh) - \varepsilon((k-1)h))^2 =$$
$$= \frac{1}{Nh^2}N(2(B(0) - B(h))) = \lambda_2 + o(h). \qquad (15)$$

З (14) і (15) випливає, що

$$E(\hat{\gamma}_{1T} - \lambda_2)^2 = D\hat{\gamma}_{1T} + o(h). \qquad (16)$$

Коли $B(t) = \sigma^2 \frac{\cos\varphi t}{(1+t^2)^{\frac{\alpha}{2}}},\ \alpha \in (0,1)$, то $B''(t) = O(T^{-\alpha})$.

Якщо $\alpha < \frac{1}{2}$, то $\frac{1}{T}\int_0^T (B''(t))^2 dt = O(T^{-2\alpha})$.

Якщо $\alpha > \frac{1}{2}$, то $\frac{1}{T}\int_0^T (B''(t))^2 dt = O(T^{-1})$, бо $B'' \in L_2(R^1)$.

Якщо $\alpha = \frac{1}{2}$, то $\frac{1}{T}\int_0^T (B''(t))^2 dt = O(T^{-\frac{1}{2}})$.

***Наслідок* 2.** За умов A1, A3 при $N = [T^2]$, $h = \frac{T}{[T^2]}$ $D\hat{\gamma}_{1T} = O(T^{-\Delta})$, де $\Delta > 0$ варіюється залежно від величини $\alpha$.

З (16) отримуємо, що в умовах наслідку 2

$$E(\hat{\gamma}_{1T} - \lambda_2)^2 = O(T^{-\Delta}).$$

**B3**. $|x_i(t') - x_i(t'')| \leq L_i|t' - t''|,\ t', t'' \in [0,\infty)$, $i = \overline{1,q}$.

Для моделі спостережень (1) визначимо оцінку $\lambda^2$ у вигляді $(Nh = T)$

$$\hat{\lambda}_{2T} = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\hat{\varepsilon}(kh) - \hat{\varepsilon}((k-1)h)}{h}\right)^2 h =$$
$$= \frac{1}{Nh^2}\sum_{k=1}^{N}(\hat{\varepsilon}(kh) - \hat{\varepsilon}((k-1)h))^2,$$

$$\hat{\varepsilon}(kh) = y(kh) - \hat{y}(kh) = \varepsilon(kh) - \sum_{i=1}^{q}(\hat{\theta}_{iT} - \theta_i)x_i(kh).$$

Очевидно,

$$\hat{\lambda}_{2T} = \frac{1}{Nh^2}\sum_{k=1}^{N}(\varepsilon(kh) - \varepsilon((k-1)h))^2 -$$
$$- \frac{2}{Nh^2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{q}(\hat{\theta}_{iT} - \theta_i)(\varepsilon(kh) - \varepsilon((k-1)h))^2 \times$$
$$\times (x_i(kh) - x_i((k-1)h)) +$$
$$+ \frac{1}{Nh^2}\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{q}(\hat{\theta}_{iT} - \theta_i)(x_i(kh) - x_i((k-1)h))\right)^2 =$$
$$= \hat{\gamma}_{1T} + \hat{\gamma}_{2T} + \hat{\gamma}_{3T}.$$

Розглянемо $E\hat{\lambda}_{2T}$.

Враховуючи співвідношення (5) та B3, маємо для довільного $\varepsilon > 0$ і достатньо великих $T(T > T_0)$

$$|E\hat{\gamma}_{3T}| \le \sum_{i,j=1}^{q} (K^{ij} + \varepsilon) d_{iT}^{-1} d_{jT}^{-1} \frac{1}{Nh^2} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{N} |x_i(kh) - x_i((k-1)h)||x_j(kh) - x_j((k-1)h)| \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{q} L_i L_j (K^{ij} + \varepsilon) d_{iT}^{-1} d_{jT}^{-1} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0. \quad (17)$$

Аналогічно

$$|E\hat{\gamma}_{2T}| \le$$

$$\le 2\left(\lambda_2^{\frac{1}{2}} + o(h)\right) \sum_{i=1}^{q} L_i (K^{ii} + \varepsilon) d_{iT}^{-1} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0. \quad (18)$$

Таким чином, з (15), (17), (18) отримуємо

$$E\hat{\lambda}_{2T} = \lambda_2 + o(h) + O\left(\left(\min_{1\le i\le q} d_{iT}\right)^{-1}\right). \quad (19)$$

Розглянемо $D\hat{\lambda}_{2T} = E\hat{\lambda}_{2T}^2 - (E\hat{\lambda}_{2T})^2$. Оскільки виконується (19), то

$$(E\hat{\lambda}_{2T})^2 = \lambda_2^2 + o(h) + O\left(\left(\min_{1\le i\le q} d_{iT}\right)^{-1}\right).$$

Маємо

$$E\hat{\lambda}_{2T}^2 = E\hat{\gamma}_{1T}^2 + E\hat{\gamma}_{2T}^2 + E\hat{\gamma}_{3T}^2 +$$

$$+ 2E\hat{\gamma}_{1T}\hat{\gamma}_{2T} + 2E\hat{\gamma}_{1T}\hat{\gamma}_{3T} + 2E\hat{\gamma}_{2T}\hat{\gamma}_{3T};$$

$$E\hat{\gamma}_{2T}^2 = 4E\left[\frac{1}{Nh^2}\sum_{i=1}^{q}(\hat{\theta}_{iT} - \theta_i) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=1}^{N} (\varepsilon(kh) - \varepsilon((k-1)h))(x_i(kh) - x_i((k-1)h))\right]^2 \le$$

$$\le \frac{4q}{Nh^2} \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{N} \sqrt{E(\hat{\theta}_{iT} - \theta_i)^4 E(\varepsilon(kh) - \varepsilon((k-1)h))^4} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{N} (x_i(kh) - x_i((k-1)h))^2,$$

$$E(\varepsilon(kh) - \varepsilon((k-1)h))^4 = 12(B(0) - B(h))^4 =$$

$$= 3(\lambda_2^2 + o(h))h^4. \quad (20)$$

Використовуючи умову B3, співвідношення (5) і (20), для довільного $\varepsilon > 0$ і $T > T_0$ маємо

$$E\hat{\gamma}_{2T}^2 \le$$

$$\le 4\sqrt{3} q (\lambda_2 + o(h)) \sum_{i=1}^{q} L_i^2 (K^{ii} + \varepsilon) d_{iT}^{-2} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0. \quad (21)$$

Аналогічно

$$E\hat{\gamma}_{3T}^2 \le q^3 \sum_{i=1}^{q} L_i^4 (K^{ii} + \varepsilon)^2 d_{iT}^{-4} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0, \quad (22)$$

$$E\hat{\gamma}_{1T}^2 \le$$

$$\le \frac{N}{Nh^2} \sum_{k=1}^{N} (\varepsilon(kh) - \varepsilon((k-1)h))^4 \le 3\lambda_2^2 + o(h). \quad (23)$$

Крім цього, з (21) і (23) маємо

$$|E\hat{\gamma}_{1T}\hat{\gamma}_{2T}| \le 2\left(\sqrt{3}\lambda_2^{\frac{3}{2}} + o(h)\right) 3^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{q} L_i (K^{ii} + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} d_{iT}^{-1} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0.$$

Із (22) і (23) знаходимо

$$|E\hat{\gamma}_{1T}\hat{\gamma}_{3T}| \le$$

$$\le (\sqrt{3}\lambda_2 + o(h)) q^{\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^{q} L_i^2 (K^{ii} + \varepsilon) d_{iT}^{-2} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0.$$

Враховуючи (21) і (22), отримуємо

$$|E\hat{\gamma}_{2T}\hat{\gamma}_{3T}| \le 2q^2 3^{\frac{1}{4}} (\lambda_2 + o(h))^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{q} L_i (K^{ii} + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} d_{iT}^{-1} \sum_{i=1}^{q} L_i^2 (K^{ii} + \varepsilon) d_{iT}^{-2} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0.$$

Із попередніх оцінок випливає таке твердження.

**Теорема 4.** Якщо виконано умови A1, A2, A4, AB, B1, B3, то

$$D\hat{\lambda}_{2T} = E\hat{\gamma}_{1T} + o(h) + O\left(\left(\min_{1\le i\le q} d_{iT}\right)^{-1}\right).$$

***Наслідок*** **3.** За умов A1, A3, AB, B1, B3 при $N = [T^2]$, $h = \frac{T}{[T^2]}$

$$D\hat{\lambda}_{2T} = O(T^{-\Delta}) + O\left(\left(\min_{1\le i\le q} d_{iT}\right)^{-1}\right).$$

Зауважимо, що в умовах теореми 4

$$E(\widehat{\lambda}_{2T}-\lambda_2)^2 = D\widehat{\gamma}_{1T}+o(h)+O\left(\left(\min_{1\le i\le q} d_{iT}\right)^{-1}\right),$$

а в умовах наслідку 3

$$E(\widehat{\lambda}_{2T}-\lambda_2)^2 = O(T^{-\Delta})+O\left(\left(\min_{1\le i\le q} d_{iT}\right)^{-1}\right),$$

тобто $\widehat{\lambda}_{2T}$ – консистентна в середньому квадратичному оцінка $\lambda_2$. Отже

$$\widehat{\lambda}_{2T} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathrm{P}} \lambda_2. \qquad (24)$$

У випадку виконання умов теореми 3 із (12), (13) випливає співвідношення (24), якщо

$$T^{-1}\int_0^T (B''(t))^2 dt \xrightarrow[T\to\infty]{} 0. \qquad (25)$$

**Основні результати**

**Теорема 5.** Якщо виконано умови A1, A2, A4, AB, B1–B3 і (11), (25), то

$$\mathrm{P}\left\{b_T\left(\frac{\widehat{Z}_T}{\widehat{\sigma}_T}-\widehat{a}_T\right)<z\right\} \xrightarrow[T\to\infty]{} \Lambda(z), z\in R^1, \qquad (26)$$

де

$$\widehat{a}_T=(2\ln T)^{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}\ln\frac{\widehat{\lambda}_{2T}}{\widehat{\sigma}_T^2}-\ln 2\pi}{(2\ln T)^{\frac{1}{2}}},\ b_T=(2\ln T)^{\frac{1}{2}}.$$

Співвідношення (26) є також справедливим при виконанні умов A1, A3, AB, B1–B3.

Д о в е д е н н я. Очевидно,

$$b_T(\widehat{\sigma}_T^{-1}\widehat{Z}_T-\widehat{a}_T)= = b_T(\widehat{\sigma}_T^{-1}\widehat{Z}_T-a_T)+b_T(a_T-\widehat{a}_T), \qquad (27)$$

$$b_T\widehat{a}_T = 2\ln T+\frac{1}{2}\ln\widehat{\lambda}_{2T}-\frac{1}{2}\ln\widehat{\sigma}_T^2-\ln 2\pi.$$

Тоді

$$b_T(a_T-\widehat{a}_T)=\frac{1}{2}(\ln\widehat{\lambda}_{2T}-\ln\lambda_2)-\frac{1}{2}(\ln\widehat{\sigma}_T^2-\ln\sigma^2).$$

Доведемо, що

$$\ln\widehat{\lambda}_{2T} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathrm{P}} \ln\lambda_2. \qquad (28)$$

Маємо

$$\ln\widehat{\lambda}_{2T}-\ln\lambda_2=\ln\left(1+\frac{\widehat{\lambda}_{2T}-\lambda_2}{\lambda_2}\right).$$

Нехай $\varepsilon\in(0,\lambda_2)$ фіксовано і виконується нерівність

$$-\frac{\varepsilon}{\lambda_2}<\frac{\widehat{\lambda}_{2T}-\lambda_2}{\lambda_2}<\frac{\varepsilon}{\lambda_2}.$$

Тоді, завдяки монотонності функції $\ln x$, можемо записати, що

$$\ln\left(1-\frac{\varepsilon}{\lambda_2}\right)<\ln\left(1+\frac{\widehat{\lambda}_{2T}-\lambda_2}{\lambda_2}\right)<\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{\lambda_2}\right),$$

$$\ln\left(1-\frac{\varepsilon}{\lambda_2}\right)\ge-\frac{\varepsilon}{\lambda_2-\varepsilon}.$$

Оскільки в околі нуля $\ln(1+x)\le x$, то

$$\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{\lambda_2}\right)<\frac{\varepsilon}{\lambda_2}<\frac{\varepsilon}{\lambda_2-\varepsilon}.$$

Таким чином, $\left|\ln\left(1+\frac{\widehat{\lambda}_{2T}-\lambda_2}{\lambda_2}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{\lambda_2-\varepsilon}$ там, де $\frac{|\widehat{\lambda}_{2T}-\lambda_2|}{\lambda_2}<\varepsilon$, тобто

$$\left\{\frac{|\widehat{\lambda}_{2T}-\lambda_2|}{\lambda_2}<\varepsilon\right\}\subset\left\{\left|\ln\left(1+\frac{\widehat{\lambda}_{2T}-\lambda_2}{\lambda_2}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{\lambda_2-\varepsilon}\right\}.$$

З цього включення випливає, що

$$\mathrm{P}\left\{\left|\ln\left(1+\frac{\widehat{\lambda}_{2T}-\lambda_2}{\lambda_2}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{\lambda_2-\varepsilon}\right\}\xrightarrow[T\to\infty]{}1$$

або

$$\mathrm{P}\left\{\left|\ln\left(1+\frac{\widehat{\lambda}_{2T}-\lambda_2}{\lambda_2}\right)\right|\ge\frac{\varepsilon}{\lambda_2-\varepsilon}\right\}\xrightarrow[T\to\infty]{}0,$$

і (28) доведено.

Аналогічно отримуємо $\ln\widehat{\sigma}_T^2 \xrightarrow[T\to\infty]{\mathrm{P}} \ln\sigma^2$.

Це означає, що у формулі (27) другий доданок правої частини прямує до нуля за ймовірністю.

Покладемо

$$\varsigma_T'=b_T(\widehat{\sigma}_T^{-1}\widehat{Z}_T-a_T),\varsigma_T=b_T(\sigma^{-1}\widehat{Z}_T-a_T).$$

Маємо

$$\varsigma_T - \varsigma'_T = b_T \frac{\widehat{Z}_T}{\sigma}\left(\frac{\widehat{\sigma}_T - \sigma}{\widehat{\sigma}_T}\right) =$$

$$= (\varsigma_T + a_T b_T)\frac{\widehat{\sigma}_T^2 - \sigma^2}{\widehat{\sigma}_T(\widehat{\sigma}_T + \sigma)}.$$

Використовуючи (10) і враховуючи слабку збіжність $\varsigma_T$, маємо

$$\varsigma_T(\widehat{\sigma}_T^2 - \sigma^2)\xrightarrow[T\to\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

З іншого боку, за (11)

$$a_T^2 b_T^2 E(\widehat{\sigma}_T^2 - \sigma^2)^2 \le O(T^{-\Delta}\ln T)\xrightarrow[T\to\infty]{} 0,$$

тобто

$$a_T b_T(\widehat{\sigma}_T^2 - \sigma^2)\xrightarrow[T\to\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Із формули (27) бачимо, що граничний розподіл $b_T(\widehat{\sigma}_T^{-1}\widehat{Z}_T - \widehat{a}_T)$ збігається з граничним розподілом $b_T(\sigma^{-1}\widehat{Z}_T - a_T)$. Теорему доведено.

Враховуючи асимптотичну незалежність максимуму і мінімуму гауссового стаціонарного процесу ([6], с. 251, теорема 11.1.5) для $\widehat{Z}_T^* = \max\limits_{0\le t\le T}|\widehat{\varepsilon}(t)|$ отримуємо аналогічно проведеним міркуванням такий факт.

**Теорема 6.** В умовах теореми 5

$$\mathrm{P}\left\{b_T\left(\frac{\widehat{Z}_T^*}{\widehat{\sigma}_T} - \widehat{a}_T\right) < z\right\}\xrightarrow[T\to\infty]{}\Lambda^2(z),\ z\in R^1.$$

**Висновки**

У роботі було отримано граничні теореми для екстремальних залишків у лінійній моделі регресії з гауссовим стаціонарним сильнозалежним випадковим шумом і неперервним часом. Ці теореми стверджують, що розподіли нормованих певним чином максимальних залишків або максимальних абсолютних величин цих залишків збігаються до подвійної експоненти. Знайдено консистентні оцінки дисперсії та 2-го спектрального моменту випадкового шуму, що підставляються в нормуючі функції.

Отримання швидкості збіжності в цих граничних теоремах і побудова критеріїв перевірки гіпотез про адекватність розглянутої моделі регресії є природним напрямом продовження дослідження.


1. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. – М.: Мир, 1980. – 455 с.
2. *A.V. Ivanov,* Asymptotic theory of nonlinear regression. Netherlands, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1997, 330 p.
3. *Іванов О.В, Мацак І.К.* Граничні теореми для екстремальних залишків у лінійній та нелінійній моделях регресії // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2012. – № 86. – С. 69–80.
4. *B.V. Gnedenko,* "Sur la distribution limit du terme maximum d'une serie aleatoire", Ann. Math., vol. 44, no. 3, pp. 423–453, 1943.
5. *Галамбош Я.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. – М.: Наука, 1984. – 303 с.
6. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. – М.: Мир, 1989. – 392 с.
7. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. – М.: Мир, 1969. – 399 с.
8. *U. Grenander and M. Rosenblatt,* Statistical analysis of stationary time series. New York: Chelsea Pub. Co., 1984, 308 p.
9. *Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А.* Гауссовские случайные процессы. – М.: Наука, 1970. – 384 с.
10. *Іванов О.В., Савич І.М.* $\mu$-припустимість спектральної щільності сильнозалежного випадкового шуму в нелінійних моделях регресії // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2009. – № 1. – С. 143–148.
11. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1965. – 656 с.
12. *G. Lindgren,* "Spectral moment estimation by means of level crossings", Biometrica, vol. 61, no. 3, pp. 401–418, 1974.


Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
8 червня 2013 року