УДК 517.983.27

О.А. Жуковська

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАКОНУ ДИСТРИБУТИВНОСТІ В РОЗШИРЕНОМУ ІНТЕРВАЛЬНОМУ ПРОСТОРІ

A study of the law of distributivity in the extended interval space is suggested. The research for interval in the center–radius form was conducted. The classification of the intervals is proposed. A set of intervals is represented as a union of three subsets which have defined by the relations of values the centers and the radii. We proved the lemma about the conditions under which the sum of the two intervals will own to same subset of the intervals you want to add. The conditions in which the sum of the two intervals belongs to the same subset as intervals, which are added. The necessary and sufficient conditions for the distributive law hold for the intervals belonging to one of the subsets are offered. A numerical example demonstrating, that the obtained conditions are constructive, is presented. These results provide the opportunity to conduct research to improve the algebraic structure of the set of intervals.

Keywords: intervals, distributive law.

Вступ

Широкий спектр прикладних задач містить різного роду невизначеності, зокрема інтервальну невизначеність, яка має місце, коли відома тільки належність необхідних для розв'язку задачі величин до деякого інтервалу. Отримання розв'язку в явному вигляді задач з інтервальною невизначеністю та неоднозначністю в даних, що виникають при постановці задачі або на проміжних стадіях процесу розв'язання, привело до створення інтервального аналізу. Базовий принцип інтервального аналізу формулюється так: інтервал невизначеності результату є множиною всіх його можливих значень, які отримуються при варіюванні змінних і параметрів задачі в границях відомих інтервалів. Водночас основна ідея інтервального аналізу – розгляд множин невизначеності як самостійних цілісних об'єктів. Саме це становить практичний інтерес. Однак алгебрична неповнота класичної інтервальної арифметики робить неможливим її формальне використання, що зумовило наявність різноманітних підходів до її розширення [1].

Алгебричне розширення класичної інтервальної арифметики вперше запропоноване в працях Е. Каухера та Е. Гарденеса. Показано, що таке узагальнення при збереженні всіх важливих властивостей класичного інтервального аналізу зводиться до більш замкненого простору як в алгебричному, так і в теоретико-множинному сенсі. Дослідження властивостей розширеної інтервальної арифметики, зокрема умов, за яких для інтервалів виконується дистрибутивний закон, було проведено в [2, 3]. Однак запропоновані в цих працях умови, за яких виконується закон дистрибутивності, є надто громіздкими, що ускладнює подальші практичні застосування. В класичній інтервальній арифметиці в [4] наведено необхідні та достатні умови виконання закону дистрибутивності для трійки інтервалів, які належать до однієї підмножини, і продемонстровано їх зручність для практичного застосування.

Тому виникає питання про можливість узагальнення умов виконання закону дистрибутивності класичної інтервальної арифметики для розширеної інтервальної арифметики.

Постановка задачі

Метою роботи є дослідження виконання закону дистрибутивності в розширеному інтервальному просторі.

Інтервальні арифметичні операції в класичному інтервальному просторі

Множина дійсних чисел $X = \{\xi\}$, яка задовольняє умову $\underline{x} \le \xi \le \overline{x}$, $\forall \underline{x}, \overline{x} \in \mathrm{R}$, називається замкненим інтервалом та позначається $X = [\underline{x}, \overline{x}]$, $\underline{x}$ і $\overline{x}$ – нижня та верхня границі інтервалу X відповідно. Множина всіх замкнених дійсних інтервалів позначається $I(\mathrm{R})$. Арифметичні операції для $X, Y \in I(\mathrm{R})$ у явному вигляді визначаються за допомогою формул

$$X + Y = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}],$$

$$X - Y = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}],$$

$$XY = [\min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}\}],$$

$$X/Y = X[1/\overline{y}, 1/\underline{y}].$$

Оскільки обчислення добутку XY потребує визначення найменшого та найбільшого значень із добутків $\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}$, то для подальшого застосування інтервальних операцій використовується [5] подання інтервалів у формі центр–радіус:

$$X = \langle x, r_x \rangle, \; Y = \langle y, r_y \rangle,$$

де

$$x = \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2}; \qquad r_x = \frac{\overline{x} - \underline{x}}{2};$$

$$y = \frac{\underline{y} + \overline{y}}{2}; \qquad r_y = \frac{\overline{y} - \underline{y}}{2}$$

є центрами і радіусами відповідних інтервалів. Арифметичні операції над інтервалами у формі центр–радіус визначаються співвідношеннями

$$\langle x, r_x \rangle + \langle y, r_y \rangle = \langle x + y, r_x + r_y \rangle,$$

$$\langle x, r_x \rangle - \langle y, r_y \rangle = \langle x - y, r_x + r_y \rangle,$$

$$\langle x, r_x \rangle \langle y, r_y \rangle = \langle xy + r_x r_y, y r_x + x r_y \rangle,$$

$$x \ge r_x \ge 0, \; y \ge r_y \ge 0,$$

$$\frac{\langle x, r_x \rangle}{\langle y, r_y \rangle} = \left\langle \frac{xy + r_x r_y}{y^2 - r_y^2}, \frac{y r_x + x r_y}{y^2 - r_y^2} \right\rangle,$$

$$x \ge r_x \ge 0, \; y \ge r_y \ge 0.$$

Зауважимо, що наведені формули множення та ділення можуть застосовуватися лише для додатних інтервалів, а для загального випадку пропонується формула $\langle x, r_x \rangle \langle y, r_y \rangle = \langle xy, y r_x + x r_y + r_x r_y \rangle$, яка не узгоджена з визначенням множення інтервалів і при збільшенні радіуса дає ширший інтервал.

У [5] нами запропонована класифікація інтервалів (рис. 1):

$$I_1^{(X,Y)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle x, r_x \rangle, \langle y, r_y \rangle \mid \frac{|x|}{r_x} \ge 1, \frac{|y|}{r_y} \ge 1, r_x, r_y > 0, \right.$$

$$\left. x, r_x, y, r_y \in \mathrm{R} \right\},$$

$$I_2^{(X,Y)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle x, r_x \rangle, \langle y, r_y \rangle \mid \frac{|x|}{r_x} < 1, \frac{|x|}{r_x} < \frac{|y|}{r_y}, \right.$$

$$\left. r_x, r_y > 0, \; x, r_x, y, r_y \in \mathrm{R} \right\},$$

$$I_3^{(X,Y)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle x, r_x \rangle, \langle y, r_y \rangle \mid \frac{|y|}{r_y} < 1, \frac{|x|}{r_x} \ge \frac{|y|}{r_y}, \right.$$

$$\left. r_x, r_y > 0, \; x, r_x, y, r_y \in \mathrm{R} \right\},$$

$I(\mathrm{R}) \times I(\mathrm{R}) = \bigcup_{n=1}^{3} I_n^{(X,Y)}(\mathrm{R})$ (“$\times$” – знак прямого добутку), яка дала можливість отримати формули добутку інтервалів у формі центр–радіус за всіх можливих значень центра і радіуса:

$$XY = \langle xy + \operatorname{sgn}(xy) r_x r_y, |x| r_y + |y| r_x \rangle,$$

$$X, Y \in I_1^{(X,Y)}(\mathrm{R}),$$

$$XY = \langle xy + \operatorname{sgn}(y) x r_y, |y| r_x + r_x r_y \rangle, X, Y \in I_2^{(X,Y)}(R),$$

$$XY = \langle xy + \operatorname{sgn}(x) y r_x, |x| r_y + r_x r_y \rangle, X, Y \in I_3^{(X,Y)}(\mathrm{R}).$$

У [4] на основі зазначеної вище класифікації інтервалів і формул множення було доведено, що для виконання закону дистрибутивності $A(B + C) = AB + AC$, $A, B, C \in I(\mathrm{R})$, необхідно та достатньо, щоб всі пари інтервалів, що множаться, належали до підмножини з одним і тим самим номером n, а саме: $A, B \in I_n^{(A,B)}(\mathrm{R})$, A, $C \in I_n^{(A,C)}(\mathrm{R})$, A, $B + C \in I_n^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, $n = 1, 2, 3$.

Перед тим як провести дослідження можливості узагальнення умов виконання закону дистрибутивності класичної інтервальної арифметики для розширеної інтервальної арифметики, стисло розглянемо необхідні теоретичні відомості.

Інтервальні арифметичні операції у розширеному інтервальному просторі

Інтервально-арифметична структура

$$Y = (I(\mathrm{R}), +, \times, \subseteq),$$

де

$$I(\mathrm{R}) = \{[x^-, x^+] \mid x^- < x^+, \; x^-, x^+ \in \mathrm{R}\}$$

є множиною класичних (або власних) інтервалів, розширюється множиною невласних інтервалів $\overline{I(\mathrm{R})} = \{[x^-, x^+] \mid x^- > x^+, \; x^-, x^+ \in \mathrm{R}\}$.

Результатом об’єднання множини $I(\mathrm{R})$ класичних (власних) інтервалів та множини

$\overline{I(\mathrm{R})}$ невласних інтервалів є множина $T(\mathrm{R})$ спрямованих інтервалів:

$$I(\mathrm{R}) \cup \overline{I(\mathrm{R})} = T(\mathrm{R}),$$

$$T(\mathrm{R}) = \{[x^-, x^+] \mid x^-, x^+ \in \mathrm{R}\} \cong \mathrm{R}^2.$$

Арифметичні операції додавання та множення розширюються від множини $I(\mathrm{R})$ класичних інтервалів до множини $T(\mathrm{R})$ спрямованих інтервалів. Інтервальна операція додавання визначається за допомогою формули

$$X + Y = [x^- + y^-, x^+ + y^+] \text{ при } X, Y \in T(\mathrm{R}). \quad (1)$$

Інтервальна операція множення виконується залежно від "напрямку"

$$\tau(X) = \begin{cases} +, \text{ якщо } x^- \le x^+, \\ - \text{ в інших випадках,} \end{cases}$$

інтервалів та їх належності до від'ємної або додатної області

$$\sigma(X) = \begin{cases} +, \text{ якщо } x^{-\tau(X)} \ge 0, \\ - \text{ в інших випадках,} \end{cases}$$

за формулами:

$$XY = \begin{cases} [x^{-\sigma(Y)} y^{-\sigma(X)}, x^{\sigma(Y)} y^{\sigma(X)}], \\ X, Y \in T(\mathrm{R}) \backslash Z(\mathrm{R}), \\ [x^{\sigma(X)\tau(Y)} y^{-\sigma(X)}, x^{\sigma(X)\tau(Y)} y^{\sigma(X)}], \\ X \in T(\mathrm{R}) \backslash Z(\mathrm{R}), Y \in Z(\mathrm{R}), \\ [x^{-\sigma(Y)} y^{\sigma(Y)\tau(X)}, x^{\sigma(Y)} y^{\sigma(Y)\tau(X)}], \\ Y \in T(\mathrm{R}) \backslash Z(\mathrm{R}), X \in Z(\mathrm{R}), \\ [\min\{x^- y^+, x^+ y^-\}, \max\{x^- y^-, x^+ y^+\}], \\ X, Y \in Z(\mathrm{R}), \tau(X) = \tau(Y) = +, \\ [\max\{x^- y^-, x^+ y^+\}, \min\{x^- y^+, x^+ y^-\}], \\ X, Y \in Z(\mathrm{R}), \tau(X) = \tau(Y) = -, \\ 0, X, Y \in Z(\mathrm{R}), \tau(X) = -\tau(Y), \end{cases}$$

де

$$Z(\mathrm{R}) = \{X \in T(\mathrm{R}) \mid X = [0,0] \text{ або } x^- x^+ < 0\}.$$

Інтервальні операції віднімання та ділення виражені як складові операцій додавання і множення:

$$X - Y = X + (-1)Y, \ X/Y = X(1/Y),$$

де $1/Y = [1/y^+, 1/y^-]$, якщо $Y \in T(\mathrm{R}) \backslash Z(\mathrm{R})$.

Зазначені арифметичні операції над спрямованими інтервалами, зокрема операція множення та ділення, перед безпосереднім застосуванням потребують попереднього аналізу первинних характеристик інтервалів і не розв'язують задачу визначення мінімального та максимального значень для інтервалів, що містять нуль.

Тому в [5] нами запропонована, з використанням форми центр–радіус інтервалів $\langle x, r_x \rangle = [x - r_x, x + r_x]$, така класифікація інтервалів (рисунок):

$$T_1^{(X,Y)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle x, r_x \rangle, \langle y, r_y \rangle \mid \frac{|x|}{|r_x|} \ge 1, \frac{|y|}{|r_y|} \ge 1, \right. \\ \left. x, r_x, y, r_y \in \mathrm{R} \right\}, \quad (2)$$

$$T_2^{(X,Y)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle x, r_x \rangle, \langle y, r_y \rangle \mid \frac{|x|}{|r_x|} < 1, \frac{|x|}{|r_x|} < \frac{|y|}{|r_x|}, \right. \\ \left. x, r_x, y, r_y \in \mathrm{R} \right\}, \quad (3)$$

$$T_3^{(X,Y)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle x, r_x \rangle, \langle y, r_y \rangle \mid \frac{|y|}{|r_y|} < 1, \frac{|x|}{|r_x|} \ge \frac{|y|}{|r_y|}, \right. \\ \left. x, r_x, y, r_y \in \mathrm{R} \right\}, \quad (4)$$

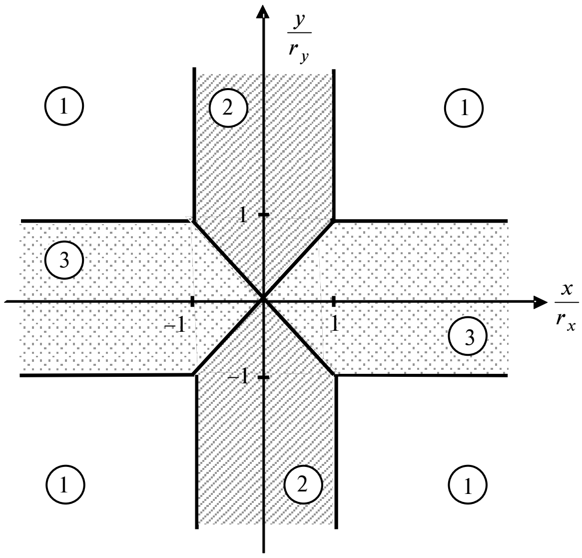
$T(\mathrm{R}) \times T(\mathrm{R}) = \bigcup_{n=1}^{3} T_n^{(X,Y)}(\mathrm{R})$ ("$\times$" – знак прямого добутку), яка дала змогу отримати формули добутку інтервалів у формі центр–радіус:

$$XY = \langle xy + \operatorname{sgn}(xy) r_x r_y, |x| r_y + |y| r_x \rangle, \\ X, Y \in T_1^{(X,Y)}(\mathrm{R}), \quad (5)$$

$$XY = \langle xy + \operatorname{sgn}(y r_x) x r_y, |y| r_x + |r_x| r_y \rangle, \\ X, Y \in T_2^{(X,Y)}(R), \quad (6)$$

$$XY = \langle xy + \operatorname{sgn}(x r_y) y r_x, |x| r_y + r_x |r_y| \rangle, \\ X, Y \in T_3^{(X,Y)}(\mathrm{R}). \quad (7)$$

$$XY = 0 \text{ при } \left(\left| \frac{x}{r_x} \right| < 1 \right) \wedge \left(\left| \frac{y}{r_y} \right| < 1 \right) \wedge (\operatorname{sgn}(r_x) = \\ = -\operatorname{sgn}(r_y)).$$



Області, що відповідають множинам $T_1^{(X,Y)}(\mathrm{R})$, $T_2^{(X,Y)}(\mathrm{R})$, $T_3^{(X,Y)}(\mathrm{R})$.

Проведемо дослідження виконання закону дистрибутивності в кожній із підмножин $T_n^{(X,Y)}(\mathrm{R})$, $n = 1, 2, 3$, які визначаються співвідношеннями (2)–(4).

Основний результат

Для подальшого дослідження введемо такі позначення:

$$T_1^{(A,B)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle a, r_a\rangle, \langle b, r_b\rangle \mid \frac{|a|}{|r_a|} \ge 1, \frac{|b|}{|r_b|} \ge 1, a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R} \right\},$$

$$T_1^{(A,C)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle a, r_a\rangle, \langle c, r_c\rangle \mid \frac{|a|}{|r_a|} \ge 1, \frac{|c|}{|r_c|} \ge 1, a, r_a, c, r_c \in \mathrm{R} \right\},$$

$$T_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle a, r_a\rangle, \langle (b+c), r_c\rangle \mid \frac{|a|}{|r_a|} \ge 1, \frac{|b+c|}{|r_b + r_c|} \ge 1, a, r_a, (b+c), (r_b + r_c) \in \mathrm{R} \right\},$$

$$T_2^{(A,B)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle a, r_a\rangle, \langle b, r_b\rangle \mid \frac{|a|}{|r_a|} < 1, \frac{|a|}{|r_a|} \le \frac{|b|}{|r_b|}, a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R} \right\},$$

$$T_2^{(A,C)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle a, r_a\rangle, \langle c, r_c\rangle \mid \frac{|a|}{|r_a|} < 1, \frac{|a|}{|r_a|} \le \frac{|c|}{|r_c|}, a, r_a, c, r_c \in \mathrm{R} \right\},$$

$$T_2^{(A,B+C)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle a, r_a\rangle, \langle (b+c), r_c\rangle \mid \frac{|a|}{|r_a|} < 1, \frac{|a|}{|r_a|} \le \frac{|b+c|}{|r_b + r_c|}, a, r_a, (b+c), (r_b + r_c) \in \mathrm{R} \right\},$$

$$T_3^{(A,B)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle a, r_a\rangle, \langle b, r_b\rangle \mid \frac{|b|}{|r_b|} < 1, \frac{|a|}{|r_a|} \ge \frac{|b|}{|r_b|}, a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R} \right\},$$

$$T_3^{(A,C)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle a, r_a\rangle, \langle c, r_c\rangle \mid \frac{|c|}{|r_c|} < 1, \frac{|a|}{|r_a|} \ge \frac{|c|}{|r_c|}, a, r_a, c, r_c \in \mathrm{R} \right\},$$

$$T_3^{(A,B+C)}(\mathrm{R}) = \left\{ \langle a, r_a\rangle, \langle (b+c), r_c\rangle \mid \frac{|b+c|}{|r_b + r_c|} < 1, \frac{|a|}{|r_a|} \ge \frac{|b+c|}{|r_b + r_c|}, a, r_a, (b+c), (r_b + r_c) \in \mathrm{R} \right\}.$$

Розглянемо, за яких умов пара інтервалів A, $B + C$ буде належати до підмножини $T_n^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, $n = 1, 2, 3$, з тим же значенням n, що і пари інтервалів: $A, B \in T_n^{(A,B)}(\mathrm{R})$, A, $C \in T_n^{(A,C)}(\mathrm{R})$. З цією метою доведемо таку лему.

Лема. Нехай

$$A, B \in T_n^{(A,B)}(\mathrm{R}),\ A, C \in T_n^{(A,C)}(\mathrm{R}),$$

тоді $A, B + C \in T_n^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, $n = 1, 2, 3$, якщо $bc \ge 0$, $r_b r_c \ge 0$, де b, c, r_b, r_c – центри та радіуси інтервалів B, C відповідно.

Доведення. Нехай $A, B \in T_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$, A, $C \in T_1^{(A,C)}(\mathrm{R})$. Доведемо, що $A, B + C \in T_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$ при $bc \ge 0$, $r_b r_c \ge 0$.

Сума $B + C$ визначається так:

$$B + C = \langle b, r_b\rangle + \langle c, r_c\rangle = \langle b + c, r_b + r_c\rangle.$$

Інтервали A, $B + C$ належать множині $T_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$ за умов

$$\frac{|a|}{|r_a|} \ge 1, \ \frac{|b+c|}{|r_b + r_c|} \ge 1. \tag{8}$$

Оскільки A, $B \in T_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$, $A, C \in T_1^{(A,C)}(\mathrm{R})$, то

$$\frac{|a|}{|r_a|} \ge 1, \ \frac{|b|}{|r_b|} \ge 1,$$

$$\frac{|a|}{|r_a|} \ge 1, \ \frac{|c|}{|r_c|} \ge 1.$$

Запишемо нерівності $\frac{|b|}{|r_b|} \ge 1$, $\frac{|c|}{|r_c|} \ge 1$ у вигляді $|b| \ge |r_b|$, $|c| \ge |r_c|$ та просумуємо їх:

$$|b| + |c| \ge |r_b| + |r_c|$$

або

$$\frac{|b| + |c|}{|r_b| + |r_c|} \ge 1. \tag{9}$$

Відомо, що $|b| + |c| \ge |b+c|$, $|r_b| + |r_c| \ge |r_b + r_c|$, причому рівність виконується тільки при $bc \ge 0$, $r_b r_c \ge 0$ відповідно. Враховуючи цей факт і порівнюючи умови (8) і (9), можна зробити висновок, що інтервали A, $B+C$ належать множині $T_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$ за умови однакових знаків центрів і радіусів інтервалів B, C.

Доведення інших випадків проводиться аналогічно.

Лема доведена.

Теорема. Нехай

$$A, B \in T_n^{(A,B)}(\mathrm{R}), \quad A, C \in T_n^{(A,C)}(\mathrm{R}), \ n = 1, 2, 3,$$

тоді для виконання закону дистрибутивності

$$A(B+C) = AB + AC$$

необхідно та достатньо виконання такої умови: $A, B+C \in T_n^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, $n = 1,2,3$.

Доведення. *Необхідність.* Розглянемо такі випадки:

1. A, $B \in T_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$ і $A, C \in T_1^{(A,C)}(\mathrm{R})$, а A, $B+C \in T_3^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$.

2. A, $B \in T_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$ і A, $C \in T_3^{(A,C)}(\mathrm{R})$, а A, $B+C \in T_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$.

Випадок 1. Нехай A, $B \in T_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$ і A, $C \in T_1^{(A,C)}(\mathrm{R})$, а A, $B+C \in T_3^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, тоді за формулою (5) маємо

$$AB = \langle ab + \operatorname{sgn}(ab)\, r_a r_b,\ |a| r_b + |b| r_a \rangle,$$

$$AC = \langle ac + \operatorname{sgn}(ac)\, r_a r_c,\ |a| r_c + |c| r_a \rangle.$$

Визначимо суму $AB + AC$:

$$\begin{aligned} AB + AC = \langle & a(b+c) + \operatorname{sgn}(a(b+c))\, r_a (r_b + r_c), \\ & |a|(r_b + r_c) + (|b| + |c|)\, r_a \rangle. \end{aligned} \tag{10}$$

Оскільки $A, B+C \in T_3^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, то добуток інтервалів обчислимо за формулою (7):

$$\begin{aligned} A(B+C) = \langle & a(b+c) + \operatorname{sgn}(a(r_b + r_c))(b+c)\, r_a, \\ & |a|(r_b + r_c) + r_a |r_b + r_c| \rangle. \end{aligned} \tag{11}$$

Згідно з означенням рівності двох інтервалів: інтервали $AB + AC$ і $A(B+C)$ рівні, якщо збігаються їх центри та радіуси.

Розглянемо центри інтервалів $AB + AC$ і $A(B+C)$ та визначимо, за яких умов можлива їх рівність. З (10) і (11) випливає, що рівність

$$a(b+c) + \operatorname{sgn}(a(b+c))\, r_a (r_b + r_c) =$$

$$= a(b+c) + \operatorname{sgn}(a(r_a + r_c))(b+c)\, r_a$$

центрів інтервалів $AB + AC$ і $A(B+C)$ можлива тільки тоді, коли виконується рівність $\frac{|b+c|}{|r_b + r_c|} = 1$, яка суперечить умові A, $B + C \in T_3^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$.

Випадок 2. Нехай A, $B \in T_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$ і A, $C \in T_3^{(A,C)}(\mathrm{R})$, а A, $B + C \in T_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, тоді за формулою (5) для A, $B \in T_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$ маємо

$$AB = \langle ab + \operatorname{sgn}(ab)\, r_a r_b,\ |a| r_b + |b| r_a \rangle.$$

Добуток для інтервалів A, $C \in T_3^{(A,C)}(\mathrm{R})$ обчислюємо за формулою (7):

$$AC = \langle ac + \operatorname{sgn}(ar_c)\, c r_a,\ |a| r_c + r_a |r_c| \rangle.$$

Визначимо суму $AB + AC$:

$$\begin{aligned} & AB + AC = \\ & = \langle a(b+c) + r_a \operatorname{sgn}(a)(r_b \operatorname{sgn}(b) + c \operatorname{sgn}(r_c)), \\ & |a|(r_b + r_c) + (|b| + |r_c|)\, r_a \rangle. \end{aligned} \tag{12}$$

Оскільки A, $B + C \in T_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, то добуток інтервалів обчислимо за формулою (3):

$$\begin{aligned} A(B+C) = \langle & a(b+c) + \operatorname{sgn}(a(b+c))\, r_a (r_b + r_c), \\ & |a|(r_b + r_c) + |b+c|\, r_a \rangle. \end{aligned} \tag{13}$$

З (12) і (13) випливає, що рівність

$$a(b+c)+r_a\operatorname{sgn}(a)(r_b\operatorname{sgn}(b)+c\operatorname{sgn}(r_c)) =$$
$$a(b+c)+\operatorname{sgn}(a(b+c))\,r_a(r_b+r_c)$$

або

$$a(b+c)+r_a\operatorname{sgn}(a)(r_b\operatorname{sgn}(b)+c\operatorname{sgn}(r_c)) =$$
$$= a(b+c)+r_a\operatorname{sgn}(a)\operatorname{sgn}(b+c)(r_b+r_c)$$

центрів інтервалів $AB+AC$ і $A(B+C)$ можлива тільки тоді, коли виконується рівність $\frac{c}{r_c}=1$, яка суперечить умові A, $C \in T_3^{(A,C)}(\mathrm{R})$.

Інші можливі випадки доводяться аналогічно.

Достатність. Нехай A, $B \in T_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$ і $A, C \in T_1^{(A,C)}(\mathrm{R})$, A, $B+C \in T_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, тоді за формулою (5) маємо

$$AB=\langle ab+\operatorname{sgn}(ab)r_a r_b, |a|r_b+|b|r_a\rangle,$$

$$AC=\langle ac+\operatorname{sgn}(ac)r_a r_c, |a|r_c+|c|r_a\rangle,$$

$$A(B+C)=\langle a(b+c)+\operatorname{sgn}(a(b+c))\,r_a(r_b+r_c),\; |a|(r_b+r_c)+|b+c|r_a\rangle. \quad (14)$$

Визначимо суму $AB+AC$:

$$AB+AC=\langle a(b+c)+\operatorname{sgn}(a(b+c))\,r_a(r_b+r_c),\; |a|(r_b+r_c)+(|b|+|c|)\,r_a\rangle. \quad (15)$$

Оскільки, згідно з лемою, A, $B+C \in T_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$ при $bc \ge 0$, то $|b|+|c|=|b+c|$, тому вираз (15) набуває вигляду

$$AB+AC=\langle a(b+c)+\operatorname{sgn}(a(b+c))\,r_a(r_b+r_c),\; |a|(r_b+r_c)+(|b+c|)\,r_a\rangle. \quad (16)$$

З порівняння виразів (14) і (16) випливає, що має місце рівність

$$A(B+C)=AB+AC.$$

Аналогічним чином проводиться доведення в інших випадках:

A, $B \in T_2^{(A,B)}(\mathrm{R})$ і $A, C \in T_2^{(A,C)}(\mathrm{R})$, A, $B+C \in T_2^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$,

A, $B \in T_3^{(A,B)}(\mathrm{R})$ і $A, C \in T_3^{(A,C)}(\mathrm{R})$, A, $B+C \in T_3^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$.

Теорема доведена.

Приклад. Нехай $A=\langle 1,-5\rangle$, $B=\langle 1,-2\rangle$, $C=\langle 2,-3\rangle$. Знайдемо суму інтервалів $B=\langle 1,-2\rangle$, $C=\langle 2,-3\rangle$: $B+C=\langle 1+2,-2-3\rangle=\langle 3,-5\rangle$.

Визначимо, до якої з підмножин $T_n^{(X,Y)}(\mathrm{R})$, $n=1,2,3$, належить кожна пара інтервалів. Для $A=\langle 1,-5\rangle$, $B=\langle 1,-2\rangle$ виконуються такі умови:

$$\frac{|a|}{|r_a|}=\frac{1}{5}<1,\; \frac{|b|}{|r_b|}=\frac{1}{2},\; \frac{|a|}{|r_a|}<\frac{|b|}{|r_b|},$$

тобто $A, B \in T_2^{(A,B)}(\mathrm{R})$.

Для $A=\langle 1,-5\rangle$, $C=\langle 2,-3\rangle$:

$$\frac{|a|}{|r_a|}=\frac{1}{5}<1,\; \frac{|c|}{|r_c|}=\frac{2}{3},\; \frac{|a|}{|r_a|}<\frac{|c|}{|r_c|},$$

тобто $A, C \in T_2^{(A,C)}(\mathrm{R})$.

Для $A=\langle 1,-5\rangle$, $B+C=\langle 3,-5\rangle$:

$$\frac{|a|}{|r_a|}=\frac{1}{5}<1,\; \frac{|b+c|}{|r_b+r_c|}=\frac{3}{5},\; \frac{|a|}{|r_a|}<\frac{|b+c|}{|r_b+r_c|},$$

тобто $A, B+C \in T_2^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$.

Оскільки всі пари інтервалів належать до підмножини з номером 2, то, згідно з теоремою, виконується закон дистрибутивності. Перевіримо це. Множення інтервалів виконуємо за формулою (6):

$$AB=\langle 1\cdot 1+\operatorname{sgn}(1\cdot(-5))\cdot 1\cdot(-2), 1\cdot(-5)+5\cdot(-2)\rangle =$$
$$=\langle 3,-15\rangle,$$

$$AC=\langle 1\cdot 2+\operatorname{sgn}(2\cdot(-5))\cdot 1\cdot(-3), 2\cdot(-5)+5\cdot(-3)\rangle =$$
$$=\langle 5,-25\rangle,$$

$$A(B+C)=\langle 1\cdot 3+\operatorname{sgn}(3\cdot(-5))\cdot 1\cdot(-5), 3\cdot(-5)+5\cdot(-5)\rangle=\langle 8,-40\rangle, \quad (17)$$

$$AB+AC=\langle 3,-15\rangle+\langle 5,-25\rangle+\langle 8,-40\rangle. \quad (18)$$

З порівняння виразів (17) і (18) випливає, що виконується закон дистрибутивності.

Висновки

У статті проведено дослідження виконання закону дистрибутивності в розширеному інтервальному просторі. Наведено необхідні та достатні умови (теорема) виконання закону дистрибутивності для трійки інтервалів, які належать до однієї підмножини $T_n^{(X,Y)}(\mathrm{R})$, $n = 1, 2, 3$, що визначаються співвідношеннями (2)–(4).

Отримані результати дають змогу в подальшому провести дослідження щодо вдосконалення алгебричної структури множини інтервалів.

Список літератури

1. *Прикладной* интервальный анализ / Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтер. – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2005. – 468 с.
2. *S.M. Markov,* "Extended Interval Arithmetic Involving Infinite Intervals", Math. Balkanika, New Ser., vol. 6, pp. 269–304, 1992.
3. *E.D. Popova,* Generalized Interval Distributive Relations, Institute of Mathematics&Computer Science, Bulgarian Academy of Sciences. Bulgaria, 1997, preprint no. 2, 18 p.
4. *Жуковська О.А., Титаренко А.О.* Дослідження закону дистрибутивності в класичній інтервальній арифметиці для загального випадку // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2013. – № 4. – С. 38–44.
5. *Жуковська О.А.* Дослідження інтервальних арифметичних операцій в класичному та розширеному просторах // Збірник праць Ін-ту математики НАНУ. – 2008. – **5**, № 5. – С. 85–110.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
11 березня 2014 року