УДК 517.9

Т.О. Єрьоміна

НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО КЛАСУ РІЗНИЦЕВО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

The main object of research in this article is a study of the continuous solutions set structure of difference-functional equations of the form $x(qt)=a(t)x(t)+b(t)x(t+1)+f(t)$, where $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ — some real functions and q — real constant. Using methods of the theory of differential and difference equations a question of continuous solutions existence of linear difference-functional equations with constant coefficients was investigated and a building method for them was proposed. In particular for homogeneous equations, a continuous bounded solutions family that depends on an arbitrary continuous 1-periodic function with $0<q<1$, $a>1$ and $0<a<1$, $q>1$, t — positive was built. Furthermore, if $0<q<1$, $a>0$, then continuous solutions existence for heterogeneous equations with an arbitrary real value t is proved and continuous bounded solutions family of a heterogeneous equation with an arbitrary nonnegative t are built.

Keywords: difference equations, functional equations, difference-functional equations.

Вступ

Системи різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$x(qt)=a(t)x(t)+b(t)x(t+1)+f(t), \tag{1}$$

де $t\in\Re^+=(0,+\infty)$, $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ — деякі дійсні функції і q — дійсна стала, поєднують у собі властивості різницевих $x(t+1)=a(t)x(t)+f(t)$ і q-різницевих (функціональних) рівнянь $x(qt)=$ $=a(t)x(t)+f(t)$, які були об'єктом дослідження багатьох математиків (див. [1—7] і наведену там літературу). На сьогодні існує велика кількість праць, у яких особлива увага приділяється вивченню структури множини неперервних розв'язків функціонально-різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1)=a(t)x(t)+b(t)x(qt)+f(t)$$

(див. [6]). В силу цього виникло питання про одержання аналогічних результатів для рівнянь вигляду (1), які і є основним об'єктом дослідження цієї статті.

Постановка задачі

Метою роботи є вивчення питань існування неперервних розв'язків лінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду (1) і дослідження структури їх множини.

Про існування сім'ї неперервних обмежених при $0<q<1$, $a>1$ розв'язків, що залежить від деякої неперервної 1-періодичної функції

Розглянемо однорідне різницево-функціональне рівняння

$$x(qt)=ax(t)+bx(t+1), \tag{2}$$

де $t\in\Re^+=(0,+\infty)$, a, b, q — деякі дійсні сталі. Припустимо, що виконуються умови:

1) $0<q<1$, $a>1$,

2) $\Delta=\dfrac{|b|}{a-1}<1$, $\nu=\dfrac{\ln a}{\ln q}<0$.

Має місце така теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді рівняння (2) має сім'ю неперервних обмежених при $t\ge T>0$ розв'язків $x(t)=$ $=x\left(t,\omega\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції $\omega(\tau)$, де $\tau=\dfrac{\ln t}{\ln q}$.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що (2) має неперервні розв'язки у вигляді ряду

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}x_i(t), \tag{3}$$

де $x_i(t)$, $i=0,1,\ldots,$ — деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (3) в (2), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty}x_i(qt)=a\sum_{i=0}^{\infty}x_i(t)+b\sum_{i=0}^{\infty}x_i(t+1). \tag{4}$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $x_i(t)$, $i=0,1,\ldots$, задовольняють рівняння

$$x_0(qt)=ax_0(t), \tag{5_0}$$

$$x_i(qt)=ax_i(t)+bx_{i-1}(t+1),\ \ i=1,2,\ldots, \tag{5_i}$$

то ряд (3) буде формальним розв'язком рівняння (2).

Рівняння (5_0) має сім'ю неперервних розв'язків вигляду

$$x_0(t) = t^{\frac{\ln a}{\ln q}} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \tag{6}$$

де $\omega(\tau+1) = \omega(\tau)$.

Розглядаючи послідовно рівняння (5_i), $i = 1, 2, \ldots$, можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$x_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} b a^{-(j+1)} x_{i-1}(q^j t + 1), \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{7_i}$$

Покажемо, що при виконанні умов 1, 2 ряди (7_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки

$$|x_i(t)| \le M\Delta^i , \; i = 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

Дійсно, оскільки $|x_0(t)| \le M t^{\nu}$, де $M = \max\limits_t |\omega(\tau)|$, то в силу (7_1) і $\nu < 0$ отримуємо

$$|x_1(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |b| a^{-(j+1)} |x_0(q^j t + 1)| \le$$

$$\le |b| \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} M (q^j t + 1)^{\nu} \le \frac{M|b|}{a} \sum_{j=0}^{\infty} a^{-j} (q^j t + 1)^{\nu} \le$$

$$\le \frac{M|b|}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{a^j (q^j t + 1)^{|\nu|}} \le \frac{M|b|}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^j . \tag{9}$$

Звідси випливає

$$|x_1(t)| \le \frac{M|b|}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^j \le \frac{M|b|}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{M|b|}{a-1} = M\Delta .$$

Отже, оцінка (8) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (8) доведено уже для деякого $i \ge 1$, і покажемо її справедливість для $i + 1$. Дійсно, оскільки

$$x_{i+1}(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} b a^{-(j+1)} x_i(q^j t + 1), \tag{10}$$

то

$$|x_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |b| a^{-(j+1)} |x_i(q^j t + 1)| \le$$

$$\le |b| M \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} \Delta^i \le \frac{M|b|}{a} \cdot \frac{\Delta^i}{1 - \frac{1}{a}} =$$

$$= \frac{M|b|\Delta^i}{a-1} = M\Delta^{i+1} . \tag{11}$$

Отже, ряди (7_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \ge T > 0$ до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки (8). Із (8) безпосередньо випливає, що ряд (3) рівномірно збігається при всіх $t \ge T > 0$ до деякої неперервної функції $x(t)$, яка задовольняє умову

$$|x(t)| \le \sum_{i=0}^{\infty} |x_i(t)| \le M \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \le \frac{M}{1 - \Delta} . \tag{12}$$

Теорему 1 доведено.

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння вигляду

$$y(qt) = ay(t) + by(t+1) + f(t) , \tag{13}$$

де a, b, q – деякі сталі, $f : \Re \to \Re$. Припустимо, що виконуються умови:

1) $0 < q < 1$, $a > 1$;

2) $\Delta = \dfrac{|b|}{a-1} < 1$;

3) функція $f(t)$ є неперервною й обмеженою при всіх $t \in \Re$ і такою, що $\sup\limits_t |f(t)| = \tilde{M} < \infty$.

Має місце така теорема.

Теорема 2. Нехай виконуються умови 1–3. Тоді рівняння (13) має неперервний обмежений при $t \in \Re$ розв'язок $\bar{y}(t)$.

Доведення. Покажемо, що (13) має неперервний розв'язок у вигляді ряду

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \tag{14}$$

де $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ – деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (14) у (13), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(qt) = a \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + b \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t+1) + f(t). \tag{15}$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ задовольняють рівняння

$$\bar{y}_0(qt) = a\bar{y}_0(t) + f(t) , \tag{16_0}$$

$$\bar{y}_i(qt) = a\bar{y}_i(t) + b\bar{y}_{i-1}(t+1), \quad i = 1, 2, \ldots , \tag{16_i}$$

то ряд (14) буде формальним розв'язком рівняння (13).

Рівняння (16_0) має неперервний розв'язок вигляду

$$\bar{y}_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} f(q^j t). \tag{17}$$

Розглядаючи послідовно рівняння (16_i), $i = 1, 2, \ldots$, можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$\bar{y}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} b a^{-(j+1)} \bar{y}_{i-1}(q^j t + 1), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{18_i}$$

Покажемо, що ряди (18_i) $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $\bar{y}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки

$$|\bar{y}_i(t)| \le M\Delta^i, \; i = 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

Дійсно, оскільки

$$|\bar{y}_0(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} |f(q^j t)| \le \frac{\tilde{M}}{a} \sum_{j=0}^{\infty} a^{-j} \le$$

$$\le \frac{\tilde{M}}{a} \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{\tilde{M}}{a-1} = \tilde{M}',$$

то

$$|\bar{y}_1(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |b| \cdot a^{-(j+1)} |\bar{y}_0(q^j t + 1)| \le$$

$$\le |b| \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} \tilde{M}' \le \frac{\tilde{M}'|b|}{a} \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{\tilde{M}'|b|}{a-1} = \tilde{M}'\Delta. \tag{20}$$

Отже, оцінка (19) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (19) доведено уже для деякого $i \ge 1$, і покажемо її справедливість для $i + 1$. Дійсно, оскільки

$$\bar{y}_{i+1}(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} b a^{-(j+1)} \bar{y}_i(q^j t + 1), \tag{21}$$

то

$$|\bar{y}_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |b| \cdot a^{-(j+1)} |\bar{y}_i(q^j t + 1)| \le$$

$$\le |b| \tilde{M}' \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} \Delta^i \le \frac{\tilde{M}' \cdot |b|}{a} \cdot \frac{\Delta^i}{1 - \frac{1}{a}} =$$

$$= \frac{\tilde{M}'|b|\Delta^i}{a-1} = \tilde{M}' \cdot \Delta^{i+1}. \tag{22}$$

Таким чином, ряди (18_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \in \Re$ до деяких неперервних функцій $\bar{y}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки (19). В силу (19) ряд (14) рівномірно збігається при всіх $t \in \Re$ до деякої неперервної функції $\bar{y}(t)$, яка задовольняє умову

$$|\bar{y}(t)| \le \sum_{i=0}^{\infty} |\bar{y}_i(t)| \le \tilde{M}' \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \le \frac{\tilde{M}'}{1 - \Delta}. \tag{23}$$

Теорему 2 доведено.

Про існування сім'ї неперервних обмежених при $0 < a < 1$, $q > 1$ розв'язків, що залежить від деякої неперервної 1-періодичної функції

Дослідимо тепер рівняння (2) у випадку, коли $0 < a < 1$, $q > 1$.

Теорема 3. Нехай виконуються умови:

1) $0 < a < 1$, $q > 1$;

2) $\Delta = \dfrac{|b|}{1-a} < 1$, $\nu = \dfrac{\ln a}{\ln q} < 0$.

Тоді рівняння (2) має сім'ю неперервних обмежених при $t \ge T > 0$ розв'язків $x(t) = x\left(t, \omega\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції $\omega(\tau)$, де $\tau = \dfrac{\ln t}{\ln q}$.

Доведення. Покажемо, що (2) має неперервні розв'язки у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{24}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, — деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (24) в (2), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt) = a\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + b\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+1). \tag{25}$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, задовольняють рівняння

$$x_0(qt) = a x_0(t), \tag{27_0}$$

$$x_i(qt) = a x_i(t) + b x_{i-1}(t+1), \; i = 1, 2, \ldots, \tag{27_i}$$

то ряд (24) буде формальним розв'язком рівняння (2).

Рівняння (27_0) має сім'ю неперервних розв'язків вигляду

$$x_0(t) = t^{\frac{\ln a}{\ln q}} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \qquad (28)$$

де $\omega(\tau+1) = \omega(\tau)$.

Розглядаючи послідовно рівняння (27_i), $i = 1, 2, \ldots$, можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$x_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} ba^j x_{i-1}(q^{-(j+1)}t + 1), \quad i = 1, 2, \ldots . \qquad (29_i)$$

Покажемо, що при виконанні умов 1, 2 ряди (29_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки

$$|x_i(t)| \le M\Delta^i, \; i = 1, 2, \ldots . \qquad (30)$$

Дійсно, оскільки $|x_0(t)| \le Mt^{\nu}$, де $M = \max_{\tau}|\omega(\tau)|$, то в силу ($29_1$) і $\nu < 0$ отримуємо

$$|x_1(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |b|\, a^j |x_0(q^{-(j+1)}t + 1)| \le$$

$$\le M|b| \sum_{j=0}^{\infty} a^j \left(\frac{1}{q^{j+1}}t + 1\right)^{\nu} \le M|b| \sum_{j=0}^{\infty} a^j \le$$

$$\le \frac{M|b|}{1-a} = M\Delta. \qquad (31)$$

Таким чином, оцінка (30) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (30) доведено уже для деякого $i \ge 1$, і покажемо її справедливість для $i+1$. Дійсно, оскільки

$$x_{i+1}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} ba^j x_i(q^{-(j+1)}t + 1), \qquad (32)$$

то

$$|x_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |b| \cdot a^j |x_i(q^{-(j+1)}t + 1)| \le$$

$$\le M|b| \sum_{j=0}^{\infty} a^j \Delta^i \le \frac{M|b|\Delta^i}{1-a} = M\Delta^{i+1}. \qquad (33)$$

Отже, ряди (29_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \ge T > 0$ до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки (30). Із (30) безпосередньо випливає, що ряд (24) рівномірно збігається при всіх $t \ge T > 0$ до деякої неперервної функції $x(t)$, яка задовольняє умову

$$|x(t)| \le \sum_{i=0}^{\infty} |x_i(t)| \le M \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \le \frac{M}{1-\Delta}. \qquad (34)$$

Теорему 3 доведено.

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння вигляду (13), для якого виконуються умови 1–2 теореми 3 і функція $f(t)$ є неперервною й обмеженою при всіх $t \in \Re$ і такою, що $\sup_t |f(t)| = \tilde{M} < \infty$.

Тоді аналогічно тому, як була доведена теорема 2, можна довести, що рівняння (13) має неперервний обмежений при $t \in \Re$ розв'язок $\bar{y}(t)$, який можна подати у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t),$$

у якому функції $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, є розв'язками послідовності рівнянь

$$y_0(qt) = ay_0(t) + f(t),$$

$$y_i(qt) = ay_i(t) + by_{i-1}(t+1), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

і визначаються за допомогою співвідношень

$$y_0(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a^j f(q^{-(j+1)}t),$$

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} ba^j y_{i-1}(q^{-(j+1)}t + 1), \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Зауваження. Виконуючи в (13) заміну змінних

$$y(t) = x(t) + \bar{y}(t), \qquad (39)$$

отримаємо рівняння (2) відносно функції $x(t)$. Оскільки для цього рівняння справедлива теорема 1, то, беручи до уваги заміну змінних (39), можна побудувати сім'ю неперервних обмежених при $t \ge T > 0$ розв'язків рівняння (13).

Подібні результати можна отримати для рівняння (13) у випадку, коли $b = b(t)$ – деяка дійсна функція дійсної змінної t і така, що $\sup_t |\tilde{b}(t)| = b^* < \infty$.

Висновки

У статті встановлено нові умови існування неперервних розв'язків лінійних різницево-функціональних рівнянь і розроблено метод їх побудови. З урахуванням виконання умов $0 < q < 1$, $a > 1$ і $\Delta = \frac{|b|}{a-1} < 1$ розглянуто однорідне рівняння і доведено теорему про існування сім'ї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції $\omega(\tau)$ $\left(\tau = \frac{\ln t}{\ln q}\right)$. Ці розв'язки подаються у вигляді ряду (3), де $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні функції, які є розв'язками послідовності рівнянь (5_i), $i = 0, 1, \ldots,$ і задовольняють оцінку (8). Теорему про існування неперервного розв'язку доведено також і для неоднорідного рівняння.

Отримані результати доповнюють уже існуючі праці інших математиків і сприятимуть подальшому вивченню різницево-функціональних рівнянь. Актуальним для подальших досліджень залишається питання існування неперервних розв'язків лінійних різницево-функціональних рівнянь у випадку $a = a(t)$, $b = b(t)$.

Список літератури

1. *R.P. Agarwal,* Difference Equations and Inequalities, Theory, Methods and Applications, 2nd ed. Revised and Expanded, 2000, 972 p.
2. *G.D. Birkhoff,* "General theory of linear difference equations", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 12, pp. 243–284, 1911.
3. *W.J. Trjitzinsky,* "Analytic theory of linear *q*-difference equations", Ibid, vol. 61, pp. 1–38, 1933.
4. *Мартынюк Д.И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. – К.: Наук. думка, 1972. – 248 с.
5. *Миролюбов А.А., Солдатов М.А.* Линейные неоднородные разностные уравнения. – М.: Наука, 1986. – 128 с.
6. *Пелюх Г.П., Сивак О.А.* Про структуру множини неперервних розв'язків функціонально-різницевих рівнянь з лінійно перетвореним аргументом // Нелінійні коливання – 2010. – **13**, № 1. – С. 75–95.
7. *Пелюх Г.П.* К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Докл. АН. – 2006. – **407**, № 5 – С. 600–603.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
21 жовтня 2013 року