

УДК 53.05,06,08; 51-7, 519.1

А.А. Снарский, И.В. Безсуднов

КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ГРАФЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ВИДИМОСТИ

We investigate the time series by mapping them to the complex network. We show that the technique of mapping proposed – the dynamic visibility graph has an intrinsic parameter behaving similarly to the order parameter in the theory of the second order phase transitions. The behavior of the relative number of clusters near the critical angle of view was thoroughly analyzed. Time series of different nature both artificial (having uniform random, Poisson and modification of Weierstrass distributions) and experimental (human heart beat RR intervals, data on solar flares and the time series of earthquakes) are numerically investigated. In all cases, the relative number of clusters depends on the proximity to the critical angle of view of power law. Thus, we show that there is an analogy between the behavior of the relative number of clusters and the order parameter in the second-order phase transition theory. Each time series is characterized by its own value of the critical index – an analog of the critical index in second-order phase transition theory.

Введение

Изучение временных рядов со сложной, в т.ч. фрактальной, структурой привлекает постоянный интерес. В значительной мере это связано с большим прикладным потенциалом таких исследований, которые охватывают огромный диапазон явлений: от сердечного ритма до землетрясений [1–2]. Подробный список литературы приведен в [3]. При исследовании временных рядов используются различные методы: обычная статистика (вычисление средних значений и различных моментов ряда), спектры мощности (например, наличие $1/f$ шума), определение фрактальной размерности. Некоторые полученные характеристики временных рядов выявляют достаточно нетривиальные их свойства, например, мультифрактальность, существование странных аттракторов и т.п.

В этой статье показано, что один из методов анализа временных рядов, граф динамической видимости [3], приводит к характеристике, ведущей себя аналогично параметру порядка в теории фазовых переходов второго рода.

В последнее время появился и активно развивается метод исследования временных рядов, в основе которого лежит их отображение в граф (сложную сеть) [4–5]. При таком отображении объединяются две развитые области исследований – нелинейные методы анализа временных рядов и методы теории сложных сетей [6–9]. Появляется возможность применить богатые, хорошо развитые методы анализа сложных сетей к анализу сложных по структуре временных рядов.

Существует несколько типов алгоритмов отображения временного ряда в сложную сеть. Первый тип использует близость координат в сечении Пуанкаре временного ряда. Другой тип

алгоритма вводит понятие так называемого “графа видимости”. В [4] был предложен алгоритм построения графа взаимной видимости (Natural Visibility Graph, NVG-алгоритм). Несколько позже был предложен близкий к NVG-алгоритму алгоритм построения “горизонтального графа взаимной видимости” (Horizontal Visibility Graph, HVG-алгоритм) [5]. Применение NVG- и HVG-алгоритмов позволило описать и исследовать временные ряды сложной структуры, связанные с самыми различными явлениями: пульсациями турбулентных течений, индексами фондовых рынков, сердечными ритмами, стохастическими и хаотическими временными рядами и многими другими. Как в NVG, так и в HVG, каждому временному ряду соответствует свой граф.

В [3] было предложено обобщение NVG-алгоритма – алгоритм построения графа динамической видимости (Dynamical Visibility Graph, DVG-алгоритм). Каждой связи NVG-графа ставится в соответствие величина, называемая углом зрения. Связями графа динамической видимости будут только те, угол зрения которых менее заданного угла – угла зрения α , таким образом, для каждого угла зрения строится свой DVG-граф. DVG-алгоритм позволяет исследовать зависимость параметров графа от угла зрения α (форма зависимости, скорости ее роста, скачки и др.). Возможность изменять произвольно угол зрения добавила в название алгоритма слово динамический, далее будем использовать также обозначение $DVG(\alpha)$.

Постановка задачи

Цель этой работы – показать, что хотя бы одна из характеристик множества $DVG(\alpha)$ -графов при стремлении к углу зрения $\alpha \rightarrow \alpha_c =$

$= \pi / 2$ веде себе аналогічно параметру порядку в теорії фазових переходів другого роду.

Исходные положения

Работа построена следующим образом. Вначале описывается алгоритм построения графа динамической видимости $DVG(\alpha)$, затем определяются числовые ряды, как модельные, так и экспериментальные, для которых будут построены $DVG(\alpha)$, и исследуется поведение количества кластеров $DVG(\alpha)$ -графов в зависимости от угла зрения α , который, как оказывается, ведет себя при приближении к пороговому значению угла видимости аналогично параметру порядка в теории фазовых переходов второго рода. Вычислены значения соответствующих критических индексов.

Построение DVG происходит следующим образом [3]. Вначале задаем временной ряд, являющийся последовательным набором моментов времени $\{t_i, i = 1 \dots N\}$, в которые происходят некоторые события, например, R – пик в кардиограмме. Для этого ряда вычисляется ряд интервалов $\{x(t_i) = t_{i+1} - t_i, i = 1 \dots N - 1\}$. Согласно построению DVG все временные интервалы положительны.

Алгоритм построения DVG -графа показан на рис. 1. Сначала строится NVG -граф, для чего на горизонтальной оси (ось времени) отмечаются точки t_i , от которых в перпендикулярном

направлении строятся отрезки высотой $x(t_i)$. Будем считать, что узлами NVG -графа являются внешние вершины построенных отрезков. Связь между вершинами в NVG -графе считается существующей, если прямая, соединяющая соответствующие вершины отрезков, не пересекает ни одного из построенных отрезков, находящихся между. При таком построении NVG -графа возможно вычислить угол наклона связи графа по отношению к вертикальной оси – угол зрения связи. Связями графа динамической видимости будут только те, наклон которых менее заданного угла – угла зрения α .

Сверху слева (см. рис. 1) схематически изображен критерий видимости для угла зрения $\alpha = \pi / 2$. Связи, отвечающие углам, меньшим угла зрения $\alpha = \pi / 2$ (например, α_1), обозначены толстыми линиями, связи с углами, большими угла зрения $\alpha = \pi / 2$ (например, α_2), – тонкими линиями. NVG -граф состоит из обоих типов линий: тонких и толстых. Граф динамической видимости DVG -граф состоит из связей, обозначенных толстыми линиями, наклон этих связей меньше угла зрения $\alpha = \pi / 2$.

Формальный критерий видимости DVG -алгоритма, то есть условие, при выполнении которого связь NVG -графа будет принадлежать $DVG(\alpha)$, можно записать следующим образом. Рассмотрим два произвольных момента времени t_i и t_k , $i < k$, и все моменты времени между ними t_j , $i < j < k$. Для $DVG(\alpha)$ критерий

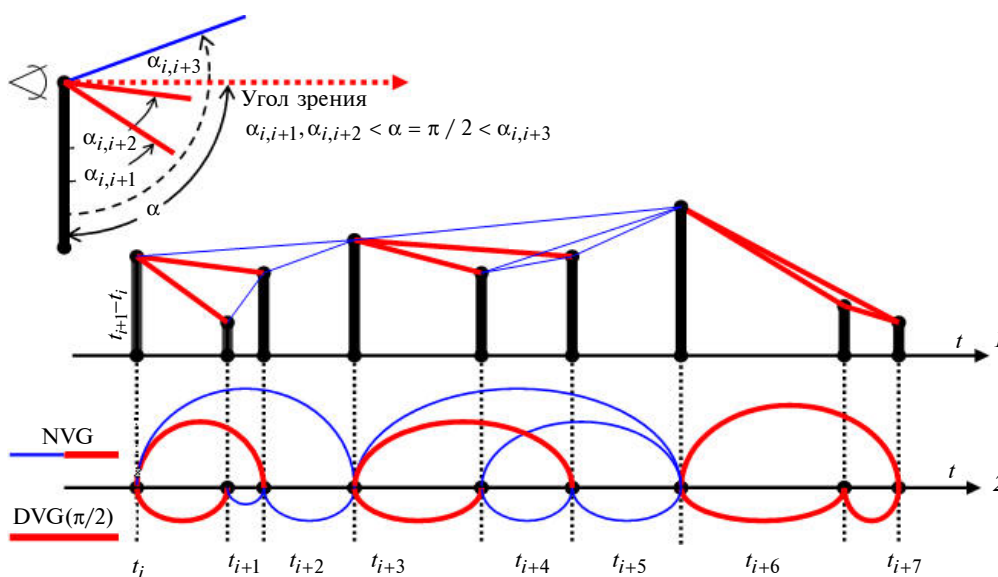


Рис. 1. Схема построения графа динамической видимости: 1 – схема видимости при построении графа; 2 – полученные графы видимости

видимости NVG-графа (1)

$$x_k < x_i + (x_j - x_i) \frac{t_k - t_i}{t_j - t_i}, \quad i < j < k, \quad (1)$$

должен быть дополнен условием, ограничивающим угол зрения α ,

$$\alpha > \alpha_{ik} = \arctg \frac{x_k - x_i}{t_k - t_i}. \quad (2)$$

Далее будем рассматривать следующую характеристику DVG-графа – относительное количество кластеров в графе – $Q(\alpha)$. Кластером мы будем называть совокупность связанных между собой узлов графа, не связанных с другими кластерами. При этом единичный узел, не связанный с другими узлами, также будет являться кластером. Таким образом, $Q(\alpha)$ – число кластеров DVG(α)-графа, деленное на полное число узлов графа N .

Очевидно, что при малом угле зрения связей между узлами нет и число кластеров максимально и равно числу узлов, а относительное число кластеров при этом $Q(\alpha < \pi / 4) = 1$. При увеличении угла зрения (начиная с $\alpha = \pi / 4$) начинают возникать связи между узлами, средний размер кластеров растет, а их число монотонно падает. При достижении критического значения угла $\alpha_c = \pi / 2$ практически все узлы соединены между собой, граф состоит из небольшого числа кластеров и $Q(\alpha \geq \alpha_c) \approx 1 / N$, что при $N \gg 1$ означает практически $Q(\alpha \geq \alpha_c) \approx 0$.

В этой работе DVG(α) строились для трех различных случайных распределений и ряда RR-интервалов нормального сердечного ритма человека. Для построения временного ряда были использованы случайное однородное распределение (3а), ряд, отвечающий распределению Пуассона (3б), и ряд, равный модулю значений ряда Вейерштрасса (3в), обладающего фрактальной размерностью:

$$t_i = t_{i-1} + r, \quad x(t_i) = r, \quad (3a)$$

$$t_i = t_{i-1} - 1 / \lambda \ln(r), \quad x(t_i) = -1 / \lambda \ln(r), \quad (3б)$$

$$a_i = \left| \sqrt{2\sigma} \frac{\sqrt{1-b^{2D-4}}}{\sqrt{1-b^{(2D-4)(M+1)}}} \sum_{m=0}^M [b^{(D-2)m} \sin(2\pi(sb^m i + r))] \right|, \quad (3в)$$

$$t_i = t_{i-1} + a_i, \quad x(t_i) = a_i,$$

где r – случайная величина, распределенная равномерно на отрезке $[0,1]$. Были выбраны

следующие численные значения параметров: для распределения Пуассона – $\lambda = 1$, для ряда Вейерштрасса – $\sigma = 3,3$, $b = 2,5$, $s = 0,005$, $M = 10$, D – фрактальная размерность. Необходимо отметить, что значения ряда Вейерштрасса взяты по модулю, так как DVG-алгоритм применим только к ряду с положительными значениями интервалов. Ряд (3в) для краткости будем обозначать WeiMod.

На рис. 2 приведена зависимость $Q(\alpha)$ для случайного временного ряда (3а) и схематическое поведение параметра порядка

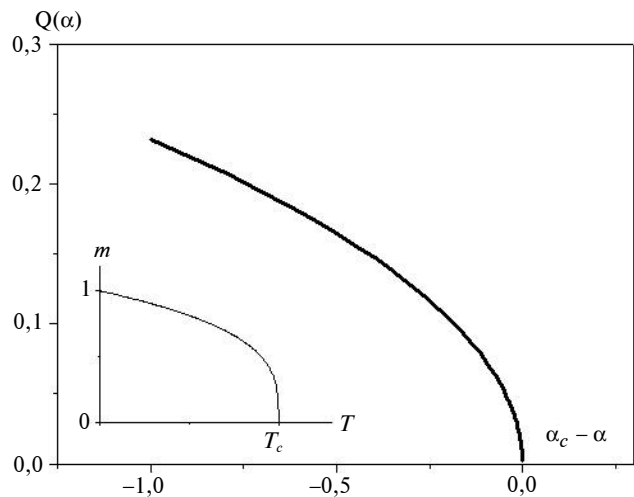


Рис. 2. Зависимость $Q(\alpha)$ для случайного временного ряда (3а). На врезке к рисунку аналогичная зависимость для параметра порядка фазового перехода второго рода. Параметр порядка $m(T)$ – удельная намагниченность (arbitrary units) как функция температуры – T , T_c – критическая температура (температура Кюри)

Для сравнения на врезке к рис. 2 приведены аналогичная зависимость для параметра порядка. В случае фазового перехода ферромагнетик-парамагнетик этим параметром порядка является удельная намагниченность $m(T)$, которая стремится к нулю при приближении к критической температуре T_c [10]. Заметим, что возможна аналогия и с теорией перколяции. В случае перколяции [11–13], геометрическом аналоге фазовых переходов второго рода, параметром порядка является плотность бесконечного кластера (вероятность того, что случайно выбранный узел принадлежит бесконечному кластеру), а роль температуры играет концентрация хорошо проводящих узлов или связей.

Как хорошо известно [10], поведение параметра порядка вблизи критического значения является степенным – (4), а показатель

степени – критический индекс – главной характеристикой фазового перехода:

$$m(T) \sim (T_c - T)^\beta. \quad (4)$$

Согласно теории среднего поля Ландау $\beta = 1/2$, с учетом флуктуаций параметра порядка (если это необходимо), вблизи точки перехода $\beta \approx 0,3$.

В нашем случае численное моделирование показало, что относительное число кластеров $Q(\alpha)$ ведет себя вблизи критического значения $\alpha_c = \pi/2$ аналогичным степенным образом (см. рис. 2):

$$Q(\alpha) \sim (\alpha_c - \alpha)^\beta. \quad (5)$$

Значение критического показателя β является характеристикой временного ряда. Как показали расчеты, его значения различны для разных временных рядов.

Для построения модельных DVG(α)-рядов (3а–3в) использовались ряды длиной $N = 10^5$. На рис. 3 представлены результаты, полученные осреднением 10-ти реализаций для модельных рядов (3а–3в). Исследованы следующие экспериментальные наблюдаемые временные ряды: RR-интервалов нормального сердечного ритма человека, – данные были взяты из [14]. Количество отсчетов ряда RR-интервалов варьировалось в пределах $6-11 \times 10^4$ и приведенный результат был получен осреднением 72 RR-последовательностей. Ряд данных о солнечных вспышках, наблюдавшихся в 2002–2012 гг. (по материалам [15]), всего было зарегистрировано более 60 000 вспышек, время начала вспышки составило ис-

следуемый временной ряд. Временной ряд землетрясений был составлен по материалам более 26 000 землетрясений магнитудой более 3,5 баллов по шкале Рихтера, произошедших в 1960–2010 гг., на территории России и СНГ, составленный по материалам [16].

Согласно данным расчетов DVG(α), приведенным на рис. 3, наименьшим значением критического индекса $\beta = 0,5$, совпадающим с численным значением критического индекса параметра порядка в теории среднего поля Ландау, обладает ряд со случайным однородным распределением (3а). Критические индексы других модельных рядов (3б) и (3в) оказались меньше. Также на графике (рис. 3, а) видно, что при малом отклонении угла от критического $Q(\alpha)$ перестает зависеть от $\alpha_c - \alpha$. Такое поведение зависимости параметра порядка от близости к фазовому переходу характерно для теории фазовых переходов вблизи точки перехода при наличии так называемого внешнего поля, которое размывает фазовый переход [10].

Были рассчитаны также $Q(\alpha)$ для DVG(α)-рядов, наблюдаемых данных рис. 3, б: ряда RR-интервалов нормального сердечного ритма человека, ряда интервалов между началами солнечных вспышек и ряда интервалов между землетрясениями. Обработка экспериментальных данных предложенным методом показала, что зависимости $Q(\alpha)$ этих рядов также обладают всеми признаками фазового перехода. Интересно отметить, что во всех рассмотренных случаях критический индекс оказался больше, чем в модельных распределениях. Выход на “плато” вблизи

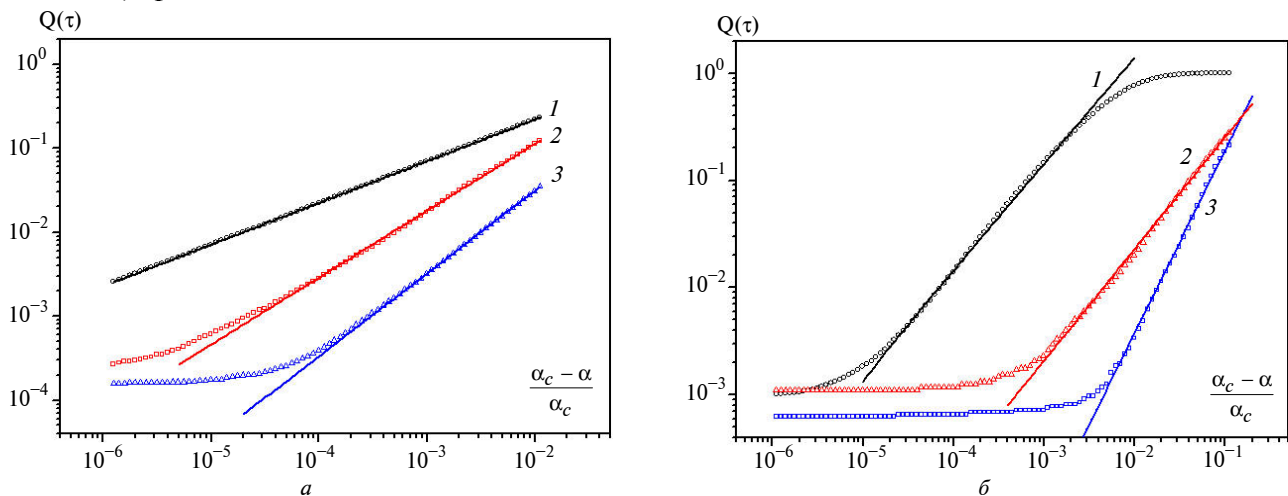


Рис. 3. Зависимость $Q(\alpha)$ от близости к критическому значению угла зрения $\alpha_c - \alpha / \alpha_c$ в двойном логарифмическом масштабе; а – модельные ряды: 1 – (3а), 2 – (3б) и 3 – (3в); б – экспериментальные ряды: 1 – RR-интервалы нормального сердечного ритма, 2 – распределение солнечных вспышек, 3 – распределение сейсмической активности

точки перехода начинается для экспериментальных распределений на порядок раньше, чем в модельных. Авторы полагают, что не последнюю роль играет в этом дискретность измерения исследуемых данных. Действительно, для солнечных вспышек и землетрясений данные приведены с секундной точностью, а при измерении сердечного ритма точность измерения интервала составляет 0,001 секунды.

Выводы

В статье исследовано поведение относительного количества кластеров в графах динамической видимости вблизи критического значения угла зрения. Были численно исследованы временные ряды различной природы как модельные, так и экспериментальные, во всех случаях зависимость количества кластеров от близости к критическому углу зрения имела степенную зависимость. Таким образом, было показано существование аналогии между поведением относительного количества кластеров и параметра порядка в теории фазовых переходов второго рода и теории протекания. Каждый ряд характеризуется своим численным значением критического индекса — аналога критического индекса в теории фазовых переходов.

Как следует из сравнения приведенных модельных и экспериментальных результатов, временные ряды различной природы (случайные, со сложной структурой, экспериментальные и т.д.) характеризуются своим численным значением индекса β . Само значение индекса β недостаточно для определения вида распределения интервалов ряда или распределения входных данных, однако эта величина еще один (наряду с фрактальной размерностью, константой Херста, показателем спектра мощности и т.п.) информативный параметр временных рядов со сложной структурой, включающей в себя как случайную, так и детерминированную компоненты.

Показанная в данной статье аналогия поведения относительного числа кластеров в графах динамической видимости и поведения параметра порядка в теории фазовых переходов второго рода представляется новым шагом в направлении изучения характеристик временных рядов. Эта аналогия позволит в будущем применить к исследованию временных рядов аппарат теории фазовых переходов второго рода, определить роль критического поведения различных параметров графов динамической видимости при исследовании временных рядов различной структуры.

1. C.K. Peng et al., "Mosaic Organization of DNA Nucleotides", Phys.Rev. E, vol. 49, no. 2, pp. 1685–1698, 1994.
2. C.K. Peng et al., "Quantification of Scaling Exponents and Crossover Phenomena in Nonstationary Heartbeat Time Series", Chaos, vol. 5, pp. 82–86, 1995.
3. I.V. Bezudnov et al., "From Time Series to Complex Networks: the Dynamical Visibility Graph", arXiv:1208.6365, pp. 1–13, 2012.
4. L. Lacasa et al., "From Time Series to Complex Networks: the Visibility Graph", Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., vol. 105, no. 13, pp. 4972–4975, 2008.
5. B. Luque et al., "Horizontal Visibility Graphs: Exact Results for Random Time Series", Phys. Rev. E, vol. 80, no. 15, pp. 046103–046114, 2009.
6. R. Albert, and A.-L. Barabási, "Statistical Mechanics of Complex Networks", Rev. Mod. Phys., vol. 74, no. 1, pp. 47–97, 2002.
7. S.N. Dorogovtsev, and J.F.F. Mendes, "Evolution of Networks. From Biological Nets to the Internet and WWW", Adv. Phys., vol. 51, no. 4, pp. 1079–1187, 2003.
8. S. Boccaletti et al., "Complex Networks: Structure and Dynamics", Phys. Rep., vol. 424, no. 4-5, pp. 175–308, 2006.
9. S.N. Dorogovtsev et al., "Critical Phenomena in Complex Networks", Rev. Mod. Phys., vol. 80, no. 4, pp. 1275–1335, 2008.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Ч. 1. — М.: Наука, 1976. — 584 с.
11. D. Stauffer, and A. Aharony, Introduction to Percolation Theory, Taylor&Francis, 1992, 182 p.
12. Шкловский Б.И., Эфрос А.Л. Электронные свойства легированных полупроводников. — М.: Наука, 1979. — 416 с.
13. Снарский А.А., Безуднов И.В., Севрюков В.А. Процессы переноса в макроскопически неоднородных средах. — М.: УРСС (ЛКИ), 2007. — 304 с.
14. PhysioNet — the Research Resource for Complex Physiologic Signals [Online]. Available: <http://www.physionet.org/>
15. Hessi UCB Home Page [Online]. Available: hessi.ssl.berkeley.edu
16. Сейсмобезопасность России — единая информационная система [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.seismorus.ru/>

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
4 лютого 2013 року