УДК $517.98 + 517.854$

Я.Ю. Санжаревський

# ВАРІАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ З ЛАПЛАСІАНОМ ПО МІРІ НА ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

We study the Dirichlet problem for the elliptic equation in the Hilbert space region. We aim at formulating the Dirichlet problem for the considered equation and the problem in a "weak form" implying the search of "weak solutions". In addition, the main task is to formulate and prove both existence and uniqueness of theorems for weak forms of the problem. We formulate and prove theorems of existence and unity of the first boundary-value problem and specifically source version of the formulated problem in the joint domain of left and right parts of the source equation. Moreover, the weak form of the problem will be solved by using the variation approach. We use methods of functional analysis to solve the problem and, in particular, the Riesz theorem. Also, the theory of unbound linear operators is widely used. We formulate and prove the theorem about existence and uniqueness of solutions for the equation in both source and weak forms. We succeed in studying and solving the first boundary value problem for the considered equation with the infinite-dimensional Laplace operator version introduced earlier by Bogdansky Yu.V. This fact gives a reason count on success in study of the second and third boundary value problems for the considered equation in a region of a Hilbert space.

## Вступ

Останнім часом становлять інтерес нескінченновимірні узагальнення класичних проблем математичної фізики. Тобто для кожної такої проблеми потрібно ввести необхідні принципово нові математичні об'єкти (оператори тощо), що дають можливість сформулювати відповідні задачі у нескінченновимірному варіанті. З переходом до нових операторів тощо виникають питання, яких не було у класичному випадку, що потребує більш ретельного підходу до дослідження відповідних задач. Зокрема, становлять інтерес узагальнення крайових задач математичної фізики. Праця присвячена саме першій крайовій задачі, отже, потрібно сформулювати аналог класичної умови Діріхле та ввести певним чином у розгляд оператор Лапласа для того, щоб отримати нескінченновимірний варіант рівняння типу Пуассона [1].

Формулювання крайових задач в обмеженій області нескінченновимірного гільбертового простору, зокрема, задачі Діріхле, істотно залежить від того, яким саме чином вводиться лапласіан. З початку 90-х рр. минулого століття з'явилась низка праць, присвячених різним версіям оператора Лапласа [2–4]. У 2011 р. Ю.В. Богданським була запропонована нова версія оператора Лапласа [5] у вигляді $\Delta = \mathrm{div} \circ \overline{\mathrm{grad}}$. У тій же праці було введено коректним чином обмежений оператор сліда для функцій з $D(\overline{\mathrm{grad}}) \subset L_2(G, d\mu)$ у нормі графіка $\overline{\mathrm{grad}}$, що дає змогу сформулювати умову Діріхле як природне узагальнення класичної задачі. Крім узагальнення класичної задачі Діріхле, можна формулювати задачу у слабкій формі для пошуку слабких розв'язків. У [1] в абстрактній формі сформульовано варіаційний підхід до розв'язання класичної форми задачі, що розглядається. Цей підхід може бути використаний для доведення теорем існування та єдиності слабкого розв'язку.

Для введеної Ю.В. Богданським версії лапласіана для вибраного рівняння раніше не було поставлено і, відповідно, досліджено будь-яку крайову задачу.

## Постановка задачі

Метою роботи є доведення теорем існування та єдиності слабкого розв'язку задачі Діріхле для розглянутого рівняння, а також доведення теорем існування та єдиності розв'язку типу "соболівського класу" для вихідного рівняння з відповідною крайовою умовою Діріхле.

## Попередні відомості

Нехай $H$ – сепарабельний дійсний гільбертів простір ($\dim H \le \infty$); $\mu$ – скінченна (невід'ємна) борелівська міра на $H$.

Позначимо через $C_b = C_b(H)$ простір усіх обмежених та неперервних функцій $f : H \to \mathbf{R}$ (усюди й надалі $\mathbf{R}$ – одновимірний дійсний простір); символом $C_b(H; H)$ позначимо простір усіх обмежених векторних полів $H \to H$; для будь-якого $n \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ – натуральний ряд) через $C_b^n = C_b^n(H)$ (відповідно, $C_b^n(H;H)$) позначимо простір усіх функцій $f \in C_b$ (відповідно, векторних полів $X \in C_b(H;H)$), що $n$ разів диференційовні за Фреше у кожній точці $x \in H$ з неперервними й обмеженими на всьому $H$ похідними $f^{(k)}(\cdot)$ (відповідно, $X^{(k)}(\cdot)$), $k \le n$.

Нехай $G$ — обмежена область в $H$ з межею $S = \partial G$. Через $C^n(G)$ позначимо сім'ю усіх функцій на $\overline{G}$, що допускають продовження на все $H$ до функцій класу $C_b^n$; символом $C_0^n(G)$ позначимо сім'ю функцій з $C^n(G)$, носії яких лежать у $G$. Аналогічно визначаємо $C(G)$ та $C(G;H)$.

Через $L_2(G) = L_2(G,\mu)$ позначимо простір інтегровних з квадратом вимірних функцій на $G$ відносно міри $\mu|_G$. Аналогічно через $L_2(G;H) = L_2(G;H,\mu)$ позначимо простір квадратично інтегровних векторних полів на $G$. Норму в $L_2(G;H)$ задаємо формулою: $|\!|\!| Z |\!|\!|^2 = \int_G \| Z(x) \|^2 \, d\mu$ (інтегровність векторного поля розуміємо у сенсі конструкції Бохнера).

Припускаємо, що межа $S$ області $G$ є гладким вкладеним в $H$ підбагатовидом корозмірності 1; поле одиничної зовнішньої нормалі межі $S$ може бути продовжене до векторного поля $n \in C_b^1(H;H)$.

Нехай $\Phi_t = \Phi_t^n$ — потік векторного поля $n$. Нехай міра $\mu$ диференційовна відносно поля $n$ у сильному сенсі: для кожної борелівської множини $A \in B(H)$ ($B(H)$ — борелівська $\sigma$-алгебра підмножин $H$) існує границя $\vartheta(A) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\mu(\Phi_t A) - \mu(A))$, звідки випливає, що $\vartheta = d_n\mu$ є борелівською мірою (знакозмінною), абсолютно неперервною відносно $\mu$. Логарифмічну похідну міри $\mu$ відносно поля $n$ позначимо символом $\rho_\mu = \rho_\mu^n \left( = \frac{d\vartheta}{d\mu} = div_n \mu \right)$. Існування поля $n$ із вказаними вище властивостями постулюємо та кажемо про "узгодженість $S$ з мірою $\mu$" (див. [5]).

Нехай $\varepsilon > 0$. Символом $S_\varepsilon$ позначимо $\varepsilon$-окіл множини $S$. У праці [6] (формула (13)) доведено, що при узгодженості $S$ з мірою $\mu$ має місце рівність: $\mu(S_\varepsilon) = O(\varepsilon)$ $(\varepsilon \to 0)$, а тому ([5], твердження 1) $C_0^1(G)$ щільно у $L_2(G)$.

Узгоджена з $S$ міра $\mu$ індукує на $S$ поверхневу міру [5, 6], яку позначимо $\mu_S$.

Подальші побудови потребують виконання двох додаткових умов на міру $\mu$:

а) нехай $u \in C^1(G) \subset L_2(G)$, тоді оператор $\mathrm{grad} : u \mapsto \mathrm{grad}(u) \in L_2(G;H)$ з областю визначення $C^1(G)$ допускає замикання;

б) $\rho_\mu^n |_G \in L_\infty(G)$.

Спільне виконання цих двох умов дає можливість коректно ввести оператор сліда $\gamma : L_2(G) \to L_2(S) = L_2(S,\mu_S)$ з областю визначення $D(\overline{\mathrm{grad}})$ (див. [5]). При цьому для функцій $u \in C^1(G)$: $\gamma(u) = u|_S$; $\gamma$ являє собою обмежений оператор з банахова в нормі графіка простору $D(\overline{\mathrm{grad}})$ в $L_2(S)$.

Оператор $\mathrm{div} : L_2(G;H) \to L_2(G)$ визначено формулою $\mathrm{div} = -(\overline{\mathrm{grad}}\,|_{Ker(\gamma)})^*$. Оператор Лапласа визначимо формулою $\Delta u = (\mathrm{div} \circ \overline{\mathrm{grad}})(u)$.

Усюди надалі у статті припускаємо узгодженість межі $S$ обмеженої області $G$ з мірою $\mu$ та виконання умов а) і б), що накладені на міру $\mu$.

Нехай $f \in L_2(G)$; $k \in C^1(G)$; $a \in C(G)$; $k \ge \delta > 0$ $(\forall x \in G)$; $a \ge \alpha > 0$ $(\forall x \in G)$. В силу леми 3 (див. нижче) для функцій $u \in D(\Delta)$ визначено $\mathrm{div}(k\,\overline{\mathrm{grad}}(u))$. Розглянемо рівняння

$$L(u) = \mathrm{div}(k\,\overline{\mathrm{grad}}(u)) - a\,u = f \qquad (1)$$

та поставимо питання про пошук розв'язку задачі Діріхле для рівняння (1) з крайовою умовою

$$\gamma(u) = \varphi, \qquad (2)$$

(тут $\varphi \in \mathrm{Im}(\gamma)$).

Скінченновимірний варіант поставленої задачі у випадку інваріантної міри досліджено, наприклад, в [1].

Для довільної $\varphi \in \mathrm{Im}(\gamma)$ існує функція $w \in D(\overline{\mathrm{grad}})$, для якої $\gamma(w) = \varphi$. Тоді для розв'язання задачі (1), (2), функція $u_1 = u - w$ задовольняє рівнянню

$$\operatorname{div}(k\,\overline{\operatorname{grad}}(u_1)) - a\,u_1 =$$
$$= f - \operatorname{div}(k\,\overline{\operatorname{grad}}(w)) + a\,w$$

з нульовою граничною умовою, а тому для будь-якого $v \in Ker(\gamma)$ задовольняє рівнянню

$$\int_G (k(\overline{\operatorname{grad}}(u_1), \overline{\operatorname{grad}}(v)) + a\,u_1 v)d\mu =$$
$$= -\int_G (vf + k(\overline{\operatorname{grad}}(w), \overline{\operatorname{grad}}(v)) + a\,wv)d\mu. \qquad (3)$$

Тим самим, якщо функція $u_1$ задовольняє рівняння (3) при всіх $v \in Ker(\gamma)$, то $u = u_1 + w$ є слабким розв'язком задачі (1), (2) (за аналогією до класичної термінології).

Далі буде проведено пошук слабких розв'язків задачі (1), (2) та у частинному випадку пошук розв'язків типу "соболівських класів" задачі (1), (2).

Відзначимо також, що за цих умов, які накладено на функції $k$ та $a$, вираз

$$(k\,\overline{\operatorname{grad}}(u), \overline{\operatorname{grad}}(v))_{L_2(G;H)} + (a\,u, v)_{L_2(G)}$$

являє собою скалярний добуток $(u,v)_1$ в $D(\overline{\operatorname{grad}})$; норма $\|\cdot\|_1$, що індукована цим добутком, є еквівалентною до норми графіка.

**Дослідження задачі Діріхле**

Випередимо дослідження задачі такими лемами.

**Лема 1.** Нехай $u \in D(\overline{\operatorname{grad}})$; $\varphi \in C^1(G)$. Тоді $u\,\varphi \in D(\overline{\operatorname{grad}})$ і при цьому $\overline{\operatorname{grad}}(u\,\varphi) = u\,\operatorname{grad}(\varphi) + \varphi\,\overline{\operatorname{grad}}(u)$.

Доведення. Нехай послідовність $u_n \in C^1(G)$ є такою, що $u_n \to u$ (в $L_2(G)$); $\operatorname{grad}(u_n) \to Z = \overline{\operatorname{grad}}(u)$ (в $L_2(G;H)$). Оскільки $\varphi \in L_\infty(G)$, то мають місце такі граничні переходи: $u_n\,\varphi \to u\,\varphi$; $\operatorname{grad}(u_n\,\varphi) = u_n\,\operatorname{grad}(\varphi) + \varphi\,\operatorname{grad}(u_n) \to u\,\operatorname{grad}(\varphi) + \varphi\,\overline{\operatorname{grad}}(u)$, звідки і випливає твердження леми.

**Лема 2.** Нехай $u \in Ker(\gamma)$; $\varphi \in C^1(G)$. Тоді $u\,\varphi \in Ker(\gamma)$.

Доведення. Оскільки $u \in Ker(\gamma)$, то існує послідовність $u_n \in C^1(G)$, для якої $u_n \to u$; $\operatorname{grad}(u_n) \to \overline{\operatorname{grad}}(u)$; $u_n|_S \to \gamma(u)$ в $L_2(S)$. Але тоді $u_n\,\varphi \to u\,\varphi$; $\operatorname{grad}(u_n\,\varphi) \to \overline{\operatorname{grad}}(u\,\varphi)$; $(u_n\,\varphi)|_S = u_n|_S\,\varphi|_S \to 0$ в $L_2(S)$, що й доводить лему.

**Лема 3.** Нехай $X \in D(\operatorname{div})$; $\varphi \in C^1(G)$. Тоді $\varphi\,X \in D(\operatorname{div})$ і при цьому $\operatorname{div}(\varphi\,X) = (\operatorname{grad}(\varphi), X) + \varphi\,\operatorname{div}(X)$.

Доведення. За визначенням оператора div для кожної функції $u \in Ker(\gamma)$ виконується рівність

$$\int_G (\overline{\operatorname{grad}}(u), X)d\mu = -\int_G u\,\operatorname{div}(X)d\mu.$$

За лемою 2, $u\,\varphi \in Ker(\gamma)$. З посиланням на рівність

$$\int_G (\overline{\operatorname{grad}}(u\,\varphi), X)d\mu = -\int_G u\,\varphi\,\operatorname{div}(X)d\mu$$

та лему 1, приходимо до наступної рівності:

$$\int_G (\overline{\operatorname{grad}}(u), \varphi\,X)d\mu =$$
$$= -\int_G u((\operatorname{grad}(\varphi), X) + \varphi\,\operatorname{div}(X))d\mu,$$

що й доводить лему.

З належності $u$ до $D(\Delta)$ виходить, що $\overline{\operatorname{grad}}(u) \in D(\operatorname{div})$; а тому з леми 3 приходимо до $k\,\overline{\operatorname{grad}}(u) \in D(\operatorname{div})$. Тож для $u \in D(\Delta)$ визначена ліва частина рівняння (1).

Випередимо перехід до пошуку розв'язку коротким описом варіаційного методу, який буде використано в подальшому. Нехай є деякий (замкнений) підпростір $H' \subset (D(\overline{\operatorname{grad}}), \|\cdot\|_1)$. Нехай в $H'$ задано скалярний добуток, що є еквівалентним до скалярного добутку $(\overline{\operatorname{grad}}(u), \overline{\operatorname{grad}}(v))_{L_2(G;H)} + (u,v)_{L_2(G)}$ з $D(\overline{\operatorname{grad}})$.

За обмеженим лінійним функціоналом $l(\cdot)$ на $H'$ визначено функціонал

$$F_l(v) = \|v\|^2_{H'} + 2l(v),\ l \in H'. \qquad (4)$$

Обмеженість знизу $F_l$ на $H'$ показано в [1]. Через $d = d(H')$ позначимо точну нижню межу функціонала $F_l$ на $H'$:

$$d = \inf_{v \in H'} F_l(v).$$

Про функцію $u$ з $H'$ кажуть, що вона реалізує мінімум функціонала $F_l$ на $H'$, якщо

$$F_l(u) = d.$$

Відзначимо, що $u$, як і число $d$, залежить від простору $H'$ та виду функціонала $l(\cdot)$.

За визначенням точної нижньої межі існує $\{v_m\} = \{v_m \in H' \mid m = 1, 2, \ldots\}$, для якої

$$\lim_{m\to\infty} F_l(v_m) = d.$$

Про будь-яку таку послідовність кажуть, що вона мінімізує функціонал $F_l$ на $H'$. Наступне твердження доведено в [1].

**Лема 4.** Для довільного підпростору $H'$ в $(D(\overline{\mathrm{grad}}), \|\cdot\|_1)$ існує єдина $u \in H'$, що реалізує мінімум функціоналу $F_l$ на $H'$. Будь-яка послідовність, що мінімізує функціонал $F_l$ на $H'$, збігається до $u$ за нормою, що породжена скалярним добутком з $H'$.

Для функції $u$, що реалізує мінімум функціонала $F_l$ на $H'$, має місце така властивість [1]. Візьмемо довільні $v \in H'$, $t \in \mathbf{R}$. Тоді $w_t = u + t\,v \in H'$, звідки багаточлен (по $t$) $P(t) = F_l(w_t) = F_l(u) + 2t((u,v)_{H'} + l(v)) + t^2\|v\|_{H'} \ge d$ для всіх $t \in \mathbf{R}$. Крім того, $P(0) = F_l(u) = d$, звідки

$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=0} = 2((u,v)_{H'} + l(v)) = 0.$$

Нарешті, функція $u \in H'$ при всіх $v \in H'$ задовольняє тотожність

$$(u,v)_{H'} + l(v) = 0. \qquad (5)$$

Перейдемо до розв'язування задачі. Нехай $H' = (Ker(\gamma), (\cdot)_1)$.

Оскільки $\varphi \in \mathrm{Im}(\gamma)$, то існує $\Phi \in D(\gamma) = D(\overline{\mathrm{grad}})$ таке, що $\gamma(\Phi) = \varphi$. Функціонал $l(\cdot)$ на $Ker(\gamma)$ визначимо таким чином:

$$l(v) = (f, v)_{L_2(G)} + (\Phi, v)_1.$$

Існує число $C > 0$ таке, що при всіх $v \in (Ker(\gamma), \|\cdot\|_1)$ виконуються нерівності

$$|l(v)| \le \|f\|_{L_2(G)}\|v\|_{L_2(G)} + \|\Phi\|_1\|v\|_1 \le$$
$$\le (C\|f\|_{L_2(G)} + \|\Phi\|_1)\,\|v\|_1.$$

Звідки отримуємо обмеженість $l(\cdot)$ на $(Ker(\gamma), \|\cdot\|_1)$.

Нехай $v \in (Ker(\gamma), \|\cdot\|_1)$ реалізує мінімум на $(Ker(\gamma), \|\cdot\|_1)$ функціонала

$$F_l(v) = (v,v)_1 + 2(f,v)_{L_2(G)} + 2(\mathbf{\Phi}, v)_1.$$

Нехай $H_\varphi = \{u \in D(\overline{\mathrm{grad}}) \mid \gamma(u) = \varphi\}$. Тоді функція $u = \mathbf{\Phi} + u^{\mathbf{\Phi}} \in H_\varphi$. Нехай визначено обмежений лінійний функціонал $l_0(v) = (f, v)_{L_2(G)}$ $(|l_0(v)| \le \|f\|_{L_2(G)}\|v\|_{L_2(G)} \le C\,\|f\|_{L_2(G)}\|v\|_1)$. Ця функція реалізує мінімум на $H_\varphi$ функціонала

$$F_{l_0}(v) = (v,v)_1 + 2(f,v)_{L_2(G)}.$$

Дійсно, з бієктивності відповідності $v = \mathbf{\Phi} + w$ ($\mathbf{\Phi}$ фіксоване) ($Ker(\gamma) \leftrightarrow H_\varphi$, $w \mapsto \mathbf{\Phi} + w \in H_\varphi$), маємо

$$F_{l_0}(v) = F_{l_0}(\mathbf{\Phi} + w) = (\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Phi})_1 + (w,w)_1 +$$
$$+ (\mathbf{\Phi}, w)_1 + 2(f, \mathbf{\Phi})_{L_2(G)} + 2(f, w)_{L_2(G)} =$$
$$= F_l(w) + (\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Phi})_1 + 2(f, \mathbf{\Phi})_{L_2(G)}.$$

Звідки й отримуємо, що мінімум $F_{l_0}$ реалізує $v = \mathbf{\Phi} + u^{\mathbf{\Phi}}$.

З огляду на (5) функція $u^{\mathbf{\Phi}}$ задовольняє тотожність

$$(u^{\mathbf{\Phi}}, v)_1 = -(f, v)_{L_2(G)} - (\mathbf{\Phi}, v)_1.$$

Звідки випливає, що функція $u = \mathbf{\Phi} + u^{\mathbf{\Phi}}$ задовольняє для всіх $v \in Ker(\gamma)$ тотожність

$$\int_G (k(\overline{\mathrm{grad}}(u), \overline{\mathrm{grad}}(v)) + a\;uv)d\mu = -\int_G f\;v d\mu,$$

яка визначає слабкий розв'язок, тобто розв'язок задачі (3), (2) ($u_1 = u^{\mathbf{\Phi}}$, $w = \mathbf{\Phi}$).

Нехай $\varphi = 0$ (тобто $u \in Ker(\gamma)$). Тоді $u$ є розв'язком задачі (1), (2) з $\varphi = 0$ в тому й лише в тому випадку, якщо $u \in Ker(\gamma)$ та при всіх $v \in Ker(\gamma)$ задовольняє рівнянню

$$\int_G v\,(\mathrm{div}(k\;\overline{\mathrm{grad}}(u)) - a\;u)d\mu = \int_G v\;f d\mu. \qquad (6)$$

Це випливає зі вкладення $C_0^1(G) \subset Ker(\gamma)$ та щільності $C_0^1(G)$ в $L_2(G)$.

Використовуючи те, що

$$(v, \mathrm{div}(k\;\overline{\mathrm{grad}}(u)))_{L_2(G)} =$$
$$= -(k\;\overline{\mathrm{grad}}(u), \overline{\mathrm{grad}}(v))_{L_2(G;H)},$$

рівняння (6) перетворимо до наступного:

$$\int_G (k(\overline{\mathrm{grad}}(u), \overline{\mathrm{grad}}(v)) + auv)d\mu = -\int_G fvd\mu. \quad (7)$$

Нехай $u$ – розв'язок (7) при всіх $v \in Ker(\gamma)$. Перепишемо (7) у вигляді

$$\int_G k(\overline{\mathrm{grad}}(u), \overline{\mathrm{grad}}(v))d\mu = -\int_G v(f + au)d\mu.$$

Справедливість останньої рівності при всіх $v \in Ker(\gamma)$ означає, що $k\ \overline{\mathrm{grad}}(u) \in D(\mathrm{div})$ і при цьому $\mathrm{div}(k\ \overline{\mathrm{grad}}(u)) = f + au$.

Оскільки функція $\frac{1}{k} \in C^1(G)$, то в силу леми 3, $\overline{\mathrm{grad}}(u) \in D(\mathrm{div})$ та, отже, $u \in D(\Delta)$.

Тим самим для граничної умови $\gamma(u) = 0$ доведено існування та єдиність розв'язку задачі (1), (2).

Нехай $\varphi \in \gamma(D(\Delta))$, тоді існує функція $w \in D(\Delta)$, для якої $\varphi = \gamma(w)$. У цьому випадку $k\ \overline{\mathrm{grad}}(w) \in D(\mathrm{div})$, а тому визначено $L(w)$ та функція $u_1 = u - w$ має задовольняти задачу

$$\begin{aligned} L(u_1) &= \mathrm{div}(k\ \overline{\mathrm{grad}}(u_1)) - a\ u_1 = \\ &= f - \mathrm{div}(k\ \overline{\mathrm{grad}}(w)) + a\ w, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\gamma(u_1) = 0. \quad (9)$$

Задача (8), (9) допускає розв'язок описаним вище прийомом.

Отриманий результат сформулюємо у вигляді теореми.

**Теорема.** Нехай межа $S$ обмеженої області $G$ узгоджена з мірою $\mu$, а сама міра задовольняє умови а), б). Тоді задача (1), (2) у випадку $\varphi \in \gamma(D(\Delta))$ має і притому єдиний розв'язок $u \in D(\Delta)$. Якщо $\varphi \in \mathrm{Im}(\gamma)$, то задача (1), (2) має і притому єдиний слабкий розв'язок, тобто існує і притому єдина функція $u \in D(\overline{\mathrm{grad}})$, що задовольняє умову (2) та при всіх $v \in Ker(\gamma)$ рівняння (7).

## Висновки

Доведено існування та єдиність слабкого розв'язку за допомогою варіаційного підходу. В області існування обох частин вихідного рівняння доведено існування та єдиність розв'язку типу "соболівського класу". Також встановлено деякі властивості операторів дивергенції та градієнта, які можуть бути розглянуті як природні узагальнення властивостей відповідних операторів у скінченновимірному випадку. Розглянута задача раніше не була сформульована для введеного оператора Лапласа.

Результати цієї роботи приводять до висновку про можливість природного узагальнення сучасної теорії крайових задач для лінійних рівнянь математичної фізики на випадок нескінченновимірного простору аргументів.

У подальшому планується дослідження нескінченновимірних варіантів другої та третьої крайових задач для цього класу рівнянь.


1. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
2. *L. Accardi, and O.G. Smolianov,* "On Laplacians and Traces", Conf. Sem. Univ. Bari, vol. 250, pp. 1–25, 1993.
3. *L. Accardi et al.,* "A Quantum Approach to Laplace Operators", Infin. Dimes. Anal. Quantum Probab. Relat., vol. 9, pp. 215–248, 2006.
4. *L. Accardi et al.,* "Exotic Laplacians and Associated Stohastic Processes", Infin. Dimes. Anal. Quantum Probab. Relat., vol. 12, pp. 1–19, 2009.
5. *Богданский Ю.В.* Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в $L_2$-версии // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1169–1178.
6. *Богданский Ю.В.* Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса–Остроградского // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 10. – С. 1299–1313.



Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
6 травня 2013 року