УДК 517.9

В.І. Козак

ОБЕРНЕНА СПЕКТРАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ БЛОЧНИХ МАТРИЦЬ ТИПУ ЯКОБІ, ВІДПОВІДНИХ ДІЙСНІЙ ДВОВИМІРНІЙ ПРОБЛЕМІ МОМЕНТІВ

The purpose of this paper is to find matrices that correspond to some finite measure with compact support on the real plane, in other words, to solve the inverse spectral problem for the present two-dimensional moment problem (on the real plane). The paper defines the Jacobi matrix corresponding to the real problem of two-dimensional points and system of orthonormal polynomials relative to a certain extent with compact support on the real plane obtained by Schmidt orthogonalization in a certain order of two-index set of functions (indices belonging to a set of natural numbers including zero) of defined properties. Also, we obtain a pair of matrices with block tridiagonal structure acting in the space such as the algebraic commuting self-adjoint limited operators and define some of their properties. Previous research elucidates this issue only partially compared with the information presented in this paper.

Вступ

Добре відомий зв'язок класичної проблеми моментів П.Л. Чебишева, А.А. Маркова із тридіагональними матрицями Якобі [1]. Оберненою і прямою спектральними задачами в термінології Ю.М. Березанського [2] є побудова матриці Якобі за мірою, яка є розв'язком деякої проблеми моментів, та відновлення міри за заданою матрицею Якобі. Така задача розв'язана для випадків класичної проблеми моментів [2], комплексної проблеми моментів у степеневій формі [3], тригонометричної проблеми моментів [4], проблеми моментів у експоненціальній формі [5] тощо.

Постановка задачі

Розв'язок дійсної двовимірної проблеми моментів є добре відомим [2, 6, 7]. Але ні пряма, ні обернена задачі у наведеній вище постановці раніше не розглядалися. Тому завдання роботи – знайти такі матриці, які відповідатимуть деякій скінченній мірі з компактним носієм на дійсній площині, тобто потрібно розв'язати обернену спектральну задачу для дійсної двовимірної проблеми моментів (на дійсній площині).

Попередні відомості

Дійсна двовимірна проблема моментів полягає у знаходженні умов на задану послідовність дійсних чисел $a_{n,m}$, $n,m \in \mathrm{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, яка породжує позитивну міру Бореля $d\rho(x,y)$ на дійсній площині $\mathbb{R}$, так що

$$a_{n,m} = \int_{R^2} x^n y^m d\rho(x,y), \; n,m \in \mathbb{N}_0. \qquad (1)$$

Проблема розв'язується за умови, що множина функцій $\{x^n, y^m\}$, $n,m \in \mathbb{N}_0$, є щільною в $L_2(R^2, d\rho(x,y))$. Якщо послідовність $a_{n,m}$ має зображення (1), то має місце додатна визначеність

$$\sum_{n,m,p,q \in \mathrm{N}_0} f_{n,m} \bar{f}_{pq} a_{n+p,m+q} \geq 0 \qquad (2)$$

для довільної фінітної послідовності $f_{n,m}$, $n,m \in \mathbb{N}_0$ [6]. Якщо до умови (2) додати умову

$$\left(\sum_{\nu=0}^{2n} \binom{2n}{\nu} |a_{2n-\nu,\nu}| \right)^{1/(2n)} = o(n),$$

то разом із (2) зображення (1) для заданої послідовності $a_{n,m}$ є єдиним [7].

Також відомо, що двовимірна проблема моментів розв'язна, якщо при будь-якому фіксованому n_0 така одновимірна проблема моментів $a_m = c_{m,2n_0} + c_{m,2(n_0+1)}$ розв'язна однозначно, причому міра $\rho(x,y)$, взагалі кажучи, не єдина.

Розв'язання задачі – побудова матриць

Нехай $d\rho(x,y)$ – борелева міра із компактним носієм на дійсній площині $\mathbb{R}$. Припустимо, що не тільки множина функцій $\{x^n y^m\}$, $n,m \in \mathbb{N}_0$, є щільною в $L_2(R^2, d\rho(x,y))$, а й самі функції є лінійно незалежними в $L_2(R^2, d\rho(x,y))$. Оскільки множина двохіндексна, то виберемо такий порядок у множині $\{x^n y^m\}$ для ортогоналізації її за Шмідтом:

$$\begin{array}{l} 1 = x^0 y^0 \\ x^1 y^0,\ x^0 y^1 \\ x^2 y^0,\ x^1 y^1,\ x^0 y^2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ x^n y^0,\ x^{n-1} y^1, \ldots,\ x^1 y^{n-1},\ x^0 y^n \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \end{array} \qquad (3)$$

У результаті ортогоналізації набору (3) отримуємо множину ортонормованих поліномів, які занумеровуємо у такий порядок:

$$\begin{array}{l} 1 = P_{0,0}(z) \\ P_{1,0}(z), P_{1,1}(z) \\ P_{2,0}(z), P_{2,1}(z), P_{2,2}(z) \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ P_{n,0}(z), P_{n,1}(z), \ldots, P_{n,n-1}(z), P_{n,n}(z) \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \end{array}$$

Тут кожний поліном має вигляд

$$P_{n,\alpha}(z) = k_{n,\alpha} x^{n-\alpha} y^{n-|\alpha-n|} + R_{n,\alpha},$$

$$\alpha = 0,1,\ldots,n,\ k_{n,\alpha} > 0,\ n \in \mathbb{N}_0,$$

де $R_{n;\alpha}$ позначає попередню частину відповідного полінома.

Теорема

Обмежений самоспряжений оператор A множення на незалежну змінну x, який комутує із оператором B множення на незалежну змінну y в просторі $L_2(R^2, d\rho(x,y))$, має в ортонормованому базисі (4) блочну тридіагональну структуру типу Якобі в просторі

$$l_2 = H_0 \oplus H_1 \oplus \ldots,\ H_n = R^n,\ n \in \mathbb{N}_0. \qquad (4)$$

1. Матриця самоспряженого оператора A має вигляд

$$J_B = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} a_n : H_n \to H_{n+1}, \\ b_n : H_n \to H_n, \\ c_n : H_{n+1} \to H_n,\ n \in \mathbb{N}_0, \end{array}$$

де

$$a_n = \left.\left[\underbrace{\begin{array}{ccccc} * & * & * & \ldots & * \\ a_{n;1,0} & * & * & \ldots & * \\ 0 & a_{n;1,2} & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n;n+1,n} \end{array}}_{n+1}\right]\right\}{\scriptstyle n+2},$$

$$c_n = \left.\left[\underbrace{\begin{array}{cccccc} * & c_{n;0,1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ * & * & c_{n;1,2} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \ldots & c_{n;n-1,n} & 0 \\ * & * & * & \ldots & * & c_{n;n,n+1} \end{array}}_{n+2}\right]\right\}{\scriptstyle n+1}.$$

У матрицях символ “*” позначає елементи, які можуть бути і нульовими, і ненульовими.

В J_A елемент b_n є $((n+1)\times(n+1))$-матрицею: $b_n = (b_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n}$, ($b_0 = (b_{0;0,0})$ — скаляр); a_n є $((n+2)\times(n+1))$-матрицею: $a_n = (a_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n+1,n}$; c_n є $((n+1)\times(n+2))$-матрицею: $c_n = (c_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Елементи

$$c_{n;\alpha,\beta},\ \alpha = 0,1,\ldots,n,\ \beta = \alpha+2, \alpha+3, \ldots, n+1;$$

$$a_{n;\alpha,\beta},\ \beta = 0,1,\ldots,n,\ \alpha = \beta+2, \beta+3, \ldots, n+1; n \in \mathbb{N}_0,$$

в матрицях a_n, b_n і c_n рівні нулю.

Елементи

$$c_{n;\alpha,\alpha+1},\ a_{n;\alpha+1,\alpha},\ \alpha = 0,1,\ldots,n,\ n \in \mathbb{N}_0,$$

в матрицях a_n, b_n і c_n завжди додатні.

Так, можна казати, що кожний верхній правий кут в c_n, починаючи з головної діагоналі, що стартує з нижнього правого кута c_n, містить нульові елементи, і кожний нижній лівий кут в a_n, починаючи з головної діагоналі, що стартує з правого нижнього кута a_n, також містить нульові елементи.

У скалярній формі матриця є багатодіагональною зі зростаючою кількістю ненульових діагоналей.

Спряжена матриця має такий самий вигляд, оскільки визначає самоспряжений оператор, тобто є симетричною.

2. Матриця оператора B має вигляд

$$J_B = \begin{bmatrix} w_0 & v_0 & 0 & 0 & \cdots \\ u_0 & w_1 & v_1 & 0 & \cdots \\ 0 & u_1 & w_2 & v_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} u_n : H_n \to H_{n+1}, \\ w_n : H_n \to H_n, \\ v_n : H_{n+1} \to H_n,\ n \in \mathbb{N}_0, \end{array}$$

де

$$u_n = \left.\begin{bmatrix} u_{n;0,0} & * & * & \dots & * \\ 0 & u_{n;1,1} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & u_{n;2,2} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{n;n,n} \\ \underbrace{0 \quad\quad 0 \quad\quad 0}_{n+1} & & & \dots & 0 \end{bmatrix}\right\} n+2,$$

$$\nu_n = \left.\begin{bmatrix} \nu_{n;0,0} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ * & \nu_{n;1,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & \nu_{n;n-1,n-1} & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & * & \nu_{n;n,n} & 0 \end{bmatrix}\right\} n+1.$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n+2}$$

Символом "*" позначені елементи, які можуть бути і нульовими, і ненульовими.

В J_B елемент w_n є $((n+1)\times(n+1))$-матрицею: $w_n = (w_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n}$, ($w_0 = (w_{0;0,0})$ – скаляр); u_n є $((n+2)\times(n+1))$-матрицею: $u_n = (u_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n+1,n}$; v_n є $((n+2)\times(n+1))$-матрицею: $v_n = (v_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Елементи

$$v_{n;\alpha,\beta},\ \alpha = 1,\dots,(n+1),\ \beta = \alpha-1,\dots,n;$$

$$u_{n;\alpha,\beta},\ \alpha = 0,1,\dots,n,\ \beta = \alpha+1,\dots,n+1;\ n \in \mathbb{N}_0,$$

в матрицях u_n, w_n і v_n рівні нулю.

Елементи

$$v_{n;\alpha,\alpha},\ \alpha = 0,1,\dots,n;$$

$$u_{n;\alpha,\alpha},\ \alpha = 0,1,\dots,n,\ n \in \mathbb{N}_0,$$

в матрицях u_n, w_n і v_n завжди додатні.

Так, можна казати, що кожний верхній правий кут в v_n, починаючи з другої діагоналі, що стартує з нижнього правого кута v_n, містить нульові елементи, і кожний нижній лівий кут в u_n, починаючи з другої діагоналі, що стартує з лівого верхнього кута u_n, також містить нульові елементи.

Така матриця в скалярній формі також є багатодіагональною зі зростаючою кількістю ненульових діагоналей.

3. Матриці J_A, J_B діють на векторах $f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in l_2$ таким чином:

$$\begin{aligned} (J_A f)_n &= a_{n-1} f_{n-1} + b_n f_n + c_n f_{n+1}, \\ (J_B f)_n &= u_{n-1} f_{n-1} + w_n f_n + v_n f_{n+1}, \end{aligned} \tag{5}$$

де для зручності вважається $f_{-1} := 0$.

Доведення теореми базується на ортогональності поліномів (4) і зображенні (1), але через великий об'єм опускається в цій публікації і планується в наступних.

Висновки

Отримані матриці мають блочний тридіагональний вигляд і складну внутрішню структуру. Крім того, вони визначають пару обмежених алгебрично комутуючих операторів. Випадок класичної матриці Якобі є частинним випадком описаного в статті.

Пряма спектральна задача лишилась не розглянутою. Зокрема, не розглянуто розв'язання системи різницевих рівнянь (5), утворених знайденими в роботі матрицями, та, власне, дослідження внутрішньої структури самих матриць, пошук умов на коефіцієнти, за яких відповідні матриці є комутуючими. Це і буде предметом подальших досліджень.

1. *Ахиезер Н.И.* Классическая проблема моментов. – М.: Гос. физ.-мат. лит., 1961. – 312 с.

2. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наук. думка, 1965. – 450 с.

3. *Yu.M. Berezansky and M.E. Dudkin,* “The complex moment problem and direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded normal matrices”, Methods Funct. Anal. Topology, vol. 12, no. 1, pp. 1–31, 2006.
4. *Yu.M. Berezansky and M.E. Dudkin,* “The direct and inverce spectral problems for the block Jacobi type unitary matrices”, Ibid, vol. 11, no. 4, pp. 327–345, 2005.
5. *Yu.M. Berezansky and M.E. Dudkin,* “The complex moment problem in the exponential form Berezansky”, Ibid, vol. 10, no. 4, pp. 1–10, 2004.
6. *E.K. Haviland,* “On the moment problem for distribution functions in more than one dimension”, Amer. J. Math., vol. 57, pp. 562–512, 1996.
7. *Эскин Г.И.* Достаточное условие разрешимости многомерной проблемы моментов // ДАН СССР. – 1960. – **133**, № 3. – С. 540–543.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
6 червня 2013 року